

ÇÖZÜMLER

Asal Sayılar ve Asal Çarpanlar

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge CC BY-NC 4.0 lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabılır.

1. Bölüm Soru 1-5

- 1 Bir tiyatro sahnesinde tavana 1'den 50'ye kadar numaralanmış 50 spot ışığı asılmıştır. Işık teknisyeni bir gösteri için şu talimatı almıştır: **yalnızca numarası asal sayı olan ışıklar yanacak.** Teknisyen, hangi ışıkları yakacağını şekildeki tabloyu kullanarak belirleyecektir.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

- a) Tabloda 2, 3, 5 ve 7'nin kendilerinden büyük katlarını eleyerek 1'den 50'ye kadar olan asal sayıları bulunuz. Kaç ışık yanar?
- b) Teknisyen neden yalnızca 2, 3, 5 ve 7'nin katlarını elemekle yetinebiliyor? Elemeye 11 ile devam etmesi gerekir mi? Gerekçenizi yazınız.
- c) 1 numaralı ışık yanar mı? Asal sayı tanımına dayanarak açıklayınız.

- a) Eleme sırayla yapılır:

- 2'nin katları (4, 6, 8, ..., 50) elenir; 2 kalır.
- 3'ün katları (9, 15, 21, 27, 33, 39, 45) elenir; 3 kalır.
- 5'in katları (25, 35) elenir; 5 kalır.
- 7'nin katları (49) elenir; 7 kalır.
- 1 elenir.

Geriye kalanlar: **2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47**

Yani **15 ışık** yanar.

- b) Elemeden sonra kalan ilk sayı **11**'dir. 11'in kendisinden büyük ilk katı **$11 \times 11 = 121$** 'dir ve $121 > 50$ 'dir. 11'in 50'den küçük diğer katları (22, 33, 44) ise zaten 2 ve 3 elenirken karalanmıştı.

Demek ki 11 ve ondan büyük asalların katları tabloda **yeni hiçbir sayı elemez**; teknisyenin 11 ile devam etmesi **gerekmez**. Genel kural: bir sayıya kadar eleme yaparken, **kendisiyle çarpımı o sayıyı geçen** ilk asala gelindiğinde iş bitmiştir.

- c) **1 numaralı ışık yanmaz.** Bir sayının asal olabilmesi için **tam olarak iki farklı çarpanı** (1 ve kendisi) olması gerekir. 1 sayısının ise yalnızca **tek bir** çarpanı vardır, o da 1'dir; çünkü "1 ve kendisi" burada aynı sayıdır. İki farklı çarpanı olmadığı için 1 asal sayı **değildir**.

✓ Doğru Sonuç: a) 15 ışık (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47) b) Gerekmez, $11 \times 11 = 121 > 50$ c) Yanmaz, 1'in tek çarpanı var

- 2** Bir spor salonunda dolapların kilit kodları iki basamaklı sayılardan oluşuyor. Salon yönetimi, kodun daha zor tahmin edilmesi için **yalnızca asal sayı olan kodları** kullanmaya karar verdi. Elde şu aday kodlar var:

51 • 57 • 67 • 87 • 91 • 97

- a) Bu kodları "asaldır" ve "asal değildir" diye ikiye ayırınız. Asal olmayanların her biri için 1 ve kendisi dışında bir çarpan gösteriniz.
 b) Öğrencilerin çoğu 91 sayısını asal sanır. Bu sayı 2'ye, 3'e ve 5'e bölünmediği hâlde neden asal değildir? Bulunuz.
 c) Bir sayının asal olduğuna karar vermeden önce hangi asal sayılara kadar deneme yapmak gerekir? 91 ve 97 üzerinden açıklayınız.

• a)

— **51: asal değil** → $5 + 1 = 6$, 3'ün katı olduğu için 51 sayısı 3'e bölünür: **$51 = 3 \times 17$**

— **57: asal değil** → $5 + 7 = 12$, 3'ün katı: **$57 = 3 \times 19$**

— **67: ASAL** → tek sayı (2'ye bölünmez), $6 + 7 = 13$ (3'e bölünmez), birler basamağı 7 (5'e bölünmez), $67 \div 7$ kalansız değil. $11 \times 11 = 121 > 67$ olduğundan denemeler burada biter ✓

— **87: asal değil** → $8 + 7 = 15$, 3'ün katı: **$87 = 3 \times 29$**

— **91: asal değil** → **$91 = 7 \times 13$**

— **97: ASAL** → tek, $9 + 7 = 16$ (3'e bölünmez), 5'e bölünmez, $97 \div 7$ kalansız değil. $11 \times 11 = 121 > 97$, denemeler biter ✓

Asal olanlar: 67 ve 97 · Asal olmayanlar: 51, 57, 87, 91

- **b)** 91 sayısı gerçekten 2'ye bölünmez (tek), 3'e bölünmez ($9 + 1 = 10$) ve 5'e bölünmez (birler basamağı 1). Fakat öğrenciler denemeyi burada bırakır. Sıradaki asal **7** denenirse: **$7 \times 13 = 91$** bulunur. Yani 91'in çarpanları 1, 7, 13 ve 91'dir; **dört** çarpanı olduğu için asal değildir. Hata, denemeyi **çok erken bırakmaktır**.
- **c)** Denemeler, **kendisiyle çarpımı o sayıyı geçen** ilk asal sayıya gelindiğinde biter.
- **91 için:** 2, 3, 5, 7 denenir. $7 \times 7 = 49 < 91$ olduğu için 7'yi denemek **zorunludur** — ve tam burada **$91 = 7 \times 13$** çıkar.
- **97 için:** 2, 3, 5, 7 denenir, hiçbirisi bölmez. Sıradaki asal 11'dir ama $11 \times 11 = 121 > 97$ 'dir. Eğer 97'nin 11'den büyük bir çarpanı olsaydı, eşi 11'den küçük olmak zorundaydı ve onu zaten yakalamış olurduk. Bu yüzden **97 asaldır**.

