

ÇÖZÜMLER

Çarpanlar, Katlar ve Bölünebilme Kriterleri

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge CC BY-NC 4.0 lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabılır.

1. Bölüm Soru 1-5

- 1 Bir seramik atölyesinde, 1 birim kare boyutundaki fayanslarla dikdörtgen biçiminde panolar yapılmaktadır. Her panoda fayansların **tamamı** kullanılacak, hiçbir fayans kesilmeyecek ve boşluk kalmayacaktır. Atölye, tam **48 fayans** içeren panolar üretmek istiyor. Ustanın hazırladığı ilk pano şekilde verilmiştir.



- a) Kenar uzunlukları birim cinsinden birer doğal sayı olan kaç farklı pano tasarlanabilir? Kenar uzunluklarını ikili olarak yazınız. (Aynı iki ölçü yer değiştirilerek yeniden sayılmaz.)
- b) Bulduğunuz kenar uzunlukları 48 sayısının nesidir? Açıklayınız.
- c) Bir çırağın "Kenarı 5 birim olan bir pano da yapabiliriz." diyor. Katılıyor musunuz? Gerekçelendiriniz.

- a) Pano dikdörtgen olduğu için (bir kenar) $\times$ (diğer kenar) = **48** olmalıdır. 48'i iki doğal sayının çarpımı biçiminde yazalım:

$$1 \times 48 = 48$$

$$2 \times 24 = 48$$

$$3 \times 16 = 48$$

$$4 \times 12 = 48$$

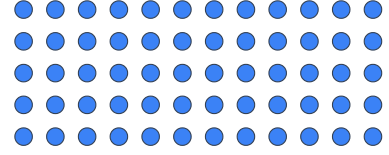
$$6 \times 8 = 48$$

Sonraki denemede 8×6 çıkar; bu, 6×8 ile aynı panodur. Demek ki **5 farklı** pano tasarlanabilir: **1×48, 2×24, 3×16, 4×12, 6×8**.

- b) Bu sayılar 48'in **çarpanlarıdır**: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48. Bir sayının çarpanları aynı zamanda o sayıyı **kalansız bölen** sayılardır; bu yüzden fayanslar artmadan biter.
- c) **Katılmıyorum**. Kenarı 5 birim olan bir pano için $48 \div 5$ işleminin kalansız olması gerekir. Oysa $5 \times 9 = 45$, $5 \times 10 = 50$; yani 48, 5'in katı değildir. 48'in birler basamağı 0 veya 5 olmadığı için 5'e kalansız bölünmez. 5, 48'in çarpanı olmadığından böyle bir pano yapılamaz.

✓ Doğru Sonuç: a) 5 farklı pano (1×48, 2×24, 3×16, 4×12, 6×8) b) 48'in çarpanları c) Hayır, 5 çarpan değil

- 2** Bir okulun müzik kulübüne **60 öğrenci** kayıt olmuştur. Kulüp başkanı öğrencileri, **her grupta eşit sayıda öğrenci** olacak ve **hiç öğrenci dışarıda kalmayacak** biçimde gruplara ayırmak istiyor. Başkanın aklındaki grup büyüklükleri şunlardır:



60 öğrenci - 12'li 5 sıra

4 • 7 • 12 • 15 • 18 • 20 • 25 • 30

- a) Bu sayıları "60'ın çarpanıdır" ve "60'ın çarpanı değildir" diye iki gruba ayırınız. Her sayı için kararınızın gerekçesini kısaca yazınız.
- b) Uygun bulduğunuz her grup büyüklüğü için kaç grup kurulacağını yazınız. Grup sayısı ile grup büyüklüğü arasında nasıl bir ilişki vardır?
- c) Bir öğrenci "18 sayısı 60'tan küçük olduğu için 18'li gruplar kurulabilir." diyor. Bu akıl yürütmenin nesi hatalıdır? Açıklayınız.

- a) Bir sayı 60'ı **kalansız bölüyorsa** 60'ın çarpanıdır.
— **60'ın çarpanı olanlar: 4, 12, 15, 20, 30** → $60 \div 4 = 15$, $60 \div 12 = 5$, $60 \div 15 = 4$, $60 \div 20 = 3$, $60 \div 30 = 2$ (hepsi kalansız).
— **Çarpanı olmayanlar: 7, 18, 25** → $7 \times 8 = 56$, $7 \times 9 = 63$ (60 atlanır); $18 \times 3 = 54$, $18 \times 4 = 72$; $25 \times 2 = 50$, $25 \times 3 = 75$. Hiçbirinde 60 elde edilemez.
- b) Grup sayısı $\times$ grup büyüklüğü = 60 olur:
4'lü gruplar → **15 grup** · 12'li gruplar → **5 grup** · 15'li gruplar → **4 grup** · 20'li gruplar → **3 grup** · 30'lu gruplar → **2 grup**.
Görüldüğü gibi grup sayısı da grup büyüklüğü de 60'ın çarpanıdır ve bu çarpanlar **ikişerli eşleşir**: biri büyürken diğeri küçülür.
- c) Hatalı olan kısım, "**küçük olmak**" ile "**çarpan olmak**"ın aynı şey sanılmasıdır. Bir sayının çarpanı olmak için ondan küçük olmak yetmez, onu **kalansız bölmek** gerekir. 18 sayısı 60'tan küçüktür ama $60 \div 18$ kalansız değildir: 3 grup kurulur, 6 öğrenci dışarıda kalır. (Aynı şekilde 7 ve 25 de 60'tan küçük olmalarına rağmen çarpan değildir.)

✓ **Doğru Sonuç: a) Çarpan: 4, 12, 15, 20, 30 / Değil: 7, 18, 25 b) Grup sayısı $\times$ grup büyüklüğü = 60 c) Küçük olmak yetmez, kalansız bölmeli**

- 3** Bir arkeoloji kazısında üzerinde sayılar yazılı bir kil tablet bulunmuştur. Tablette bir doğal sayının **bütün çarpanları küçükten büyüğe sıralanmış**, ancak tabletin bazı yerleri kırıldığı için iki sayı okunamamaktadır:

1, 2, ■, 7, 8, ▲, 28, 56

- a) Tablette çarpanları sıralanan sayı kaçtır? Nasıl karar verdiğinizizi yazınız.
 b) ■ ve ▲ yerine hangi sayılar gelmelidir? Kullandığınız kuralı belirterek adım adım çözünüz.
 c) Tabletten kenarında "Bu sayının çarpanlarının en büyüğü ile katlarının en küçüğü aynıdır." yazmaktadır. Bu ifade doğru mudur? Gerekçelendiriniz.

