

KONU ANLATIMI · CEVAPLI

Çarpanlar, Katlar ve Bölünebilme Kriterleri

Kazanımlar: MAT.6.1.1. Karşılaştığı problem durumlarında bir doğal sayının çarpan ve katlarına yönelik muhakeme yapabilme · MAT.6.1.2. Bir doğal sayının 2, 3, 4, 5, 6, 9 ve 10 ile tam bölünebilme kriterlerine ilişkin çıkarım yapabilme

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge **CC BY-NC 4.0** lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabılır.

Bir Doğal Sayının Çarpanları

Bir doğal sayı, iki doğal sayının çarpımı biçiminde yazıldığında çarpımdaki **her bir sayıya** o doğal sayının **çarpanı** denir. Örneğin $24 = 3 \times 8$ yazıldığında 3 ve 8 sayıları 24'ün çarpanıdır.

Bir sayının çarpanlarını bulmak için sayıyı **1'den başlayarak** sırayla doğal sayılara böleriz. Bölme kalansız oluyorsa hem böldüğümüz sayı hem de bölüm birer çarpandır; yani çarpanlar **ikişerli** bulunur. Böylece hiçbir çarpan atlanmaz.

24 için: $24 = 1 \times 24 \rightarrow 1$ ve $24 \cdot 24 = 2 \times 12 \rightarrow 2$ ve $12 \cdot 24 = 3 \times 8 \rightarrow 3$ ve $8 \cdot 24 = 4 \times 6 \rightarrow 4$ ve 6. Sıradaki 5 sayısı 24'ü kalansız bölmez, 6'ya geldiğimizde ise eşi olan 4'ü zaten yazmıştık; demek ki liste tamamlanmıştır.
24'ün çarpanları: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 (8 çarpan).



Kenar uzunlukları 6 ve 4 birim olan dikdörtgende 24 birim kare vardır. Alanı 24 birim kare olan her dikdörtgenin kenar uzunlukları 24'ün bir çarpan çiftidir: $1 \times 24, 2 \times 12, 3 \times 8, 4 \times 6$.

Bir doğal sayıyı **kalansız bölen** sayılara o sayının **bölenleri** denir. Bir sayının çarpanları o sayıyı kalansız böldüğü için **bir doğal sayının çarpanları ile bölenleri aynı sayılardır**. "24'ün çarpanları" demekle "24'ün bölenleri" demek aynı anlama gelir.

Sıfırdan farklı her doğal sayı için şunlar her zaman geçerlidir:

- **En küçük çarpanı 1'dir**, çünkü her sayı $1 \times$ kendisi biçiminde yazılabilir.
- **En büyük çarpanı kendisidir**, çünkü bir sayıdan büyük hiçbir sayı onu kalansız bölemez.
- **Çarpanlarının sayısı sonludur**; çarpanlar 1 ile sayının kendisi arasında kalır.

ÖRNEK

40'ın çarpanları: $40 = 1 \times 40, 2 \times 20, 4 \times 10, 5 \times 8$. Buradan **1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40** elde edilir; 40'ın **8** çarpanı vardır. En küçüğü 1, en büyüğü 40'tır.

NOT

Bir sayının çarpanları küçükten büyüğe sıralandığında baştan ve sondan aynı sıradaki sayıların çarpımı o sayıya eşittir. 40 için: $1 \times 40 = 40$, $2 \times 20 = 40$, $4 \times 10 = 40$, $5 \times 8 = 40$. Bu kural, eksik bırakılmış bir çarpanı bulmak için kullanılır.

Sayı	Çarpan Çiftleri	Bütün Çarpanları	Çarpan Sayısı
18	1×18 , 2×9 , 3×6	1, 2, 3, 6, 9, 18	6
24	1×24 , 2×12 , 3×8 , 4×6	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24	8
36	1×36 , 2×18 , 3×12 , 4×9 , 6×6	1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36	9
48	1×48 , 2×24 , 3×16 , 4×12 , 6×8	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48	10

Tabloda 36 sayısının çarpan sayısının **tek** olduğuna dikkat ediniz. Bunun nedeni $36 = 6 \times 6$ eşitliğidir: 6 çarpanının **eşi kendisi** olduğu için liste yazılırken bir kez yazılır. Bir sayı bir doğal sayının kendisiyle çarpımı biçiminde yazılabiliyorsa çarpan sayısı tek, yazılamıyorsa çifttir.