✓ **Doğru Sonuç: a) Asal: 67, 97 / Değil: $51 = 3 \times 17$, $57 = 3 \times 19$, $87 = 3 \times 29$, $91 = 7 \times 13$ b) 7 denenmeli, $91 = 7 \times 13$ c) Kendisiyle çarpımı sayıyı geçen ilk asala kadar**

- 3** Bir okulun şifreleme kulübünde öğrenciler, mesajları asal sayılar kullanarak şifreliyor. Kullanılacak asal sayılar üzerine üç öğrenci şöyle diyor:

Ayla: "1 sayısını da kullanabiliriz, çünkü 1 yalnızca 1'e ve kendisine bölünür."

Bora: "2 sayısını kullanamayız, çünkü çift sayılar asal olmaz."

Ceyda: "En küçük asal sayı 2'dir ve 2'den başka çift asal sayı yoktur."

- a) Her üç öğrenci için "doğru" ya da "yanlış" kararınızı verip asal sayı tanımına dayanarak gerekçelendiriniz.
- b) 2'den büyük bütün asal sayılar neden tek olmak zorundadır? Açıklayınız.
- c) Bir öğrenci b şıkkındaki sonucu tersine çevirip "Öyleyse tek olan her sayı asaldır." diyor. Bu ifade doğru mudur? İki karşı örnek veriniz.

• a)

— **Ayla: YANLIŞ.** Asal sayı, **tam olarak iki farklı** çarpanı olan sayıdır. 1 sayısının "1'i ile "kendisi" aynı sayı olduğu için 1'in **yalnızca bir** çarpanı vardır. İki farklı çarpanı olmadığından 1 asal **değildir**.

— **Bora: YANLIŞ.** 2 sayısının çarpanları **1 ve 2'dir**; tam olarak iki farklı çarpan. Öyleyse 2 bir **asal sayıdır**. Bora "çift sayılar asal olmaz" genellemesini yapmış, ama bu genelleme **2 için geçerli değildir**.

— **Ceyda: DOĞRU.** 2 gerçekten en küçük asal sayıdır (kendisinden küçük olan 1 asal değil, 0 ise hiç değil) ve 2'den başka çift asal yoktur.

- **b) 2'den büyük bir çift sayı düşünelim, örneğin 26.** Çift olduğu için **2'ye kalansız bölünür**. Bu durumda çarpanları arasında 1, 2 ve kendisi bulunur; yani **en az üç** çarpanı olur. Asal olmak için tam olarak iki çarpan gerektiğinden böyle bir sayı asal **olamaz**.

Bu yüzden 2'den büyük her asal sayı zorunlu olarak **tek**dir. (2'de bu sorun yaşanmaz, çünkü 2'nin "2'ye bölünmesi" ayrı bir çarpan üretmez: 2 zaten kendisidir.)

- **c) İfade yanlıştır.** "2'den büyük her asal tektir" demek, "her tek sayı asaldır" demek **değildir**; bu iki ifade ters yönlüdür.

Karşı örnek 1: 9 → tek bir sayıdır ama $9 = 3 \times 3$ olduğu için çarpanları 1, 3 ve 9'dur; üç çarpanı olduğundan asal değildir.

Karşı örnek 2: 15 → tek bir sayıdır ama $15 = 3 \times 5$ olduğu için çarpanları 1, 3, 5 ve 15'tir; asal değildir.

(21, 25, 27, 33 de olur.)

✓ **Doğru Sonuç: a) Ayla yanlış, Bora yanlış, Ceyda doğru b) Çift olsa 2'ye de bölünür, 3 çarpanı olur c) Yanlış; 9 ve 15**

- 4** Bir basketbol takımında forma numaraları **iki basamaklı asal sayılardan** seçilmektedir. Malzemeciye gelen kutuda numarası ■7 biçiminde olan formalar vardır; ■ bir rakamı göstermektedir.

- a) ■ yerine hangi rakamlar yazılabilir? Bütün rakamları tek tek deneyip eleyerek gösteriniz.
 b) Kaç farklı forma numarası kullanılabilir? Elenen numaraların her biri için 1 ve kendisi dışında bir çarpan yazınız.
 c) Malzemeci "■ yerine 0 da yazılabilir, numara 07 olur." diyor. Katılıyor musunuz? Gerekçelendiriniz.

- a) ■7 biçimindeki sayıları sırayla inceleyelim. Hepsi tek olduğu için 2'ye bölünmez; birler basamağı 7 olduğu için 5'e de bölünmez. Öyleyse 3 ve 7 ile bölünebilmeyi kontrol etmek yeterlidir:

— 17 → $1 + 7 = 8$ (3'e bölünmez), $17 \div 7$ kalansız değil → **ASAL ✓**

— 27 → $2 + 7 = 9$, 3'ün katı → **elenir**

— 37 → $3 + 7 = 10$, 7'ye bölünmez → **ASAL ✓**

— 47 → $4 + 7 = 11$, 7'ye bölünmez → **ASAL ✓**

— 57 → $5 + 7 = 12$, 3'ün katı → **elenir**

— 67 → $6 + 7 = 13$, 7'ye bölünmez → **ASAL ✓**

— 77 → $7 \times 11 = 77$ → **elenir**

— 87 → $8 + 7 = 15$, 3'ün katı → **elenir**

— 97 → $9 + 7 = 16$, 7'ye bölünmez → **ASAL ✓**

Buradan ■ ∈ {1, 3, 4, 6, 9} bulunur.

- b) 5 farklı forma numarası kullanılabilir: 17, 37, 47, 67, 97.