- a) Bir doğal sayının **en büyük çarpanı kendisidir**. Liste küçükten büyüğe sıralandığına göre en sağdaki sayı, sayının kendisidir: **56**.

Kontrol: $7 \times 8 = 56 \checkmark$ ve $2 \times 28 = 56 \checkmark$ (listedeki sayılar gerçekten 56'nın çarpanı).

- b) Kullanılan kural: **çarpanlar küçükten büyüğe sıralandığında baştan ve sondan aynı sıradaki sayıların çarpımı sayının kendisine eşittir**.

1. sıra ile 8. sıra: $1 \times 56 = 56 \checkmark$

2. sıra ile 7. sıra: $2 \times 28 = 56 \checkmark$

4. sıra ile 5. sıra: $7 \times 8 = 56 \checkmark$

Geriye 3. sıra (■) ile 6. sıra (▲) kalır: $\blacksquare \times \blacktriangle = 56$ olmalıdır.

■ sayısı 2 ile 7 arasında ve 56'nın çarpanı olmalıdır. 3 ve 5 sayıları 56'yı kalansız bölmez, 6 da bölmez; $\blacksquare = 4$ 'tür ($56 \div 4 = 14$).

Buradan $\blacktriangle = 56 \div 4 = 14$ bulunur.

Tam liste: 1, 2, **4**, 7, 8, **14**, 28, 56.

- c) İfade **doğrudur**. Bir doğal sayının **en büyük çarpanı kendisidir** (56'dan büyük hiçbir sayı 56'yı kalansız bölemez). Aynı sayının katları ise 56, 112, 168, ... biçiminde ilerler; yani **katlarının en küçüğü de kendisidir** ($56 \times 1 = 56$). Bu yüzden iki değer de 56'ya eşittir.

✓ Doğru Sonuç: a) 56 b) ■ = 4, ▲ = 14 c) Doğru, ikisi de 56

- 4** Bir teleferik hattında kabinler alt istasyondan **her 15 dakikada bir** hareket etmektedir. Günün ilk kabini **0. dakikada** hareket etmiştir; sonraki kabinlerin hareket dakikaları şekildeki sayı doğrusunda işaretlenmiştir.



Bilgi: Bir doğal sayının 15'in katı olabilmesi için hem 3 hem de 5 ile kalansız bölünebilmesi gerekir.

- a) İlk kabinde sonra **90. dakikaya kadar (90 dâhil)** kaç kabin daha hareket eder? Hareket dakikalarını yazınız ve bu sayıların 15'in nesi olduğunu belirtiniz.
- b) **200. dakikada** bir kabin hareket eder mi? Hiç bölme işlemi yapmadan, yukarıdaki bilgiyi kullanarak karar veriniz.
- c) Teleferik hiç durmadan çalışsaydı hareket dakikaları biter miydi? Buna karşılık 15 kişilik bir kabini eşit gruplara ayırmanın kaç farklı yolu vardır? İki durumu karşılaştırarak katlar ile çarpanlar arasındaki farkı açıklayınız.

- a) Hareket dakikaları 15'in sırasıyla 1, 2, 3, ... ile çarpımıdır:

$$15 \times 1 = 15, 15 \times 2 = 30, 15 \times 3 = 45, 15 \times 4 = 60, 15 \times 5 = 75, 15 \times 6 = 90.$$

Yani **6 kabin** daha hareket eder: **15, 30, 45, 60, 75 ve 90. dakikalarda**. Bu sayılar 15'in katlarıdır.

- b) **Hayır, etmez.** 200 sayısının 15'in katı olması için hem 5'e hem 3'e kalansız bölünmesi gerekir:

— 5 ile: 200'ün birler basamağı 0 olduğu için 5'e kalansız bölünür ✓

— 3 ile: rakamları toplamı $2 + 0 + 0 = 2$ 'dir; 2 sayısı 3'ün katı olmadığı için 200, 3'e kalansız bölünmez ×

İki koşuldan biri sağlanmadığı için 200, 15'in katı **değildir**. (Gerçekten $15 \times 13 = 195$ ve $15 \times 14 = 210$ 'dur; 200 atlanır.)

- c) Teleferik durmasaydı hareket dakikaları **hiç bitmezdi**: 15, 30, 45, ... dizisi sonsuza kadar sürer. Çünkü bir doğal sayının **katları sonsuz sayıdadır** (sayma sayıları bitmez).

Buna karşılık 15 kişilik kabini eşit gruplara ayırma yolları 15'in çarpanları kadardır: **1, 3, 5, 15** → yalnızca **4 yol**. Yani bir doğal sayının **çarpanları sonlu sayıdadır**, çünkü çarpanlar sayının kendisinden büyük olamaz.

Fark: katlar sayıdan başlayıp yukarı doğru sonsuza gider; çarpanlar ise 1 ile sayının kendisi arasında sıkışmıştır, bu yüzden sayılabilir kadardır.

✓ **Doğru Sonuç:** a) 6 kabin (15, 30, 45, 60, 75, 90 — 15'in katları) b) Hayır (rakam toplamı 2, 3'e bölünmez) c) Katlar sonsuz, çarpanlar sonlu (15'in 4 çarpanı)

- 5** Bir fidanlıkta **84 fide** bulunmaktadır. Bahçıvan fideleri, her sırada eşit sayıda fide olacak ve hiç fide artmayacak biçimde sıralara dizmek istiyor. İki öğrenci şöyle diyor:

Deniz: "84 sayısı 7'nin katı olduğu için fideleri 7'li sıralara dizebiliriz."

Ozan: "7 sayısı 84'ün çarpanı olduğu için fideleri 7'li sıralara dizebiliriz."

- a) Hangi öğrenci ya da öğrenciler doğru söylemiştir? İki ifadenin aynı ilişkiyi mi anlattığını açıklayınız.
- b) Bahçıvan "Fideleri 9'lu sıralara da dizebilirim." diyor. Katılıyor musunuz? Bölme işlemi yapmadan karar verip gerekçenizi yazınız.
- c) Bir öğrenci "84 sayısı hem 7'nin katı hem de 7'nin çarpanıdır." diyor. Bu ifadenin hangi kısmı yanlıştır? Nedenini açıklayınız.