NOT

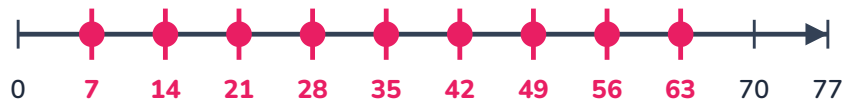
Sık yapılan iki hata: (1) Çarpan listesinde **1'i ve sayının kendisini** yazmayı atlamak. Oysa bunlar da birer çarpandır. **(2)** "Sayıdan küçük olan her sayı onun çarpanıdır" sanmak. 18 sayısı 60'tan küçüktür ama 60'ı kalansız bölmediği için 60'ın çarpanı **değildir**. Çarpan olmanın ölçütü küçüklük değil, **kalansız bölmektir**.

Bir Doğal Sayının Katları

Bir doğal sayının **sayma sayılarıyla** (1, 2, 3, ...) sırasıyla çarpılmasıyla elde edilen sayılara o doğal sayının **katları** denir.

ÖRNEK

7'nin katları: $7 \times 1 = 7$, $7 \times 2 = 14$, $7 \times 3 = 21$, $7 \times 4 = 28$, ... biçiminde ilerler. 7'nin 50'den küçük katları: **7, 14, 21, 28, 35, 42, 49**.



7'nin katları sayı doğrusunda eşit aralıklarla ilerler. Sağdaki ok, katların hiç bitmediğini gösterir.

Sayı doğrusunda görüldüğü gibi katlar **eşit aralıklarla** ilerler ve sağa doğru **hiç bitmez**. Bunun nedeni sayma sayılarının bitmemesidir. Buna karşılık çarpanlar sayının kendisini geçemez. Bu yüzden:

- Bir doğal sayının **katları sonsuz sayıdadır**.
- Sıfırdan farklı bir doğal sayının **çarpanları (bölenleri) sonlu sayıdadır**.

Bir doğal sayının **katlarının en küçüğü kendisidir** (sayı $\times$ 1). Aynı sayının **çarpanlarının en büyüğü de kendisidir**. Yani bir sayının en büyük çarpanı ile en küçük katı birbirine eşittir ve sayının kendisidir.

Çarpan ile kat, **aynı ilişkinin iki farklı yönüdür**. $84 = 7 \times 12$ eşitliğinde:

- 7 ve 12 sayıları **84'ün çarpanıdır**,
- 84 sayısı ise **7'nin ve 12'nin katıdır**.

Bu yüzden "a, b'nin çarpanıdır" demek ile "b, a'nın katıdır" demek tamamen aynı şeyi anlatır.

NOT

Sık yapılan hata: Çarpan ile katı **ters yönde** kullanmak. "84, 7'nin çarpanıdır" demek yanlıştır; 7'nin çarpanları yalnızca 1 ve 7'dir. Doğrusu "84, 7'nin **katıdır**"dır. Karıştırmamak için şunu hatırlayın: **kat büyük olan sayıdır, çarpan küçük olan sayıdır**.

2, 5 ve 10 ile Kalansız Bölünebilme

Bir doğal sayı, sıfırdan farklı bir doğal sayıya bölündüğünde **kalan sıfır** oluyorsa bu işleme **kalansız (tam) bölme** denir. Bölen sayı, bölünen sayının bir bölenidir.

2, 5 ve 10 ile bölünebilme yalnızca **birler basamağına** bakılarak anlaşılır:

- Birler basamağı **0, 2, 4, 6 veya 8** olan (yani **çift** olan) sayılar **2'ye** kalansız bölünür.
- Birler basamağı **0 veya 5** olan sayılar **5'e** kalansız bölünür.
- Birler basamağı **0** olan sayılar **10'a** kalansız bölünür.

ÖRNEK

2 ile: 96, 3 148 ve 70 002 çift olduğu için 2'ye bölünür; 4 375 tek olduğu için bölünmez.

5 ile: 145, 2 060 ve 38 495 sayıları 5'e bölünür; 1 222 bölünmez.

10 ile: 730 ve 51 400 sayıları 10'a bölünür; 6 205 sayısı 5'e bölünür ama birler basamağı 0 olmadığı için 10'a bölünmez.

Bu üç kriter arasında şöyle bir ilişki vardır: bir sayının hem 2'ye hem 5'e bölünmesi için birler basamağı aynı anda $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ **ve** $\{0, 5\}$ içinde olmalıdır. Bu iki koşulu birlikte sağlayan tek rakam **0**'dır. Bu yüzden **hem 2'ye hem 5'e kalansız bölünen bir sayı 10'a da kalansız bölünür**; tersi de doğrudur.