Elenenlerin çarpanları:

$$27 = 3 \times 9 \cdot 57 = 3 \times 19 \cdot 77 = 7 \times 11 \cdot 87 = 3 \times 29$$

- c) **Katılmıyorum.** ■ yerine 0 yazılırsa elde edilen sayı 07, yani 7'dir. 7 sayısı gerçekten asaldır **ama iki basamaklı değildir**; tek basamaklıdır. Forma numarasının iki basamaklı olması istendiğine göre 0 kullanılamaz. Bir sayının ilk basamağı 0 olamaz, çünkü o basamak sayıya hiçbir değer katmaz.

✓ **Doğru Sonuç: a) ■ = 1, 3, 4, 6, 9 b) 5 numara: 17, 37, 47, 67, 97 c) Hayır, 07 = 7 tek basamaklıdır**

- 5** Bir çiçekçi, vitrinine yerleştireceği **252 laleyi** eşit demetlere ayırmayı planlıyor. Demet büyüklüklerini kolayca görebilmek için önce sayıyı **asal çarpan algoritması** ile çözümlmeye karar veriyor.

a) 252 sayısını asal çarpan algoritmasıyla çözümlyip asal çarpanlarının çarpımı biçiminde yazınız. Bölme basamaklarını gösteriniz.

b) 252'nin birbirinden farklı asal çarpanları hangileridir, kaç tanedir?

c) Çiçekçi "Laleleri 5'erli demetler hâlinde de düzenleyebilirim." diyor. Katılıyor musunuz? Kararınızı a şıkında bulduğunuz çarpıma dayandırınız.

- a)** Algoritmada sayı, kendisini kalansız bölen **en küçük asal** sayıya bölünür ve bölüm 1 olana kadar devam edilir:

$$252 \div 2 = 126$$

$$126 \div 2 = 63$$

$$63 \div 3 = 21$$

$$21 \div 3 = 7$$

$$7 \div 7 = 1$$

Sağ sütunda kullanılan bölenler sırayla 2, 2, 3, 3, 7'dir. Öyleyse:

$$252 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7$$

$$\text{Kontrol: } 2 \times 2 = 4, 3 \times 3 = 9, 4 \times 9 = 36, 36 \times 7 = 252 \checkmark$$

- b)** Çarpımda 2 iki kez, 3 iki kez, 7 bir kez geçiyor. Birbirinden **farklı** asal çarpanlar: **2, 3 ve 7 → 3 tane.**

(Dikkat: çarpımda beş asal çarpan yazılıdır ama bunların yalnızca üçü birbirinden farklıdır.)

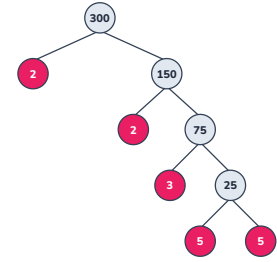
- c) Katılmıyorum.** 252'nin asal çarpanları 2, 3 ve 7'dir; **5 bu listede yok.** Bir sayı, asal çarpanları arasında bulunmayan bir asal sayıya kalansız bölünemez. Dolayısıyla 252 sayısı 5'e bölünmez.

Bölünebilme kriteriyle de görülür: 252'nin birler basamağı 2'dir, 0 veya 5 olmadığı için 5'e kalansız bölünmez. 5'erli demet yapılırsa 50 demet olur, **2 lale artar.**

✓ Doğru Sonuç: a) $252 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7$ b) 2, 3, 7 → 3 tane c) Hayır, 5 asal çarpanları arasında yok

2. Bölüm Soru 6–10

- 6** Bir oyuncak fabrikasında bir günde üretilen oyuncak sayısı, üretim panosuna **çarpan ağacı** ile çizilmiştir. Ağaçta **pembe** daireler asal çarpanları göstermektedir.



- a) Ağacın en alt sırasındaki asal çarpanları kullanarak üretilen oyuncak sayısını asal çarpanlarının çarpımı biçiminde yazınız.
- b) Bu sayının farklı asal çarpanlarının toplamı kaçtır? Bütün asal çarpanlarının toplamı kaçtır? İki sonucun neden farklı çıktığını açıklayınız.
- c) Fabrika, çarpımdaki bir 5'i çıkarıp yerine 7 koyarsa üretim sayısı kaç olur? İşlemi yazınız.

- a) Ağaç, 300 sayısından başlayıp her adımda bir asal çarpanı ayırarak ilerler:

$$300 \rightarrow 2 \text{ ve } 150 \cdot 150 \rightarrow 2 \text{ ve } 75 \cdot 75 \rightarrow 3 \text{ ve } 25 \cdot 25 \rightarrow 5 \text{ ve } 5$$

En altta kalan asal çarpanlar: 2, 2, 3, 5, 5. Öyleyse

$$300 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5$$

$$\text{Kontrol: } 4 \times 3 = 12, 12 \times 25 = 300 \checkmark$$

- b) — **Farklı** asal çarpanlar 2, 3 ve 5'tir: $2 + 3 + 5 = 10$.

— **Bütün** asal çarpanlar (tekrar edenler dâhil) 2, 2, 3, 5, 5'tir: $2 + 2 + 3 + 5 + 5 = 17$.

Neden farklı? Çarpımda 2 iki kez, 5 iki kez geçiyor. "Farklı asal çarpanlar" sorulduğunda tekrar edenler **bir kez** sayılır; "bütün asal çarpanlar" sorulduğunda **her biri kaç kez geçiyorsa o kadar** sayılır. Bu yüzden ikinci toplam, fazladan bir 2 ve bir 5 içerdiğinden 7 fazladır ($10 + 2 + 5 = 17$).