- **a) İkisi de doğrudur.** $84 = 7 \times 12$ eşitliği tek bir ilişkiyi **iki farklı yönden** anlatır:
 - Çarpımdaki 7 ve 12 sayıları, sonuçtaki 84'ün **çarpanıdır** (Ozan bunu söylüyor).
 - 84 sayısı ise 7'nin ve 12'nin **katıdır** (Deniz bunu söylüyor).

Yani "a, b'nin çarpanıdır" demek ile "b, a'nın katıdır" demek aynı kapıya çıkar. Her iki durumda da 84 fide, 12 sıraya 7'şerli olarak artmadan dizilir.
- **b) Katılmıyorum.** 9'lu sıralar için 84'ün 9'a kalansız bölünmesi gerekir. Rakamları toplamı $8 + 4 = 12$ 'dir.
 - 12 sayısı 3'ün katıdır $\rightarrow 84, 3'e$ kalansız bölünür ✓
 - Ancak 12 sayısı 9'un katı **değildir** $\rightarrow 84, 9'a$ kalansız bölünmez ×

Bu yüzden 9'lu sıralar kurulamaz; 9 sıra dizilir, 3 fide dışarıda kalır.
- **c) Yanlış olan kısım "7'nin çarpanıdır"** ifadesidir. 7'nin çarpanları yalnızca **1 ve 7**'dir. Bir doğal sayının çarpanları **kendisinden büyük olamaz**; $84 > 7$ olduğu için 84, 7'nin çarpanı olamaz. Doğrusu şudur: **84, 7'nin katıdır; 7 ise 84'ün çarpanıdır**. Kat ilişkisi büyük sayıya, çarpan ilişkisi küçük sayıya bakar.

✓ Doğru Sonuç: a) İkisi de doğru, aynı ilişkinin iki yönü b) Hayır (rakam toplamı 12, 9'un katı değil) c) "7'nin çarpanı" kısmı yanlış

2. Bölüm Soru 6–10

- 6** Bir markette çalışan stajyer, gün sonunda beş satışın tutarını (TL) not etmiş ve her tutarın 2'ye, 5'e ve 10'a kalansız bölünüp bölünmediğini bir tabloya işaretlemiştir. Tabloda ✓ bölünür, — bölünmez anlamına gelmektedir.

Tutar 430 → 2: ✓ 5: ✓ 10: ✓

Tutar 285 → 2: ✓ 5: ✓ 10: —

Tutar 1064 → 2: ✓ 5: — 10: —

Tutar 3500 → 2: ✓ 5: ✓ 10: ✓

Tutar 918 → 2: ✓ 5: — 10: —

- a) Tabloda yanlış işaretlenmiş tek bir kutu vardır. Hangi satırın hangi sütunudur? Doğrusunu yazıp gerekçelendiriniz.
- b) Düzeltilmiş tabloya bakarak "10'a kalansız bölünen her sayı hem 2'ye hem 5'e kalansız bölünür." ifadesinin doğru olup olmadığına karar veriniz ve nedenini birler basamağıyla açıklayınız.
- c) Bu ifadenin tersi de doğru mudur: "Hem 2'ye hem 5'e kalansız bölünen her sayı 10'a da kalansız bölünür."? Tablodan bir örnek göstererek açıklayınız.

- a) Yanlış olan kutu **285 satırının 2 sütunudur**. Stajyer oraya ✓ koymuş; doğrusu — olmalıydı.

Gerekçe: Bir sayının 2'ye kalansız bölünmesi için birler basamağının 0, 2, 4, 6 veya 8 olması gerekir. 285'in birler basamağı **5**'tir, yani 285 **tek** sayıdır ve 2'ye kalansız bölünmez. (Diğer bütün kutular doğrudur: 430 ve 3500'ün birler basamağı 0, 1064'ün 4, 918'in 8'dir.)

- b) İfade **doğrudur**. Bir sayı 10'a kalansız bölünüyorsa birler basamağı **0**'dır.
 - Birler basamağı 0 olan sayı çift olduğu için **2'ye** kalansız bölünür ✓
 - Birler basamağı 0 veya 5 olan sayılar 5'e bölündüğünden, 0 da bu koşulu sağlar → **5'e** kalansız bölünür ✓

Tabloda 430 ve 3500 bu durumun örnekleridir.

- c) **Evet, tersi de doğrudur**. Bir sayının hem 2'ye hem 5'e bölünmesi için birler basamağı aynı anda {0, 2, 4, 6, 8} **ve** {0, 5} kümelerinde olmalıdır. Bu iki koşulu birlikte sağlayan tek rakam **0**'dır. Birler basamağı 0 olan sayı da 10'a kalansız bölünür.

Örnek: **3500** hem 2'ye hem 5'e bölünmektedir ve gerçekten 10'a da bölünür ($3500 \div 10 = 350$). Tabloda 2'ye ve 5'e birlikte bölünen ama 10'a bölünmeyen **hiçbir sayı yoktur**; böyle bir sayı zaten olamaz.

✓ **Doğru Sonuç: a) 285 / 2 sütunu yanlış (285 tektir) b) Doğru (birler basamağı 0) c) Doğru, ortak tek rakam 0**

7 Bir kütüphanede her kitaba dört basamaklı bir raf numarası verilmiştir. Görevli, raflara yerleştirmeyi kolaylaştırmak için şu kuralı uygulamaktadır:

- Numarası **3'e kalansız bölünen** kitaba **sarı** etiket yapıştırılır.
- Numarası **9'a kalansız bölünen** kitaba **ayrıca yeşil** bir etiket yapıştırılır.

Elindeki dört kitabın numaraları şunlardır: **2514 • 4131 • 6309 • 7220**

a) Hangi kitaplar sarı etiket alır? Her numara için rakamları toplamını yazarak gösteriniz.

b) Hangi kitaplar ayrıca yeşil etiket alır? Kararınızı gerekçelendiriniz.

c) Görevli "Yeşil etiketli her kitap aynı zamanda sarı etiketlidir, ama sarı etiketli her kitap yeşil değildir." diyor. Bu ifadeyi hem kuralı hem de elindeki numaraları kullanarak açıklayınız.