NOT

Sık yapılan hata: "5 ile bölünen her sayı 10 ile de bölünür" demek. Birler basamağı **5** olan sayılar 5'e bölünür ama 10'a bölünmez: 45, 175, 2 305 gibi. Kalansız bölünme için birler basamağının **tam olarak 0** olması gerekir.

3 ve 9 ile Kalansız Bölünebilme

3 ve 9 ile bölünebilmede birler basamağına değil, **rakamların toplamına** bakılır:

- Rakamları toplamı **3'ün katı** olan sayılar **3'e** kalansız bölünür.
- Rakamları toplamı **9'un katı** olan sayılar **9'a** kalansız bölünür.

Toplam hâlâ büyükse aynı işlem tekrarlanabilir: $4\ 986 \rightarrow 4 + 9 + 8 + 6 = 27 \rightarrow 2 + 7 = 9 \rightarrow 9$ 'un katı, yani $4\ 986$ sayısı 9 'a bölünür.

ÖRNEK

3 ile: $2\ 514 \rightarrow 2 + 5 + 1 + 4 = 12$; 12 sayısı 3'ün katı olduğu için $2\ 514$ sayısı 3'e bölünür.

9 ile: $6\ 309 \rightarrow 6 + 3 + 0 + 9 = 18$; $18 = 9 \times 2$ olduğu için $6\ 309$ sayısı 9'a bölünür.

Bölünmeyen: $7\ 220 \rightarrow 7 + 2 + 2 + 0 = 11$; 11 sayısı ne 3'ün ne 9'un katı olduğundan $7\ 220$ sayısı ikisine de bölünmez.

$9 = 3 \times 3$ olduğu için **9'un her katı aynı zamanda 3'ün de katıdır**. Bu yüzden **9'a kalansız bölünen her sayı 3'e de kalansız bölünür**. Bunun tersi ise doğru değildir: $2\ 514$ sayısı 3'e bölünür (rakam toplamı 12) ama 12 sayısı 9'un katı olmadığından 9'a bölünmez.

NOT

Sık yapılan hata: Rakamları toplamına bakıp doğru kararı verdikten sonra **hangi kural için baktığını karıştırmak**. 3 için toplamın 3'ün katı olması yeter; 9 için toplamın **9'un** katı olması şarttır. Rakam toplamı 12 veya 15 olan bir sayı 3'e bölünür ama 9'a bölünmez.

4 ve 6 ile Kalansız Bölünebilme

4 ile bölünebilme: Son iki basamağı **00** olan ya da son iki basamağı **4'ün katı** olan sayılar 4'e kalansız bölünür. Bütün sayıya değil, yalnızca **son iki basamağa** bakmak yeterlidir; çünkü yüzlükler, binlikler ve daha büyük basamaklar 4'e tam bölünür.

ÖRNEK

$132 \rightarrow$ son iki basamak **32**; $32 = 4 \times 8 \checkmark$ bölünür.

$1\ 350 \rightarrow$ son iki basamak **50**; $4 \times 12 = 48$ ve $4 \times 13 = 52$ olduğundan 50 sayısı 4'ün katı değil $\times$ bölünmez.

$9\ 700 \rightarrow$ son iki basamak **00** $\checkmark$ bölünür.

NOT

Sık yapılan hata: "Çift olan her sayı 4'e bölünür" demek. Çift olmak yalnızca **2'ye** bölünmeyi garanti eder. 218 sayısı çifttir ama son iki basamağı 18 olduğu için 4'e bölünmez. Buna karşılık 4'e bölünen her sayı mutlaka çifttir, çünkü $4 = 2 \times 2$ 'dir.

6 ile bölünebilme: Bir doğal sayı hem **2'ye** hem de **3'e** kalansız bölünüyorsa 6'ya da kalansız bölünür. İki koşulun da **aynı anda** sağlanması gerekir.

$354 \rightarrow$ çifttir $\checkmark$ ve $3 + 5 + 4 = 12$, 3'ün katı $\checkmark \rightarrow 6$ 'ya bölünür.

$51 \rightarrow 5 + 1 = 6$, 3'ün katı $\checkmark$ ama tek sayı $\times \rightarrow 6$ 'ya bölünmez.

$32 \rightarrow$ çifttir $\checkmark$ ama $3 + 2 = 5$, 3'ün katı değil $\times \rightarrow 6$ 'ya bölünmez.