- c) Bir 5 çıkarılıp yerine 7 konursa çarpım şöyle olur:

$$2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$$

$$= 4 \times 3 \times 5 \times 7$$

$$= 12 \times 35$$

$$= 420$$

Yani üretim sayısı **420** olur. (300'den 120 fazla; çünkü 5 yerine 7 konması çarpımı $7 \div 5$ oranında büyütür.)

✓ Doğru Sonuç: a) $300 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5$ b) Farklı: 10, bütün: 17 (tekrar edenler) c) 420

- 7** Bir zeytinlikte fidanlar dikdörtgen düzende dikilecektir. Ziraat mühendisi not defterine dikilecek fidan sayısını **asal çarpanlarının çarpımı biçiminde** yazmıştır:

$$\text{Fidan sayısı} = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$$

- a) Kaç fidan dikilecektir? İşlemi yazınız.
 b) Bu sayının birbirinden farklı asal çarpanları hangileridir?
 c) Fidanlar 2'li, 3'lü, 5'li, 9'lu ve 10'lu sıralara artmadan dizilebilir mi? Hiç bölme işlemi yapmadan, yalnızca yukarıdaki çarpıma bakarak her biri için karar veriniz.
 d) Fidanlar 4'lü sıralara artmadan dizilebilir mi? Diğerlerinden farklı olan neyi fark ettiniz? Açıklayınız.

- **a)** $2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$
 $= 2 \times 9 \times 25$
 $= 18 \times 25$
 $= 450 \text{ fidan}$
- **b)** Çarpımda 2 bir kez, 3 iki kez, 5 iki kez geçer. Farklı asal çarpanlar: **2, 3 ve 5.**
- **c)** Bir sayının bir bölene tam bölünebilmesi için, o bölenin asal çarpanlarının **hepsi** sayının çarpımında **yeterli sayıda** bulunmalıdır.
 - **2'li:** çarpımda bir tane **2** var ✓ **dizilebilir** ($450 \div 2 = 225$ sıra)
 - **3'lü:** çarpımda **3** var ✓ **dizilebilir** (150 sıra)
 - **5'li:** çarpımda **5** var ✓ **dizilebilir** (90 sıra)
 - **9'lu:** $9 = 3 \times 3$ 'tür; çarpımda **iki tane 3** var ✓ **dizilebilir** (50 sıra)
 - **10'lu:** $10 = 2 \times 5$ 'tir; çarpımda hem **2** hem **5** var ✓ **dizilebilir** (45 sıra)
- **d)** **4'lü sıralara dizilemez.**
 $4 = 2 \times 2$ 'dir; yani 450'nin 4'e bölünebilmesi için çarpımında **iki tane 2** bulunması gerekir. Oysa çarpımda **yalnızca bir tane 2** vardır.
Fark edilen: Bir asal çarpanın çarpımda **bulunması** yetmez, **kaç kez** bulunduğu da önemlidir. 9 için iki tane 3 gerekiyordu ve vardı, bu yüzden oldu; 4 için iki tane 2 gerekiyordu ama bir tane vardı, bu yüzden olmadı. (Sağlama: $450 \div 4 = 112$ sıra, **2 fidan artar.**)

✓ **Doğru Sonuç:** a) 450 b) 2, 3, 5 c) 2'li, 3'lü, 5'li, 9'lu, 10'lu → **hepsi dizilebilir** d) 4'lü **dizilemez (tek bir 2 var)**

- 8** Bir fırında bir günde **360 ekmek** üretiliyor. Çırak, bu sayıyı asal çarpanlarına ayırmak için aşağıdaki çözümü yapmış:

$$360 \div 2 = 180$$

$$180 \div 2 = 90$$

$$90 \div 9 = 10$$

$$10 \div 2 = 5$$

$$5 \div 5 = 1$$

Çırağın yazdığı sonuç: $360 = 2 \times 2 \times 9 \times 2 \times 5$

- a) Çırağın çözümündeki hatayı bulup neden hata olduğunu açıklayınız.
 b) Doğru çözümü yapıp 360'ı asal çarpanlarının çarpımı biçiminde yazınız.
 c) Çırağın yazdığı çarpımın sonucunu hesaplayınız. Sonuç 360 çıkmasına rağmen cevabın neden yanlış sayıldığını açıklayınız.

- a) Hata **üçüncü satırdadır**: çırak bölen olarak **9** kullanmıştır. Asal çarpan algoritmasında bölen olarak **yalnızca asal sayılar** kullanılabilir. Oysa 9 asal değildir; çarpanları 1, 3 ve 9'dur ($9 = 3 \times 3$). Bu yüzden 9, aloritmada bölen olarak yazılamaz.
- b) Doğru çözümde her adımda sayıyı bölen **en küçük asal** seçilir:

$$360 \div 2 = 180$$

$$180 \div 2 = 90$$

$$90 \div 2 = 45$$

$$45 \div 3 = 15$$

$$15 \div 3 = 5$$

$$5 \div 5 = 1$$

$$360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$$

$$\text{Kontrol: } 8 \times 9 = 72, 72 \times 5 = 360 \checkmark$$

- c) Çırağın çarpımı: $2 \times 2 \times 9 \times 2 \times 5 = 4 \times 9 \times 10 = 360$.

Yani sonuç **doğru çıkıyor** — çarpım gerçekten 360'a eşit. Ama sorulan şey "360'a eşit herhangi bir çarpım" değil, **asal çarpanlarının çarpımıdır**. Çarpımda yer alan **9 asal olmadığı** için bu bir asal çarpan çözümlemesi sayılmaz.

Düzeltilmek için 9'un yerine **3 × 3** yazmak yeterlidir:

$$2 \times 2 \times (3 \times 3) \times 2 \times 5 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \checkmark \text{ Bu, b şıkkındaki doğru cevapla aynıdır.}$$

Ders: Bir sayı birden çok biçimde çarpım olarak yazılabilir, ama asal çarpanlara ayrılışı **tek** bir biçimdedir.