- **a)** Bir sayı, **rakamları toplamı 3'ün katı** ise 3'e kalansız bölünür.

$$2514 \rightarrow 2 + 5 + 1 + 4 = 12 \rightarrow 12, 3'ün katı \checkmark \text{ sarı}$$

$$4131 \rightarrow 4 + 1 + 3 + 1 = 9 \rightarrow 9, 3'ün katı \checkmark \text{ sarı}$$

$$6309 \rightarrow 6 + 3 + 0 + 9 = 18 \rightarrow 18, 3'ün katı \checkmark \text{ sarı}$$

$$7220 \rightarrow 7 + 2 + 2 + 0 = 11 \rightarrow 11, 3'ün katı değil \times \text{ etiket almaz}$$

Sarı etiket alanlar: **2514, 4131 ve 6309.**

- **b)** Bir sayı, **rakamları toplamı 9'un katı** ise 9'a kalansız bölünür.

$$2514 \rightarrow 12; 12 \text{ sayısı } 9'un \text{ katı değil } \times$$

$$4131 \rightarrow 9; 9'un \text{ katı } \checkmark \text{ yeşil}$$

$$6309 \rightarrow 18; 18 = 9 \times 2, 9'un \text{ katı } \checkmark \text{ yeşil}$$

Yeşil etiket alanlar: **4131 ve 6309.**

- **c) İfade doğrudur.**

— **Birinci kısım:** Bir sayının rakamları toplamı 9'un katıysa, bu toplam aynı zamanda 3'ün de katıdır (çünkü $9 = 3 \times 3$, yani 9'un her katı 3'ün de katıdır). Dolayısıyla 9'a bölünen her sayı 3'e de bölünür. Bu yüzden yeşil etiket alan 4131 ve 6309 zaten sarı etiket de almıştır.

— **İkinci kısım:** Tersine geçerli değildir. **2514** sayısı sarı etiket almıştır (rakam toplamı 12, 3'ün katı) ama 12 sayısı 9'un katı olmadığı için yeşil etiket almaz. Yani bir karşı örnek bulmak, "her sarı yeşildir" iddiasını çürütmeye yeter.

✓ Doğru Sonuç: a) Sarı: 2514, 4131, 6309 b) Yeşil: 4131, 6309 c) Doğru; karşı örnek 2514

- 8** Bir tur şirketi, günlük gezilere katılan grupları **4 kişilik masalara** oturtacaktır. Masalarda boş sandalye kalmaması, yani her grubun tam olarak 4'lük masalara yerleşmesi isteniyor. Beş günün grup büyüklükleri şöyledir:

132 • 218 • 516 • 1350 • 2024

Görevli şu kararı vermiştir: "Beş sayı da çift olduğuna göre hepsi 4'e kalansız bölünür; bütün gruplar 4'lük masalara boşluksuz yerleşir."

- a) Görevlinin akıl yürütmesindeki hata nedir? Açıklayınız.**
b) Sayıları "4'e kalansız bölünür" ve "bölünmez" diye doğru biçimde ikiye ayırınız. Her biri için son iki basamağı yazarak gerekçelendiriniz.
c) "4'e kalansız bölünen her sayı 2'ye de kalansız bölünür." ifadesi ile bunun tersi olan "2'ye kalansız bölünen her sayı 4'e de kalansız bölünür." ifadesini değerlendiriniz. Yanlış olan için bu sorudaki sayılardan bir karşı örnek veriniz.

- a) Görevli "çift olmak" ile "4'e bölünmek"i aynı şey sanmıştır. Çift olmak yalnızca 2'ye kalansız bölünmeyi garanti eder. 4 ile bölünebilme için başka bir kriter vardır: sayının son iki basamağı 00 ya da 4'ün katı olmalıdır. Çift bir sayının son iki basamağı 4'ün katı olmayabilir; bu yüzden her çift sayı 4'e bölünmez.**

- b) Son iki basamağa bakalım:**

132 → **32**; $32 = 4 \times 8$ ✓ **bölünür**

218 → **18**; 18, 4'ün katı değil ($4 \times 4 = 16$, $4 \times 5 = 20$) × **bölünmez**

516 → **16**; $16 = 4 \times 4$ ✓ **bölünür**

1350 → **50**; 50, 4'ün katı değil ($4 \times 12 = 48$, $4 \times 13 = 52$) × **bölünmez**

2024 → **24**; $24 = 4 \times 6$ ✓ **bölünür**

Bölünür: 132, 516, 2024 · Bölünmez: 218, 1350

Yani 218 kişilik grupta 54 masa dolar, 2 kişi eksik kalır; 1350 kişilik grupta ise 2 kişi eksik kalır.

- c) — "4'e bölünen her sayı 2'ye de bölünür." → DOĞRU. $4 = 2 \times 2$ olduğu için 4'ün her katı aynı zamanda 2'nin katıdır, yani çifttir. Örnek: 516 hem 4'e hem 2'ye bölünür.**
— "2'ye bölünen her sayı 4'e de bölünür." → YANLIŞ. Karşı örnek: 218. Bu sayı çifttir (2'ye bölünür) ama son iki basamağı 18 olduğu için 4'e kalansız bölünmez. (1350 de aynı işi görür.) Tek bir karşı örnek, "her" ile kurulan bu iddiayı çürütmeye yeter.

✓ **Doğru Sonuç: a) Çift olmak 4'e bölünmeyi garanti etmez b) Bölünür: 132, 516, 2024 / Bölünmez: 218, 1350 c) İlki doğru, ikincisi yanlış (karşı örnek 218)**

- 9** Bir konser salonunda biletler üç basamaklı numaralarla basılmaktadır. Salondaki localar **6 kişiliktir**; bu yüzden düzenleyici, numarası **6'ya kalansız bölünen** biletleri ayrı bir kutuya koymak istiyor. Elindeki destede numarası **54▲** biçiminde olan biletler vardır; ▲ bir rakamı göstermektedir.

- a) Bir doğal sayının 6'ya kalansız bölünebilmesi için hangi iki koşulun birlikte sağlanması gerekir? Yazınız.
- b) ▲ yerine yazılabilecek bütün rakamları bulunuz. Çözümünüzü iki koşulu ayrı ayrı inceleyerek adım adım yazınız.
- c) Bu destede 6'ya kalansız bölünen en büyük bilet numarası kaçtır? Bu numara 9'a da kalansız bölünür mü? Hesap yaparak gösteriniz.