Bölen	Nereye Bakılır?	Kriter	Örnek
2	Birler basamağı	0, 2, 4, 6 veya 8 olmalı	3 148 ✓
3	Rakamlar toplamı	Toplam 3'ün katı olmalı	2 514 → 12 ✓
4	Son iki basamak	00 ya da 4'ün katı olmalı	132 → 32 ✓
5	Birler basamağı	0 veya 5 olmalı	2 060 ✓
6	Birler basamağı + rakamlar toplamı	Hem 2'ye hem 3'e bölünmeli	354 ✓
9	Rakamlar toplamı	Toplam 9'un katı olmalı	6 309 → 18 ✓
10	Birler basamağı	0 olmalı	51 400 ✓

NOT

Sık yapılan hata: 6 ile bölünebilmeyi kontrol ederken **yalnızca bir koşula** bakmak. Öğrenciler sayı çift olduğu için hemen "6'ya bölünür" der. Oysa 32 çifttir ama 6'ya bölünmez. Ayrıca **9'a bölünmek 6'ya bölünmeyi gerektirmez:** 7 245 sayısı 9'a bölünür ama tek olduğu için 6'ya bölünmez.

Etkinlikler

ETKİNLİK 1

Aşağıdaki ifadelerden doğru olanların yanına "D", yanlış olanların yanına "Y" yazınız.

- a) ☒ D Bir doğal sayının en küçük çarpanı 1'dir.
- b) ☒ D Sıfırdan farklı bir doğal sayının en büyük çarpanı kendisidir.
- c) ☒ Y Bir doğal sayının katlarının en küçüğü 1'dir.
- d) ☒ D Bir doğal sayının çarpanları sonlu, katları sonsuz sayıdadır.
- e) ☒ D Bir doğal sayının çarpanları aynı zamanda o sayının bölenleridir.
- f) ☒ Y Çift olan her doğal sayı 4 ile kalansız bölünür.
- g) ☒ D 9 ile kalansız bölünen her doğal sayı 3 ile de kalansız bölünür.
- h) ☒ Y 3 ile kalansız bölünen her doğal sayı 9 ile de kalansız bölünür.
- ı) ☒ D Birler basamağı 0 olan bir doğal sayı hem 2'ye hem 5'e kalansız bölünür.
- i) ☒ Y 5 ile kalansız bölünen her doğal sayı 10 ile de kalansız bölünür.
- j) ☒ D Hem 2 hem 3 ile kalansız bölünen bir doğal sayı 6 ile de kalansız bölünür.
- k) ☒ Y 6 ile kalansız bölünen her doğal sayı 4 ile de kalansız bölünür.

ETKİNLİK 2

Aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri doldurunuz. Çarpanları küçükten büyüğe sıralayınız.

Sayı	Bütün Çarpanları	Çarpan Sayısı
18	1, 2, 3, 6, 9, 18	6
28	1, 2, 4, 7, 14, 28	6
40	1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40	8
49	1, 7, 49	3
64	1, 2, 4, 8, 16, 32, 64	7
100	1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100	9

ETKİNLİK 3

Aşağıdaki sayıların hangi sayılarla kalansız bölünebildiğini bölme işlemi yapmadan belirleyip tabloyu doldurunuz. Bölünüyorsa "✓", bölünmüyorsa "—" yazınız.

Sayı	2	3	4	5	6	9	10
144	✓	✓	✓	—	✓	✓	—
205	—	—	—	✓	—	—	—
378	✓	✓	—	—	✓	✓	—
1020	✓	✓	✓	✓	✓	—	✓
2475	—	✓	—	✓	—	✓	—

ETKİNLİK 4

Aşağıdaki soruları çözünüz.