✓ Doğru Sonuç: a) Bölen olarak 9 kullanılmış, 9 asal değil b) $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$ c) Çarpım 360 ama çarpanlar asal değil

- 9** Bir müzede sergi kartları **1'den 40'a** kadar numaralanmıştır. Görevliden, numarası asal sayı olan kartları ayrı bir vitrine koymasını istenmiştir. Görevlinin ayırdığı kart numaraları şunlardır:

1 · 2 · 3 · 5 · 7 · 9 · 11 · 13 · 17 · 21 · 23 · 29 · 31 · 37

- a) Listeye yanlışlıkla eklenmiş numaraları bulunuz ve her biri için neden asal olmadığını gösteriniz.
b) Görevli asal bir numarayı atlamış mıdır? Kontrol edip yazınız.
c) Doğru listeyi yazınız. 40'tan küçük kaç asal sayı vardır?
d) Görevlinin yanlışlıkla eklediği 9 ve 21 sayılarının ortak özelliği nedir? Görevli hangi yanılgıya düşmüş olabilir? Açıklayınız.

- a) Listede fazladan **üç** numara var:

— **1** → Asal sayının tam olarak iki farklı çarpanı olmalıdır. 1'in yalnızca bir çarpanı vardır (1), bu yüzden asal değildir.

— **9** → **9 = 3 × 3**. Çarpanları 1, 3 ve 9'dur; üç çarpanı olduğu için asal değildir.

— **21** → **21 = 3 × 7**. Çarpanları 1, 3, 7 ve 21'dir; asal değildir. (Rakamları toplamı $2 + 1 = 3$ olduğundan 3'e bölündüğü hemen görülür.)

- b) **Evet, 19 sayısını atlamıştır.** 19 tektir (2'ye bölünmez), $1 + 9 = 10$ (3'e bölünmez), birler basamağı 9 (5'e bölünmez) ve $19 \div 7$ kalansız değildir. $5 \times 5 = 25 > 19$ olduğundan denemeler biter: **19 asaldır** ve vitrine girmesi gerekir.

- c) Doğru liste:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37

40'tan küçük **12** asal sayı vardır.

- d) **Ortak özellik:** 9 ve 21 sayılarının ikisi de **tek** sayıdır ve ikisi de **3'ün katıdır**.

Yanılgı: Görevli büyük olasılıkla **"tek sayı olan her sayı asaldır"** diye düşünmüştür. Oysa tek olmak yalnızca 2'ye bölünmediğini gösterir; sayı 3, 5, 7 gibi başka asallara bölünüyor olabilir. 9 ve 21 tam olarak bu durumdadır. Asallık kararı verirken 2'den sonra **3, 5, 7...** denemeleri de yapılmalıdır.

✓ **Doğru Sonuç: a) Fazladan: 1, 9 = 3×3, 21 = 3×7 b) 19 atlanmış c) 12 asal sayı d) İkisi de tek ve 3'ün katı; "tek sayı asaldır" yanılgısı**

10 Bir satranç turnuvasına toplam **40 oyuncu** katılmıştır. Oyuncular **iki salona** yerleştirilecektir ve turnuva kuralı gereği **her salondaki oyuncu sayısı bir asal sayı** olmalıdır. (Salonlar birbirinden ayırt edilmez; 3 ile 37 dağılımı ile 37 ile 3 dağılımı aynı sayılır.)

- a) Toplamı 40 olan bütün asal sayı çiftlerini bulunuz. Sistemli deneyerek gösteriniz.
 b) Bulduğunuz çiftlerin hepsinde iki sayı da tek çıktı. Çiftlerden birinde asal sayı 2 olabilir miydi? İnceleyip açıklayınız.
 c) İki farklı asal sayının toplamı tek bir sayı olabilir mi? Olabiliyorsa hangi durumda? Gerekçenizi yazınız.

- a) Asal sayıları küçükten başlayarak deneyip eşini kontrol edelim ($eş = 40 - \text{asal}$):

$$2 \rightarrow 38; 38 = 2 \times 19 \text{ asal değil } \times$$

$$3 \rightarrow 37; 37 \text{ asal } \checkmark \text{ ÇİFT BULUNDU}$$

$$5 \rightarrow 35; 35 = 5 \times 7 \times$$

$$7 \rightarrow 33; 33 = 3 \times 11 \times$$

$$11 \rightarrow 29; 29 \text{ asal } \checkmark \text{ ÇİFT BULUNDU}$$

$$13 \rightarrow 27; 27 = 3 \times 9 \times$$

$$17 \rightarrow 23; 23 \text{ asal } \checkmark \text{ ÇİFT BULUNDU}$$

$$19 \rightarrow 21; 21 = 3 \times 7 \times$$

Bundan sonra eşler tekrar etmeye başlar ($23 \rightarrow 17$ zaten yazıldı), demek ki arama bitmiştir.

Çiftler: **(3, 37) · (11, 29) · (17, 23) → 3 farklı dağılım**

- b) **Olamazdı.** Bir salonda 2 oyuncu olsaydı diğer salonda $40 - 2 = 38$ oyuncu olurdu. 38 sayısı çifttir ve 2'den büyüktür, yani 2'ye kalansız bölünür: $38 = 2 \times 19$. Üç çarpanından fazlası olduğu için 38 asal **değildir**. Kural sağlanmadığından bu dağılım kullanılamaz.
- c) **Evet, olabilir — ama yalnızca asallardan biri 2 ise.**

Gerekçe: 2'den büyük bütün asal sayılar **tektir**. İki tek sayının toplamı ise her zaman **çifttir** (örneğin $3 + 37 = 40$, $11 + 29 = 40$). Toplamın tek çıkması için toplananlardan birinin **çift** olması gerekir. Çift olan tek asal sayı **2** olduğundan, tek toplam ancak 2'nin kullanıldığı çiftlerde elde edilir.

$$\text{Örnekler: } 2 + 3 = 5 \text{ (tek)} \cdot 2 + 5 = 7 \text{ (tek)} \cdot 2 + 11 = 13 \text{ (tek)}$$

Sonuç: "İki asal sayının toplamı her zaman çifttir" ifadesi **yanlıştır**; $2 + 3 = 5$ bunu çürütür.

