KONU ANLATIMI · CEVAPLI

Tümler ve Bütünler Açılar; İki Paralel Doğru ve Bir Kesen

Kazanımlar: MAT.5.3.4 Düzlemde iki veya üç doğrunun birbirine göre durumuna bağlı olarak oluşabilecek açılara dair çıkarım yapabilme

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge **CC BY-NC 4.0** lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabilir.

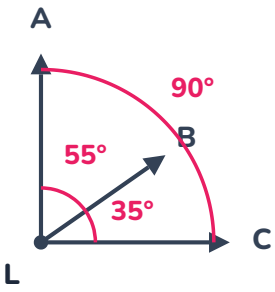
Tümler Açılar

> Ölçüleri toplamı **90°** olan iki açıya **tümler açılar** denir. Bu iki açı aynı zamanda **komşu** ise, yani ortak bir köşeleri ve ortak bir kolları varsa, bunlara **komşu tümler açılar** denir.

Tümler olmak için açıların yan yana durması **gerekmez**; ölçüleri toplamının 90° olması yeterlidir. Aşağıdaki iki açı kâğıdın farklı yerlerinde çizilmiştir ama yine de tümlerdir.



m(ÂBC) + m(D̂EF) = 62° + 28° = 90° olduğundan ÂBC ile D̂EF tümler açılardır. Açılar ayrı ayrı çizilmiş olsa da bu sonuç değişmez.



[LA ile [LC birbirine diktir, yani m(ÂLC) = 90°'dir. [LB ışını bu dik açıyı ikiye ayırdığı için B̂LC ile ÂLB komşu tümler açılardır: 35° + 55° = 90°.

ÖRNEK 1 **Bir açının tümleri nasıl bulunur?**

Tümlerini bulmak, o açıyı **90°'ye tamamlamak** demektir; yani 90°'den açının ölçüsü çıkarılır.

- 20°'nin tümleri: 90° − 20° = **70°**
- 45°'nin tümleri: 90° − 45° = **45°** (kendisine eşit)
- 83°'nin tümleri: 90° − 83° = **7°**

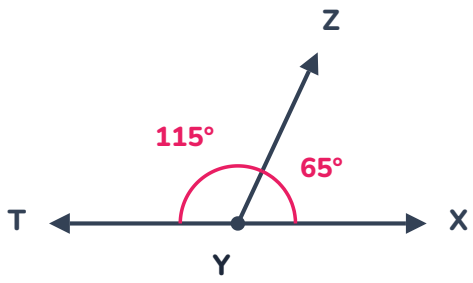
NOT **Sık yapılan hata:** Her açının tümleri olduğunu sanmak. Tümler açıların **ikisi de mutlaka dar açıdır**, çünkü toplamları 90°'yi geçemez. Bu yüzden **90° ve daha büyük** bir açının (dik, geniş, doğru, tam açı) tümleri **yoktur**. Örneğin 120°'nin tümlerini bulmaya çalışırsanız 90° – 120° gibi anlamsız bir işlem çıkar.

Bütünler Açılar

Ölçüleri toplamı **180°** olan iki açıya **bütünler açılar** denir. Bu iki açı aynı zamanda komşu ise **komşu bütünler açılar** adını alır.



m(K̂LM) + m(P̂RS) = 130° + 50° = 180° olduğundan K̂LM ile P̂RS bütünler açılardır.



X, Y ve T noktaları doğrusal olduğu için X̂YT bir doğru açıdır (180°). [YZ ışını bu doğru açıyı ikiye ayırır; X̂YZ ile Ẑ YT komşu bütünler açılardır: 65° + 115° = 180°.

Bir açının hem tümlerini hem bütünlerini bulabilirsiniz. Örneğin 30°'lik bir açının tümleri 60°, bütünleri ise 150°'dir. Tabloda birkaç açı için ikisi birden verilmiştir.

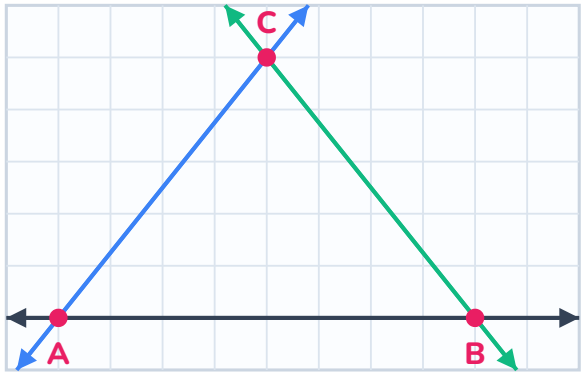
Açının Ölçüsü	Tümlerinin Ölçüsü (90° – açı)	Bütünlerinin Ölçüsü (180° – açı)
15°	75°	165°
30°	60°	150°
45°	45°	135°
80°	10°	100°
120°	Yoktur (90°'den büyük)	60°

NOT Tabloya dikkatle bakın: bir açının **bütünleri ile tümleri arasındaki fark her zaman 90°**'dir. Çünkü bütünleri 180°'ye, tümleri ise 90°'ye tamamlar; iki hedef arasındaki fark sabittir. Bu kısa yol, birçok soruyu tek adımda çözer.