- a) Bir doğal sayı hem **2'ye** hem de **3'e** kalansız bölünüyorsa 6'ya da kalansız bölünür. İki koşulun **aynı anda** sağlanması gerekir; yalnızca birinin sağlanması yetmez.

- b) **1. koşul — 2'ye bölünme:** Sayının birler basamağı çift olmalıdır. Birler basamağı ▲ olduğu için

$$\Delta \in \{0, 2, 4, 6, 8\}.$$

2. koşul — 3'e bölünme: Rakamları toplamı 3'ün katı olmalıdır:

$$5 + 4 + \Delta = 9 + \Delta$$

9 zaten 3'ün katı olduğundan ▲ da 3'ün katı olmalıdır ($9 + 0 = 9$, $9 + 3 = 12$, $9 + 6 = 15$, $9 + 9 = 18 \rightarrow$ hepsi 3'ün katı):

$$\Delta \in \{0, 3, 6, 9\}.$$

İki koşulun kesişimi: $\{0, 2, 4, 6, 8\} \cap \{0, 3, 6, 9\} = \{0, 6\}$

Yani uygun numaralar **540** ve **546**'dır. (Kontrol: $540 \div 6 = 90 \checkmark$, $546 \div 6 = 91 \checkmark$)

- c) Bulunan iki numaradan büyüğü **546**'dır.

9'a bölünme kontrolü: $5 + 4 + 6 = 15$. 15 sayısı 3'ün katıdır ama **9'un katı değildir** ($9 \times 1 = 9$, $9 \times 2 = 18$).

Bu yüzden 546 sayısı 9'a kalansız **bölünmez**. ($546 \div 9$ işleminde bölüm 60, kalan 6'dır.)

Not: 6'ya bölünmek 9'a bölünmeyi gerektirmez; 6 için 3'ün katı olmak yeterken 9 için rakam toplamının 9'un katı olması şarttır.

✓ **Doğru Sonuç: a) Hem 2'ye hem 3'e bölünmeli b) ▲ = 0 veya 6 (540 ve 546) c) 546; 9'a bölünmez (15, 9'un katı değil)**

10 Bir depoda her koliye dört basamaklı bir barkod numarası verilmektedir. Depo sorumlusu, silinmiş bir barkodu yeniden bulmaya çalışıyor. Elindeki bilgiler şunlardır:

- Barkod **7 ■ 4 ●** biçimindedir (■ ve ● birer rakamdır).
- Barkodun **10 ile bölümünden kalan 5**'tir.
- Barkod **9 ile kalansız bölünmektedir**.

a) ● rakamı kaçtır? Hangi bilgiyi nasıl kullandığınızı açıklayınız.

b) ■ rakamı kaçtır? Çözümünüzü adım adım yazınız ve barkodun tamamını belirtiniz.

c) Bulduğunuz barkod 5'e, 2'ye ve 3'e kalansız bölünür mü? Her biri için ayrı ayrı gerekçe yazınız.

d) Sorumlu "9 ile kalansız bölünen bu barkod 6 ile de kalansız bölünür." diyor. Katılıyor musunuz? Gerekçelendiriniz.

- a) Bir sayı 10'a bölündüğünde **kalan, o sayının birler basamağıdır** (çünkü onluklar, yüzlükler ve binlikler 10'a tam bölünür). Kalan 5 olduğuna göre birler basamağı 5'tir: ● = 5.

Barkod şimdi **7 ■ 4 5** biçimindedir.

- b) Barkod 9'a kalansız bölündüğüne göre **rakamları toplamı 9'un katı** olmalıdır:

$$7 + \blacksquare + 4 + 5 = 16 + \blacksquare$$

■ bir rakam olduğu için 0 ile 9 arasındadır; bu durumda $16 + \blacksquare$ toplamı 16 ile 25 arasında olur. Bu aralıktaki tek 9 katı **18**'dir:

$$16 + \blacksquare = 18 \rightarrow \blacksquare = 2$$

(Sonraki 9 katı 27 olurdu, bu da ■ = 11 demek olurdu; rakam olamaz.)

Barkod: **7245**. Kontrol: $7 + 2 + 4 + 5 = 18 \checkmark$ ve $7245 \div 9 = 805 \checkmark$; $7245 \div 10$ işleminde kalan 5 $\checkmark$

- c) — **5'e bölünür** $\checkmark$ Birler basamağı 5'tir; birler basamağı 0 veya 5 olan sayılar 5'e kalansız bölünür.
— **2'ye bölünmez** $\times$ Birler basamağı 5 olduğu için 7245 **tek** sayıdır; 2'ye bölünmesi için birler basamağının 0, 2, 4, 6 veya 8 olması gerekirdi.
— **3'e bölünür** $\checkmark$ Rakamları toplamı 18'dir; 18 sayısı 3'ün katıdır. (Zaten 9'a bölünen her sayı 3'e de bölünür.)
- d) **Katılmıyorum**. Bir sayının 6'ya kalansız bölünmesi için hem 2'ye hem 3'e bölünmesi gerekir. 7245 sayısı 3'e bölünüyor $\checkmark$ ama **tek** olduğu için 2'ye bölünmüyor $\times$. İki koşuldan biri sağlanmadığından 7245 sayısı 6'ya kalansız **bölünmez**.

Buradan şu genel sonuç çıkar: **9'a bölünmek, 6'ya bölünmeyi gerektirmez**. (Başka bir karşı örnek: 9 sayısının kendisi 9'a bölünür ama 6'ya bölünmez.)

✓ Doğru Sonuç: a) ● = 5 b) ■ = 2, barkod 7245 c) 5'e ✓, 2'ye ×, 3'e ✓ d) Hayır, 2'ye bölünmediği için 6'ya bölünmez

3. Bölüm Soru 11–15

- 11** Bir sınıfın matematik panosuna dört iddia asılmıştır. Öğrencilerden her iddia için karar vermeleri, yanlış olanları ise birer **karşı örnekle** çürütmeleri istenmektedir.

- I.** 3 ile kalansız bölünen her doğal sayı 9 ile de kalansız bölünür.
II. 10 ile kalansız bölünen her doğal sayı 5 ile de kalansız bölünür.
III. Hem 2 ile hem 3 ile kalansız bölünen her doğal sayı 6 ile de kalansız bölünür.
IV. 6 ile kalansız bölünen her doğal sayı 4 ile de kalansız bölünür.