✓ Doğru Sonuç: a) (3, 37), (11, 29), (17, 23) b) Olamaz, 38 asal değil c) Evet, biri 2 ise (örn. $2 + 5 = 7$)

3. Bölüm Soru 11–15

- 11** Bir laboratuvarında incelenen numune sayısı asal çarpanlarına ayrılmış, ancak kâğıdın bir kısmı ıslandığı için üç değer okunamıyor. Solda bölümler, sağda bölenler yazılıdır:

$$\blacksquare \div 2 = 198$$

$$198 \div 2 = 99$$

$$99 \div \blacktriangle = 33$$

$$33 \div 3 = 11$$

$$11 \div \bullet = 1$$

- a) $\blacksquare$, $\blacktriangle$ ve $\bullet$ değerleri kaçtır? Her birini nasıl bulduğunuzu adım adım yazınız.
 b) Numune sayısını asal çarpanlarının çarpımı biçiminde yazıp sağlamasını yapınız.
 c) Bu sayının farklı asal çarpanları hangileridir? En büyük asal çarpanı kaçtır?

- a)

$\blacktriangle$ için: $99 \div \blacktriangle = 33$ olduğuna göre $\blacktriangle = 99 \div 33 = 3$. (3 asaldır ✓)

$\bullet$ için: $11 \div \bullet = 1$ olduğuna göre $\bullet = 11$. Algoritma bölüm 1 olunca bittiği için son bölen, kalan sayının kendisidir; 11 de asaldır ✓

$\blacksquare$ için: $\blacksquare \div 2 = 198$ olduğuna göre ters işlem yapılır: $\blacksquare = 198 \times 2 = 396$.

Yani laboratuvarında **396 numune** incelenmiştir.

- b) Sağ sütundaki bölenler sırayla 2, 2, 3, 3, 11'dir:

$$396 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 11$$

$$\text{Sağlama: } 2 \times 2 = 4, 3 \times 3 = 9, 4 \times 9 = 36, 36 \times 11 = 396 \checkmark$$

(Bütün bölenlerin asal olduğu da kontrol edilmelidir: 2 ✓, 3 ✓, 11 ✓)

- c) Çarpımda 2 iki kez, 3 iki kez, 11 bir kez geçiyor.

Farklı asal çarpanlar: 2, 3 ve 11 (3 tane)

En büyük asal çarpan: 11

✓ Doğru Sonuç: a) $\blacksquare = 396$, $\blacktriangle = 3$, $\bullet = 11$ b) $396 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 11$ c) 2, 3, 11; en büyüğü 11

- 12** Bir tohum bankasında **273 tohum** bulunmaktadır. Görevli tohumları kaplara bölüştürecektir; her kaba **273'ün en büyük asal çarpanı** kadar tohum konacak ve hiç tohum artmayacaktır.

- a) **273 sayısını asal çarpanlarına ayırıp en büyük asal çarpanını bulunuz.**
b) Her kaba bu kadar tohum konursa kaç kap gerekir? İşlemi yazınız.
c) Görevli "En büyük asal çarpan yerine en küçükünü kullansaydım daha az kap gerekirdi." diyor. Katılıyor musunuz? Hesap yaparak karar veriniz ve aradaki ilişkiyi kendi cümlelerinizle açıklayınız.

- **a)** 273 tek bir sayıdır, 2'ye bölünmez. Rakamları toplamı $2 + 7 + 3 = 12$ olduğundan 3'e bölünür:

$$273 \div 3 = 91$$

$$91 \div 7 = 13$$

$$13 \div 13 = 1$$

$$273 = 3 \times 7 \times 13$$

$$\text{Kontrol: } 3 \times 7 = 21, 21 \times 13 = 273 \checkmark$$

Asal çarpanlar 3, 7 ve 13'tür → **en büyük asal çarpan: 13**

- **b)** Her kaba 13 tohum konursa:

$$273 \div 13 = 21 \text{ kap gerekir.}$$

(Sağlama: $21 \times 13 = 273 \checkmark$ hiç tohum artmaz.)

- **c) Katılmıyorum.** En küçük asal çarpan **3**'tür. Her kaba 3 tohum konursa:

$$273 \div 3 = 91 \text{ kap gerekir.}$$

$91 > 21$ olduğuna göre daha **az** değil, çok daha **fazla** kap gerekir. Görevli yanılıyor.

İlişki: Toplam tohum sayısı sabit olduğu için **kap başına düşen tohum azalır**sa **kap sayısı artar**, çoğalır

sa **kap sayısı azalır**. Bu iki sayı birbirinin eşi olan çarpanlardır ve çarpımları her zaman 273'e eşittir: $13 \times 21 = 273$ ve $3 \times 91 = 273$. Yani en az kap için **en büyük** çarpan seçilmelidir.

✓ **Doğru Sonuç: a) $273 = 3 \times 7 \times 13$, en büyüğü 13 b) 21 kap c) Katılmıyorum; 3 ile 91 kap gerekir (ters ilişki)**

- 13** Bir tarla sulama sisteminde iki farklı vana tipi vardır ve her tipin debisi **birer asal sayı** ile gösterilmektedir: ▲ ve ■. Mühendisin planında şu bilgi yazılıdır:

$$\blacktriangle \times \blacktriangle \times \blacksquare = 63$$

- a) ▲ ve ■ kaçtır? 63'ü asal çarpanlarına ayırarak bulunuz ve başka bir çözüm olmadığını gösteriniz.
 b) ▲ × ■ × ■ kaçtır? İşlemi yazınız.
 c) ▲ × ▲ × ▲ × ■ kaçtır?
 d) 63'ün bütün çarpanlarını yazınız. Kaç çarpanı vardır?