NOT **Sık yapılan hata:** Tümler ile bütünleri karıştırmak. **Tümler → 90°** (dik açıya tamamlar), **bütünler → 180°** (doğru açıya tamamlar). Ayrıca bütünler açıların biri dar ise diğeri mutlaka geniştir; ikisinin de eşit olduğu tek durum 90° + 90°'dir.

Üç Doğrunun İkişer İkişer Kesişimi

Üç doğru her zaman **aynı noktada** kesişmek zorunda değildir. Doğrular ikişer ikişer, **farklı noktalarda** kesişirse üç ayrı kesişim noktası oluşur ve bu noktalar bir **üçgen** belirler.

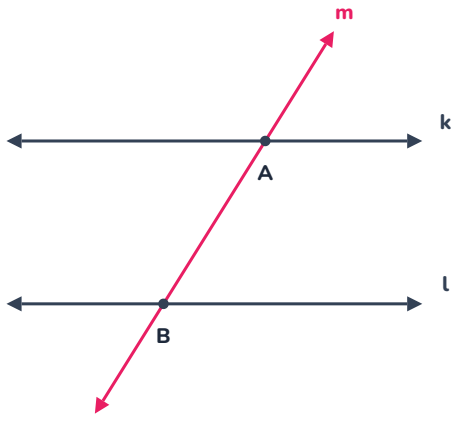


Üç doğru ikişer ikişer kesişmiştir: A, B ve C kesişim noktalarıdır. Bu üç nokta ortada bir üçgen oluşturur.

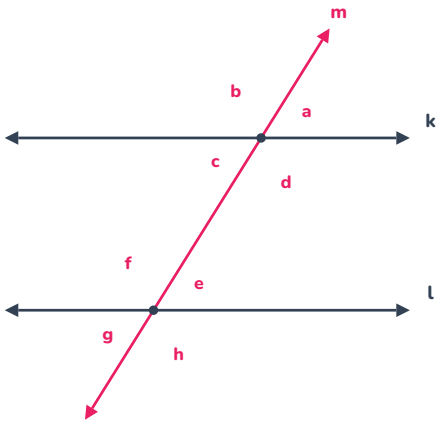
İki Paralel Doğru ve Bir Kesen

İki doğrunun her birini **farklı birer noktada** kesen üçüncü doğruya, bu iki doğrunun **keseni** denir. Kesilen iki doğru paralel olabilir de olmayabilir de.

Bir kesen, iki paralel doğruyu iki ayrı noktada keser. Her kesişimde **4 açı** oluştuğu için toplamda **8 açı** meydana gelir. Kesen dik değilse bu açıların **4'ü dar, 4'ü geniştir**.

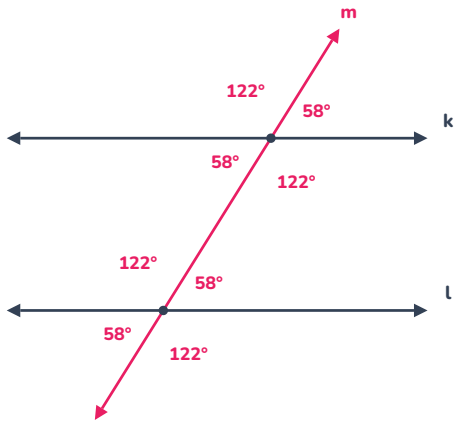


k // l'dir. m doğrusu, k ve l doğrularını A ve B noktalarında kestiği için bu iki doğrunun kesenidir.



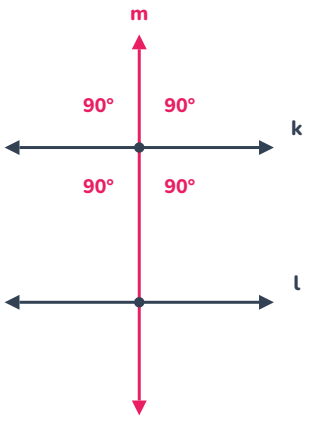
İki paralel doğru ve bir kesenin oluşturduğu 8 açı: a, b, c, d üstteki kesişimde; e, f, g, h alttaki kesişimdedir.

İki **paralel** doğru bir kesenle kesildiğinde oluşan açılarda şu iki kural geçerlidir:
• Bütün **dar açılar birbirine eştir**, bütün **geniş açılar birbirine eştir**.
• Bir dar açı ile bir geniş açının ölçüleri toplamı **180°**'dir.



Üstteki kesişimde 58° olan açı ölçülürse, alttaki kesişimdeki dar açılar da 58° çıkar. Geniş açıların hepsi ise 180° − 58° = 122°'dir.