- a) Dört iddianın her biri için "doğru" ya da "yanlış" kararınızı yazınız.
b) Yanlış bulduğunuz iddialar için birer karşı örnek veriniz ve karşı örneğinizin iddiayı neden çürüttüğünü açıklayınız.
c) Bir öğrenci "II. iddiaya 20, 30 ve 50 sayılarını denedim, hepsi tuttu; demek ki iddia doğru." diyor. Bir iddiayı çürütmek ile doğru olduğunu göstermek arasındaki farkı açıklayınız. II. iddia için örnek vermek yerine nasıl bir gerekçe yazılmalıdır?

- a) **I: YANLIŞ · II: DOĞRU · III: DOĞRU · IV: YANLIŞ**
- b)

I için karşı örnek: 12. Rakamları toplamı $1 + 2 = 3$ olduğu için 12 sayısı 3'e kalansız bölünür. Ancak 3 sayısı 9'un katı değildir; gerçekten $12 \div 9$ işleminde bölüm 1, kalan 3'tür. Yani "3'e bölünen her sayı" diyen iddia için bir istisna bulunmuştur; bu istisna iddiayı çürütür. (15, 21, 24 de olur.)

IV için karşı örnek: 18. 18 sayısı çifttir ve rakamları toplamı 9 olduğundan 3'e de bölünür; demek ki 6'ya kalansız bölünür ($18 \div 6 = 3$). Ancak son iki basamağı 18'dir ve 18 sayısı 4'ün katı değildir; $18 \div 4$ işleminde kalan 2'dir. (6, 30, 42 de olur.)

Not: Bir karşı örneğin işe yaraması için **iddianın koşulunu sağlaması** ama **sonucunu sağlamaması** gerekir. 18 sayısı tam bunu yapar: 6'ya bölünür, 4'e bölünmez.

- c) Bir iddia "her doğal sayı için" dediği için **sonsuz sayıda** durumu kapsar.
 - **Çürütmek için tek bir karşı örnek yeter:** Tek bir istisna bile "her" sözünü yıkar.
 - **Doğru olduğunu göstermek için örnek vermek yetmez:** 20, 30, 50 tuttu diye denenmemiş sayıların da tutacağını bilemeyiz. Doğruluk için **bütün sayıları birden kapsayan genel bir gerekçe** gerekir.

II. iddia için gerekçe: Bir sayı 10'a kalansız bölünüyorsa birler basamağı zorunlu olarak 0'dır. Birler basamağı 0 veya 5 olan her sayı 5'e kalansız bölünür; 0 da bu koşulu sağladığından bu sayı 5'e de bölünür. Bu gerekçe tek tek denemeye gerek bırakmaz, **10'a bölünen bütün sayılar için** geçerlidir.

✓ **Doğru Sonuç: a) I yanlış, II doğru, III doğru, IV yanlış b) I: 12 · IV: 18 c) Çürütmeye 1 karşı örnek yeter, doğrulamaya genel gerekçe gerekir**

- 12** Bir okulda sınıflar arası turnuva düzenlenecektir. Takımların hepsi **eşit sayıda** oyuncudan oluşacak, hiç oyuncu dışarıda kalmayacaktır. Ayrıca turnuva olabilmesi için **en az 2 takım** kurulmalı ve **her takımda en az 2 oyuncu** bulunmalıdır.

Kayıt için iki seçenek vardır: **36 öğrenci** ya da **37 öğrenci** alınacak.

a) Her iki seçenek için kaç farklı takım düzeni (takım sayısı ile takımdaki oyuncu sayısı) kurulabileceğini bulunuz. Düzenleri tek tek yazınız.

b) Turnuva düzenleyicisi hangi seçeneği tercih etmelidir? Kararınızı çarpan sayısıyla gerekçelendiriniz.

c) 36'nın çarpanları küçükten büyüğe sıralanıp baştan ve sondan eşleştirildiğinde bir çarpan eşsiz kalır. Bu çarpan hangisidir, neden eşsiz kalmıştır? Bu durumun 36'nın çarpan sayısı üzerindeki etkisini açıklayınız.

- a) Takım sayısı, öğrenci sayısının bir çarpanı** olmalıdır.

36 için çarpanlar: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36. "En az 2 takım" koşulu 1'i, "her takımda en az 2 oyuncu" koşulu 36'yı ($36 \text{ takım} \times 1 \text{ oyuncu}$) dışarıda bırakır. Kalan düzenler:

$2 \text{ takım} \times 18 \text{ oyuncu} \cdot 3 \text{ takım} \times 12 \text{ oyuncu} \cdot 4 \text{ takım} \times 9 \text{ oyuncu} \cdot 6 \text{ takım} \times 6 \text{ oyuncu} \cdot 9 \text{ takım} \times 4 \text{ oyuncu} \cdot 12 \text{ takım} \times 3 \text{ oyuncu} \cdot 18 \text{ takım} \times 2 \text{ oyuncu} \rightarrow \mathbf{7 \text{ farklı düzen.}}$

37 için çarpanlar yalnızca **1 ve 37**'dir (37'yi kalansız bölen başka sayı yoktur). Bu da ya 1 takım 37 oyuncu ya da 37 takım 1 oyuncu demektir; ikisi de koşulları sağlamaz $\rightarrow \mathbf{0 \text{ düzen}}$, turnuva kurulamaz.

- b) Düzenleyici 36 öğrenci** seçeneğini tercih etmelidir. Gerekçe: 36 sayısının **9 çarpanı** vardır, bu yüzden takım sayısı ve takım büyüklüğü için birçok seçenek sunar; salon, süre ya da branşa göre esnek davranılabilir. 37 sayısının ise yalnızca **2 çarpanı** (1 ve 37) vardır; eşit takımlara hiç bölünemez. Yani bir sayının çarpan sayısı, o sayının **eşit gruplara ayrılabilme esnekliğini** gösterir.
- c) 36'nın çarpanları sıralanıp eşleştirilirse:**

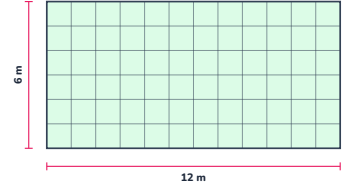
$$1 \times 36 = 36 \cdot 2 \times 18 = 36 \cdot 3 \times 12 = 36 \cdot 4 \times 9 = 36 \cdot \mathbf{6 \times 6 = 36}$$

Eşsiz kalan çarpan **6**'dır; çünkü **eşi kendisidir** ($6 \times 6 = 36$). Diğer çarpanlar ikişerli eşlenirken 6 bir tane olarak yazılır.