- a) Önce 63'ü asal çarpanlarına ayıralım:

$$63 \div 3 = 21 \cdot 21 \div 3 = 7 \cdot 7 \div 7 = 1$$

$$63 = 3 \times 3 \times 7$$

Çarpımda üç asal çarpan var ve **ikisi aynı** (3 ve 3), biri farklı (7). Verilen eşitlikte de ▲ iki kez, ■ bir kez geçiyor. Öyleyse iki kez geçen ▲ = 3, bir kez geçen ■ = 7'dir.

Başka çözüm var mı? ▲ = 7 denenirse $7 \times 7 \times \blacksquare = 49 \times \blacksquare = 63$ olur; ■ = $63 \div 49$ bir doğal sayı değildir. Başka bir asal (2, 5, 11...) denenirse 63 tek ve 3 ile 7'den başka asal çarpanı olmadığı için hiç uymaz. Demek ki çözüm **tektir**.

- b) ▲ × ■ × ■ = $3 \times 7 \times 7$

$$= 3 \times 49$$

$$= 147$$

- c) ▲ × ▲ × ▲ × ■ = $3 \times 3 \times 3 \times 7$

$$= 27 \times 7$$

$$= 189$$

- d) 63'ün çarpanlarını çiftler hâlinde bulalım:

$$63 = 1 \times 63 \rightarrow 1 \text{ ve } 63$$

$$63 = 3 \times 21 \rightarrow 3 \text{ ve } 21$$

$$63 = 7 \times 9 \rightarrow 7 \text{ ve } 9$$

(5 sayısı 63'ü bölmez; 9'a gelindiğinde eşi olan 7 zaten yazıldığı için liste tamamlanmıştır.)

Çarpanları: **1, 3, 7, 9, 21, 63** → **6 çarpan**

Dikkat: 63'ün **asal** çarpanları yalnızca 3 ve 7'dir; 9, 21 ve 63 de çarpandır ama asal değildir.

✓ Doğru Sonuç: a) ▲ = 3, ■ = 7 b) 147 c) 189 d) 1, 3, 7, 9, 21, 63 → 6 çarpan

- 14** Bir pul koleksiyoncusu özel bir albüm hazırlıyor. Albüme yalnızca şu **iki koşulu birlikte** sağlayan iki basamaklı pulları koyacak:
- Pulun numarası **asal sayı** olacak.
 - Pulun numarasının **rakamları toplamı da asal sayı** olacak.

Elindeki pullar: **21 · 23 · 25 · 29 · 31 · 37 · 53 · 61**

- a) Hangi pullar albüme girer? Her pul için iki koşulu ayrı ayrı kontrol ederek yazınız.
 b) 31 ve 37 pulları asal olmalarına rağmen neden albüme girmedi? Açıklayınız.
 c) Koleksiyoncu "Bir sayı asalsa rakamları toplamı da asal olmak zorundadır." diyor. Bu ifadeyi elindeki pullardan karşı örneklerle çürütünüz.
 d) Rakamları toplamı 3'ün katı olan iki basamaklı bir sayı asal olabilir mi? Gerekçelendiriniz.

- a) Her pul için iki koşulu sırayla kontrol edelim:
 - **21** → $21 = 3 \times 7$, **asal değil** × (ikinci koşula bakmaya gerek yok)
 - **23** → asal ✓ · $2 + 3 = 5$, 5 asal ✓ → **ALBÜME GİRER**
 - **25** → $25 = 5 \times 5$, **asal değil** ×
 - **29** → asal ✓ · $2 + 9 = 11$, 11 asal ✓ → **ALBÜME GİRER**
 - **31** → asal ✓ · $3 + 1 = 4$, $4 = 2 \times 2$ asal değil ×
 - **37** → asal ✓ · $3 + 7 = 10$, $10 = 2 \times 5$ asal değil ×
 - **53** → asal ✓ · $5 + 3 = 8$, $8 = 2 \times 4$ asal değil ×
 - **61** → asal ✓ · $6 + 1 = 7$, 7 asal ✓ → **ALBÜME GİRER**

Albüme girenler: 23, 29 ve 61

- b) 31 sayısı da 37 sayısı da **birinci koşulu sağlar**, ikisi de asaldır. Ancak **ikinci koşulda** elenmişlerdir:
 - 31'in rakamları toplamı 4'tür; 4 sayısının çarpanları 1, 2 ve 4 olduğu için asal değildir.
 - 37'nin rakamları toplamı 10'dur; $10 = 2 \times 5$ olduğu için asal değildir.

İki koşul **birlikte** istendiği için yalnızca birini sağlamak yetmez.

- c) İfade **yanlıştır**; elimizdeki pullar arasında **üç** karşı örnek vardır:
 - **31**: asal, ama rakamları toplamı 4 (asal değil)
 - **37**: asal, ama rakamları toplamı 10 (asal değil)
 - **53**: asal, ama rakamları toplamı 8 (asal değil)

Bu sayılardan herhangi biri, "zorundadır" diyen iddiayı tek başına çürütmeye yeter. Bir sayının asallığı **bütün sayıya**, rakamlar toplamının asallığı ise **başka bir sayıya** bakar; aralarında böyle bir zorunluluk yoktur.

devamı →

14 (çözümün devamı)

- **d) Olamaz.** Rakamları toplamı 3'ün katı olan bir sayı, bölünebilme kriteri gereği **3'e kalansız bölünür**. Bu durumda sayının çarpanları arasında 1, 3 ve kendisi bulunur; yani **en az üç** çarpanı olur ve asal olamaz.