- a)** 90'ın çarpanlarından 10'dan büyük, 30'dan küçük olanları yazınız. **90'ın çarpanları: 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90 → aradıklar: 15 ve 18**
- b)** 24'ün 100'den küçük bütün katlarını yazınız. **24, 48, 72, 96 ($24 \times 5 = 120 > 100$)**
- c)** Bir doğal sayının çarpanlarının en büyüğü 56 ise bu sayı kaçtır? Katlarının en küçüğü kaçtır? **Sayı 56'dır (en büyük çarpan sayının kendisidir). Katlarının en küçüğü de 56'dır.**
- d)** Üç basamaklı 4 7 □ doğal sayısı 9 ile kalansız bölünüyorsa □ kaçtır? **$4 + 7 + \square = 11 + \square \rightarrow 9$ 'un katı olmalı $\rightarrow 11 + 7 = 18 \rightarrow \square = 7$ (sayı 477)**
- e)** Dört basamaklı 6 3 □ 4 doğal sayısı 4 ile kalansız bölünüyorsa □ yerine hangi rakamlar yazılabilir? **Son iki basamak □4 sayısı 4'ün katı olmalı: 04, 24, 44, 64, 84 $\rightarrow \square = 0, 2, 4, 6$ veya 8**
- f)** 2 ile kalansız bölünen ama 4 ile kalansız bölünmeyen iki basamaklı bir sayı yazınız. **Örneğin 14 (çifttir; son iki basamak 14, 4'ün katı değil). 18, 22, 26, 30 da olur.**

devamı →

ETKİNLİK 4 Aşağıdaki soruları çözünüz. (devam)

- g) 5 ile kalansız bölünen ama 10 ile kalansız bölünmeyen bir sayı yazınız. **Birler basamağı 5 olan herhangi bir sayı, örneğin 45 ($45 \div 5 = 9$; 10'a bölünmez)**
- h) Bir doğal sayının çarpanları eşleştirildiğinde ortada eşsiz bir çarpan kalıyorsa bu sayı için ne söylenebilir? **O çarpanın kendisiyle çarpımı sayıyı verir (örn. $49 = 7 \times 7$) ve bu durumda sayının çarpan sayısı tektir.**

ETKİNLİK 5 Aşağıdaki koşulları sağlayan birer sayı yazıp seçiminizi bölünebilme kriterleriyle gerekçelendiriniz. Her maddede birden çok doğru cevap vardır.

- a) Üç basamaklı, hem 4'e hem 9'a kalansız bölünen bir sayı. **Örneğin 396: son iki basamak $96 = 4 \times 24$ ✓ ve rakam toplamı $18 = 9 \times 2$ ✓ (144, 252, 468, 936 da olur)**
- b) Üç basamaklı, 6'ya kalansız bölünen ama 9'a kalansız bölünmeyen bir sayı. **Örneğin 132: çift ✓ ve rakam toplamı 6, 3'ün katı ✓ → 6'ya bölünür; 6 sayısı 9'un katı olmadığı için 9'a bölünmez**
- c) 10'a kalansız bölünen ama 4'e kalansız bölünmeyen bir sayı. **Örneğin 150: birler basamağı 0 ✓ ama son iki basamak 50, 4'ün katı değil (110, 130, 170 da olur)**
- d) Hem 3'e hem 5'e kalansız bölünen ama 2'ye kalansız bölünmeyen bir sayı. **Örneğin 45: rakam toplamı 9, 3'ün katı ✓, birler basamağı 5 → 5'e bölünür ✓ ama tek olduğu için 2'ye bölünmez (75, 105, 135 de olur)**
- e) "3 ile kalansız bölünen her sayı 6 ile de kalansız bölünür." ifadesini çürüten bir karşı örnek. **Örneğin 21: rakam toplamı 3 olduğu için 3'e bölünür ama tek olduğu için 2'ye, dolayısıyla 6'ya bölünmez (9, 15, 27 de olur)**
- f) Çarpan sayısı tek olan iki basamaklı bir sayı. **Örneğin 36 (çarpanları 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 → 9 çarpan) ya da 49, 25, 16, 81**

Konu Özeti

ÖZET Bir doğal sayının **çarpanları**, onu kalansız bölen sayılardır; en küçüğü **1**, en büyüğü **sayının kendisidir** ve sayıları **sonludur**. Çarpanlar küçükten büyüğe sıralandığında baştan ve sondan eşleşen çarpanların çarpımı sayıyı verir. Bir sayının **katları** ise onun 1, 2, 3, ... ile çarpımlarıdır; en küçüğü **sayının kendisidir** ve sayıları **sonsuzdur**. "a, b'nin çarpanıdır" ile "b, a'nın katıdır" aynı ilişkinin iki yönüdür. **Bölünebilme kriterleri:** 2, 5 ve 10 için **birler basamağına**; 3 ve 9 için **rakamlar toplamına**; 4 için **son iki basamağa** bakılır. 6 için hem 2 hem 3 koşulu birlikte sağlanmalıdır. 9'a bölünen her sayı 3'e de bölünür, ancak tersi doğru değildir; aynı şekilde çift olmak 4'e bölünmeyi garanti etmez.