Etkisi: Çarpanlar ikişerli eşlendiği için çoğu sayının çarpan sayısı çifttir. Ortada eşsiz bir çarpan kaldığında ise çarpan sayısı **tek** olur: 36'nın çarpan sayısı **9**'dur (tek sayı). Bu durum, sayının bir doğal sayının kendisiyle çarpımı biçiminde yazılabildiği ($36 = 6 \times 6$) hâllerde ortaya çıkar. Örneğin $49 = 7 \times 7$ sayısının çarpanları 1, 7, 49 olup yine tek sayıdadır.

✓ Doğru Sonuç: a) 36 $\rightarrow$ 7 düzen, 37 $\rightarrow$ 0 düzen b) 36 (9 çarpan, esneklik) c) 6 eşsiz kalır ($6 \times 6 = 36$), çarpan sayısı tek olur

- 13** Bir serada, taban alanı 72 m^2 olan dikdörtgen biçiminde bir fidelik ayrılacaktır. Fidelinin kenar uzunlukları metre cinsinden **birer doğal sayı** olacak ve çevresi tel örgüyle çevrilecektir. Sera sorumlusunun hazırladığı ilk taslak şekilde verilmiştir.



a) Taslaktaki fidelik için kaç metre tel örgü gerekir? İşlemi yazınız.

b) Sorumlu, alanı değiştirmeden tel örgü miktarını daha da azaltabilir mi? Bütün kenar seçeneklerini inceleyerek en az kaç metre tel örgü yeteceğini bulunuz.

c) En kötü durumda, yani en fazla kaç metre tel örgü gerekebilir? Kenar uzunluklarını da yazınız.

d) Kenar uzunlukları arasındaki fark ile çevre arasındaki ilişkiyi kendi cümlelerinizle yazınız.

- a) Taslakta kenarlar 12 m ve 6 m'dir. Alan kontrolü:** $12 \times 6 = 72 \text{ m}^2 \checkmark$

Çevre = $12 + 6 + 12 + 6 = 2 \times (12 + 6) = 2 \times 18 = 36 \text{ m}$ tel örgü gerekir.

- b) Kenarların çarpımı 72 olmalıdır; yani kenarlar 72'nin **çarpan çiftleridir**. Bütün seçenekleri ve çevrelerini yazalım:**

$$1 \times 72 \rightarrow \text{çevre } 2 \times 73 = 146 \text{ m}$$

$$2 \times 36 \rightarrow \text{çevre } 2 \times 38 = 76 \text{ m}$$

$$3 \times 24 \rightarrow \text{çevre } 2 \times 27 = 54 \text{ m}$$

$$4 \times 18 \rightarrow \text{çevre } 2 \times 22 = 44 \text{ m}$$

$$6 \times 12 \rightarrow \text{çevre } 2 \times 18 = 36 \text{ m (taslak)}$$

$$8 \times 9 \rightarrow \text{çevre } 2 \times 17 = 34 \text{ m}$$

Evet, azaltabilir. En az tel örgü $8 \text{ m} \times 9 \text{ m}$ seçeneğinde gerekir: 34 m . Taslağa göre $36 - 34 = 2 \text{ m}$ tel örgüden tasarruf edilir.

- c) En fazla tel örgü, kenarların en uzak olduğu $1 \text{ m} \times 72 \text{ m}$ seçeneğinde gerekir:**

$$\text{Çevre} = 2 \times (1 + 72) = 2 \times 73 = 146 \text{ m}.$$

Bu fidelik 1 m genişliğinde, 72 m uzunluğunda çok ince bir şerit olurdu.

- d) Alan sabit kaldığında, kenar uzunlukları birbirine yaklaştıkça çevre küçülür; birbirinden uzaklaştıkça çevre büyür.**

Listede fark arttıkça çevrenin de arttığı görülür: 8 ile 9 arasındaki fark yalnızca 1'dir ve çevre en küçüktür (34 m); 1 ile 72 arasındaki fark 71'dir ve çevre en büyüktür (146 m). Bu yüzden en az malzeme için 72'nin **birbirine en yakın iki çarpanı** seçilmelidir.

✓ Doğru Sonuç: a) 36 m b) Evet; en az 34 m ($8 \text{ m} \times 9 \text{ m}$) c) En fazla 146 m ($1 \text{ m} \times 72 \text{ m}$) d) Kenarlar yaklaştıkça çevre küçülür

14 Bir matematik oyununda her oyuncuya üzerinde bir sayı yazılı kapalı bir kart verilir; kartın sayısı hakkında ipuçları okunur ve oyuncular sayıyı bulmaya çalışır. Bir kart için verilen ipuçları şunlardır:

1. **ipucu:** Sayı iki basamaklıdır.
2. **ipucu:** Sayı 4'ün bir katıdır.
3. **ipucu:** Sayı 48'in bir çarpanıdır.
4. **ipucu:** Sayının rakamları toplamı 3'ün katı değildir.

a) Karttaki sayı kaçtır? İpuçlarını sırayla kullanarak çözümünüzü yazınız.

b) 4. ipucu verilmeseydi kaç farklı cevap olurdu? Hepsini yazınız.

c) Bu dört ipucundan biri fazladandır: çıkarılsa da cevap değişmez. Hangisidir? İnceleyerek gösteriniz.

- a) **3. ipucu** en çok daraltan ipucudur; onunla başlayalım. 48'in çarpanları: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48.

1. **ipucu** (iki basamaklı) uygulanırsa: **12, 16, 24, 48**.

2. **ipucu** (4'ün katı) uygulanırsa: $12 = 4 \times 3 \checkmark$, $16 = 4 \times 4 \checkmark$, $24 = 4 \times 6 \checkmark$, $48 = 4 \times 12 \checkmark$ → dördü de kalır.

4. **ipucu** (rakamları toplamı 3'ün katı **değil**) uygulanırsa:

$12 \rightarrow 1 + 2 = 3 \rightarrow 3$ 'ün katı, **elenir**

$16 \rightarrow 1 + 6 = 7 \rightarrow 7$ 3'ün katı değil, **kalır**

$24 \rightarrow 2 + 4 = 6 \rightarrow 6$ 3'ün katı, **elenir**

$48 \rightarrow 4 + 8 = 12 \rightarrow 12$ 3'ün katı, **elenir**

Karttaki sayı **16**'dır.