Kesen paralel doğrulara **dik** ise durum daha da basitleşir: bu kez dar ya da geniş açı hiç oluşmaz, sekiz açının **tamamı 90°** olur.



m ⊥ k ve m ⊥ l olduğunda iki kesişimde oluşan sekiz açının hepsi diktir. Bir kitaplığın rafları ile dik duran yan panelinde bu durumu görebilirsiniz.

NOT **Sık yapılan hata:** "Kesenin oluşturduğu dar açılar her zaman eştir" diye ezberlemek. Bu kural **yalnızca kesilen iki doğru paralelse** geçerlidir. Doğrular paralel değilse iki kesişimdeki açılar birbirinden farklı çıkar; o zaman her kesişimi **ayrı ayrı** incelemek gerekir.

Etkinlikler

ETKİNLİK 1 **Aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri doldurunuz.**

Açının Ölçüsü	Tümlerinin Ölçüsü	Bütünlerinin Ölçüsü
12°	**78°**	**168°**
38°	**52°**	**142°**
45°	**45°**	**135°**
67°	**23°**	**113°**
90°	**0° (tümleri yoktur)**	**90°**
140°	**Yoktur (90°'den büyük)**	**40°**

ETKİNLİK 2 **Aşağıdaki soruları çözünüz.**

a) 53°'lik bir açının tümlerinin ölçüsü kaçtır? **90° – 53° = 37°**

b) 118°'lik bir açının bütünlerinin ölçüsü kaçtır? **180° – 118° = 62°**

c) Bütünlerinin ölçüsü 145° olan bir açının tümlerinin ölçüsü kaçtır? **Açı 35°'dir; tümleri 90° – 35° = 55°**

d) Tümlerinin ölçüsü 19° olan bir açının bütünlerinin ölçüsü kaçtır? **Açı 71°'dir; bütünleri 180° – 71° = 109°**

e) Tümler iki açıdan biri diğerinin 2 katı ise açılar kaçar derecedir? **90 ÷ 3 = 30° ve 2 × 30 = 60°**

f) Bütünler iki açıdan biri diğerinin 8 katı ise büyük açı kaç derecedir? **180 ÷ 9 = 20°; büyük açı 8 × 20 = 160°**

g) Bir açı ile bütünlerinin ölçüsü eşitse bu açı kaç derecedir ve çeşidi nedir? **180 ÷ 2 = 90°, dik açı**

h) İki paralel doğru bir kesenle kesiliyor. Oluşan açılardan biri 105° ise dar açıların ölçüsü kaçtır? **180° – 105° = 75°**

ETKİNLİK 3 **Aşağıdaki ifadelerden doğru olanların yanına "D", yanlış olanların yanına "Y" yazınız.**

a) D Tümler iki açının ikisi de dar açıdır.

b) Y 120°'lik bir açının tümleri vardır.

c) D Bütünler iki açıdan biri dik ise diğeri de diktir.

d) Y Tümler olan iki açının mutlaka ortak bir kolu vardır.

e) D Bir açının bütünleri ile tümlerinin farkı her zaman 90°'dir.

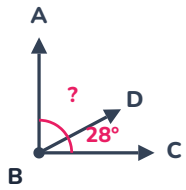
f) D İki paralel doğru bir kesenle kesildiğinde toplam 8 açı oluşur.

g) D Kesen paralel doğrulara dik ise oluşan açıların hepsi 90°'dir.

h) Y Paralel olmayan iki doğru bir kesenle kesilirse oluşan dar açılar yine birbirine eş olur.

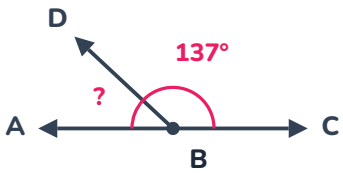
ETKİNLİK 4 **Aşağıdaki şekillerde "?" ile gösterilen açıların ölçülerini bulunuz.**

a) [BA ⊥ [BC olduğuna göre:



90° – 28° = 62°

b) A, B, C noktaları doğrusal olduğuna göre:

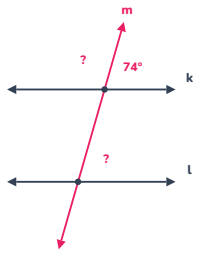


180° – 137° = 43°

devamı →

ETKİNLİK 4 **Aşağıdaki şekillerde "?" ile gösterilen açıların ölçülerini bulunuz.** (devam)

c) k // l olduğuna göre (iki "?" de sorulmaktadır):



Alt kesişimdeki dar açı 74°, üstteki geniş açı 180° – 74° = 106°

Konu Özeti

ÖZET Ölçüleri toplamı **90°** olan açılara **tümler**, **180°** olan açılara **bütünler** denir; yan yana duruyorlarsa başına "komşu" eklenir. Bir açının bütünleri ile tümleri arasındaki fark hep **90°**'dir. Üç doğru ikişer ikişer kesişirse bir **üçgen** oluşur. İki **paralel** doğru bir kesenle kesildiğinde **8 açı** oluşur: dar açıların hepsi birbirine, geniş açıların hepsi birbirine eştir ve bir dar ile bir geniş açının toplamı **180°**'dir.