(Tek istisna 3 sayısının kendisidir: rakam toplamı 3'tür ve 3 asaldır. Ancak 3 tek basamaklı olduğu için "iki basamaklı" koşulunu sağlamaz. Örnek: 21, 24, 39, 51, 57, 93 — hepsi 3'e bölünür, hiçbirisi asal değildir.)

✓ **Doğru Sonuç: a) 23, 29, 61 b) Rakam toplamı 4 ve 10, asal değil c) 31, 37, 53 d) Olamaz, 3'e bölünür**

- 15** Öğrenciler okul gazetesinin **matematik köşesi** için kendi soru kartlarını hazırlayacak. Her madde için koşulları sağlayan bir sayı bulup, kartın arkasına o sayının koşulları **nasıl sağladığını** yazacaklar. Dikkat: her maddede birden çok doğru cevap vardır.

- a) Asal çarpanlarının çarpımı biçiminde yazılışı tam olarak üç asal çarpandan oluşan (aynı asal tekrar edebilir) iki basamaklı bir sayı yazınız. Çözümlemesini gösteriniz.**
b) Farklı asal çarpanları yalnızca 2 ve 3 olan üç basamaklı bir sayı yazınız.
c) Bütün asal çarpanlarının toplamı 12 olan bir sayı yazınız (tekrar eden asal çarpanlar ayrı ayrı sayılır).
d) Bir arkadaşınız "1'den büyük her doğal sayı ya asaldır ya da asal çarpanlarının çarpımı biçiminde yazılabilir." cümlesini anlamadı. Ona biri asal, biri asal olmayan iki örnekle bu cümleyi açıklayan kısa bir metin yazınız.

- **a) Örnek: 30**

$$30 \div 2 = 15 \cdot 15 \div 3 = 5 \cdot 5 \div 5 = 1 \rightarrow \mathbf{30 = 2 \times 3 \times 5}$$

Çarpımda tam olarak **üç** asal çarpan var ✓ ve 30 iki basamaklı ✓

(Başka doğru cevaplar: 12 = 2×2×3, 18 = 2×3×3, 20 = 2×2×5, 27 = 3×3×3, 28 = 2×2×7, 45 = 3×3×5, 50 = 2×5×5, 63 = 3×3×7, 75 = 3×5×5, 98 = 2×7×7, 99 = 3×3×11)

- **b) Örnek: 108**

$$108 \div 2 = 54 \cdot 54 \div 2 = 27 \cdot 27 \div 3 = 9 \cdot 9 \div 3 = 3 \cdot 3 \div 3 = 1 \rightarrow \mathbf{108 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3}$$

Farklı asal çarpanları yalnızca **2 ve 3**'tür ✓ ve 108 üç basamaklı ✓

Nasıl kurulur: Yalnızca 2'ler ve 3'ler çarpılır, başka asal kullanılmaz; sonuç üç basamaklı olana kadar çarpan eklenir. (Başka doğru cevaplar: 144, 192, 216, 288, 324, 432, 486, 576, 648, 864, 972)

- **c) Örnek: 60**

$$\mathbf{60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5} \rightarrow \text{asal çarpanların toplamı: } 2 + 2 + 3 + 5 = \mathbf{12} \checkmark$$

Nasıl kurulur: Toplamı 12 veren asal sayılar seçilir, sonra çarpılır. Başka doğru cevaplar:

devamı →

15 (çözümün devamı)

$$— 5 + 7 = 12 \rightarrow 5 \times 7 = \mathbf{35}$$

$$— 2 + 3 + 7 = 12 \rightarrow 2 \times 3 \times 7 = \mathbf{42}$$

$$— 2 + 5 + 5 = 12 \rightarrow 2 \times 5 \times 5 = \mathbf{50}$$

$$— 2 + 2 + 2 + 3 + 3 = 12 \rightarrow 8 \times 9 = \mathbf{72}$$

$$— 3 + 3 + 3 + 3 = 12 \rightarrow \mathbf{81}$$

- **d)** Örnek metin:

"1'den büyük bir sayı aldığında iki şeyden biri olur. Sayı **asalsa** onu daha küçük çarpanlara ayıramazsın; çünkü asal sayının 1 ve kendisinden başka çarpanı yoktur. Örneğin **23** asaldır: 23'ü iki küçük doğal sayının çarpımı olarak yazmaya çalışırsan yalnızca 1×23 bulursun, başka yol yoktur. Yani asal sayılar zaten 'parçalanamaz' yapı taşlarıdır.

Sayı **asal değilse** mutlaka daha küçük çarpanlara ayrılır ve bu ayırmaya devam ettikçe sonunda elinde **yalnızca asal sayılar** kalır. Örneğin **84** asal değildir: $84 \div 2 = 42$, $42 \div 2 = 21$, $21 \div 3 = 7$, $7 \div 7 = 1 \rightarrow \mathbf{84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7}$. Görüldüğü gibi 84, asal sayıların çarpımı biçiminde yazıldı.

Kısacası asal sayılar sayıların yapı taşlarıdır: bir sayı ya bir yapı taşının kendisidir ya da yapı taşlarından kurulmuştur. Üstelik bu kuruluş **tek** bir biçimdedir — 84 için $2 \times 2 \times 3 \times 7$ dışında başka bir asal çarpan çarpımı bulamazsın."

✓ **Doğru Sonuç:** a) örn. $30 = 2 \times 3 \times 5$ b) örn. $108 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$ c) örn. $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$
d) Asallar sayıların yapı taşlarıdır (23 ve 84 örnekleri)