- b) 4. ipucu olmasaydı ilk üç ipucunu sağlayan bütün sayılar cevap olurdu: **12, 16, 24 ve 48** → **4 farklı cevap**. Yani 4. ipucu, tek cevaba inmek için zorunludur.
- c) Fazladan olan **2. ipucudur** ("Sayı 4'ün bir katıdır.").

Gösterim: 2. ipucu çıkarılıp yalnızca 1., 3. ve 4. ipuçları kullanılsın. 48'in iki basamaklı çarpanları 12, 16, 24 ve 48'dir. Bunların rakam toplamaları sırasıyla 3, 7, 6 ve 12'dir; 3'ün katı olmayan tek toplam **7**'dir. Yani cevap yine tek başına **16** çıkar → 2. ipucu cevabı değiştirmiyor, **fazladandır**.

Diğer ipuçları neden çıkarılamaz?

— 1. ipucu çıkarılsa: 48'in çarpanları arasında 4'ün katı olup rakam toplamı 3'ün katı olmayanlar 4, 8 ve 16'dır → **3 cevap** olur, tek cevap kalmaz.

— 3. ipucu çıkarılsa: iki basamaklı, 4'ün katı ve rakam toplamı 3'ün katı olmayan pek çok sayı vardır (16, 20, 28, 32, 40, 44, ...) → cevap tek olmaz.

— 4. ipucu çıkarılsa: (b) şıkında görüldüğü gibi **4 cevap** olur.

devamı →

14 (çözümün devamı)

✓ Doğru Sonuç: a) 16 b) 4 cevap (12, 16, 24, 48) c) 2. ipucu fazladan

15 Önceki oyunun ardından öğrenciler **kendi sayı kartlarını** tasarlayacaktır. Her kart için verilen koşulları sağlayan bir sayı yazılacak ve kartın arkasına o sayının koşulları **nasıl sağladığı** not edilecektir. Dikkat: her maddede birden çok doğru cevap olabilir.

- a) Üç basamaklı, hem 4'e hem 9'a kalansız bölünen bir sayı yazınız. Her iki koşulu da nasıl sağladığını gösteriniz.
- b) Üç basamaklı, hem 2'ye hem 5'e kalansız bölünen ama 3'e kalansız bölünmeyen bir sayı yazınız. Sayınızı nasıl kurduğunuzu anlatınız.
- c) 10'a kalansız bölünen ama 4'e kalansız bölünmeyen bir sayı yazınız. Böyle bir sayının olabilmesi bize ne anlatır?
- d) Bir arkadaşınız 6'ya kalansız bölünen bir sayı kurmak istiyor ama hiç bölme işlemi yapmak istemiyor. Ona adım adım bir yönerge yazınız.

- a) Örnek: **396**. (144, 252, 468, 792, 936 gibi başka cevaplar da doğrudur.)
— **4 ile**: Son iki basamağı **96**'dır; $96 = 4 \times 24$ olduğu için 4'ün katıdır ✓
— **9 ile**: Rakamları toplamı $3 + 9 + 6 = 18$ 'dir; $18 = 9 \times 2$ olduğu için 9'un katıdır ✓
Kontrol: $396 \div 4 = 99$ ✓ ve $396 \div 9 = 44$ ✓
- b) Örnek: **110**. (140, 170, 200, 220, 250 gibi başka cevaplar da doğrudur.)
Kurma yöntemi: Hem 2'ye hem 5'e bölünmek için birler basamağı hem çift olmalı hem 0 ya da 5 olmalı; bu iki koşulu birlikte sağlayan tek rakam **0**'dır. Öyleyse sayı 0 ile bitecek. Sonra kalan rakamları, **rakamlar toplamı 3'ün katı olmayacak** şekilde seçeriz: $1 + 1 + 0 = 2$; 2 sayısı 3'ün katı değildir ✓
Kontrol: $110 \div 2 = 55$ ✓, $110 \div 5 = 22$ ✓, $110 \div 3$ işleminde kalan 2 → bölünmez ✓
- c) Örnek: **150**. (110, 130, 170, 190, 210, 230 gibi başka cevaplar da doğrudur.)
— **10 ile**: Birler basamağı 0'dır ✓
— **4 ile**: Son iki basamağı **50**'dir; $4 \times 12 = 48$ ve $4 \times 13 = 52$ olduğundan 50 sayısı 4'ün katı değildir × ($150 \div 4$ işleminde kalan 2'dir)
Bize anlattığı: 10'a bölünmek 4'e bölünmeyi **gerektirmez**. 10'a bölünen sayı mutlaka 2'ye bölünür ama 2'ye bölünmek 4'e bölünmek için yeterli değildir. Yani bölünebilme kriterleri birbirinin sonucu değildir; her biri ayrıca kontrol edilmelidir.
- d) Yönerge — **6'ya bölünen bir sayı kurmak**:
1. adım: 6'ya bölünebilmek için sayının hem 2'ye hem 3'e bölünmesi gerektiğini hatırla.

devamı →

15 (çözümün devamı)

2. adım: Sayının **birler basamağına çift bir rakam** yaz: 0, 2, 4, 6 veya 8. Böylece 2'ye bölünme koşulu sağlanır.

3. adım: Diğer basamaklara istediğin rakamları yaz, sonra **bütün rakamları topla**.

4. adım: Toplam 3'ün katı değilse, birler basamağını yine çift kalacak şekilde değiştirerek (örneğin 2 artırıp azaltarak) ya da başka bir basamağı değiştirerek toplamı 3'ün katına getir.

5. adım: Sağlama: birler basamağı çift ✓ ve rakamlar toplamı 3'ün katı ✓ ise sayı 6'ya kalansız bölünür — hiç bölme yapmadan emin olabilirsiniz.

Deneme: 5 3 _ kuralım. Birler basamağına 4 yazalım: 534. Rakam toplamı $5 + 3 + 4 = 12$; 12 sayısı 3'ün katı ✓ ve 4 çift ✓ → 534 sayısı 6'ya bölünür ($534 \div 6 = 89$).

✓ **Doğru Sonuç: a) örn. 396 b) örn. 110 c) örn. 150 (10'a bölünmek 4'e bölünmeyi gerektirmez) d) Birler çift + rakam toplamı 3'ün katı**