

KONU ANLATIMLI SORU ÇÖZÜMLERİ

Asal Sayılar ve Asal Çarpanlar

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge CC BY-NC 4.0 lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabılır.

ÇÖZÜMLÜ SORU 1 Bir sayının asal olup olmadığına karar verme

Bir kütüphanede raflar numaralanacaktır. Görevli 119 ve 127 numaralı rafların numaralarının asal olup olmadığını merak ediyor. Bu iki sayıyı inceleyip karar veriniz.

1 Nereye kadar deneyeceğini belirle

Sırayla 2, 3, 5, 7, 11, ... asalları denenir. Kendisiyle çarpımı sayıyı geçen ilk asala gelindiğinde iş biter. $11 \times 11 = 121$ ve $13 \times 13 = 169$ 'dur; iki sayımız da 121 ile 169 arasında ya da altında olduğu için 11'e kadar denemek yeterlidir.

2 119 sayısını incele

- 2 ile: 119 tek, bölünmez ×
- 3 ile: $1 + 1 + 9 = 11$, 3'ün katı değil ×
- 5 ile: birler basamağı 9 ×
- 7 ile: $7 \times 17 = 119$ ✓ **BÖLÜNDÜ**

Bir çarpan bulunduğu için işlem burada biter.

3 127 sayısını incele

- 2 ile: tek ×
- 3 ile: $1 + 2 + 7 = 10$ ×
- 5 ile: birler basamağı 7 ×
- 7 ile: $7 \times 18 = 126$, $7 \times 19 = 133 \rightarrow 127$ atlanır ×
- 11 ile: $11 \times 11 = 121$, $11 \times 12 = 132 \rightarrow$ atlanır ×

Sıradaki asal 13'tür ama $13 \times 13 = 169 > 127$. Denemeler bitti, hiçbiri bölmedi.

4 Kararı ver ve kontrol et

119 asal değildir ($119 = 7 \times 17$; çarpanları 1, 7, 17, 119).

127 asaldır (çarpanları yalnızca 1 ve 127).

Kontrol: $7 \times 17 = 119$ ✓ ve 127 için bulunan hiçbir çarpan yok ✓

Sonuç: 119 asal değildir ($119 = 7 \times 17$); 127 asaldır.

Dikkat: Bir sayı 2'ye, 3'e ve 5'e bölünmüyor diye hemen "asal" demeyin. 7 ve 11 denemeleri en çok atlanan adımlardır; 49, 77, 91, 119, 133 gibi sayılar tam burada yakalanır.

ÇÖZÜMLÜ SORU 2 **Asal çarpan algoritmasıyla çözümleme**

Bir depoda 588 kutu bulunmaktadır. Depo sorumlusu kutuları eşit gruplara ayırma seçeneklerini görmek için 588 sayısını asal çarpanlarına ayıracaktır. 588'i asal çarpanlarının çarpımı biçiminde yazınız ve farklı asal çarpanlarını belirtiniz.

1 En küçük asal ile başla

588 çifttir, 2'ye bölünür:

$$588 \div 2 = 294$$

294 de çifttir:

$$294 \div 2 = 147$$

2 2 ile bölünmüyorsa sıradaki asala geç

147 tektir, artık 2'ye bölünmez. 3'ü deneyelim: $1 + 4 + 7 = 12$, 3'ün katı ✓

$$147 \div 3 = 49$$

3 Devam et, bölüm 1 olana kadar

49 sayısı 3'e bölünmez ($4 + 9 = 13$), 5'e bölünmez. 7'yi deneyelim:

$$49 \div 7 = 7$$

$7 \div 7 = 1 \rightarrow$ bölüm 1 oldu, işlem bitti.

4 Çarpımı yaz

Kullanılan bölenler sırayla 2, 2, 3, 7, 7'dir:

$$588 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7$$

Farklı asal çarpanları: **2, 3 ve 7** $\rightarrow$ 3 tane.

5 Sağlamasını yap

$$2 \times 2 = 4, 7 \times 7 = 49, 4 \times 3 = 12, 12 \times 49 = 588 \checkmark$$

Ayrıca bütün bölenlerin asal olduğu kontrol edilir: 2 ✓, 3 ✓, 7 ✓

Sonuç: $588 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7$; farklı asal çarpanları 2, 3 ve 7'dir.

Dikkat: Bir asal artık bölmüyorsa **geri dönmeyin**, sıradaki asala geçin. Ayrıca aynı asalı **bölebildiği sürece** kullanmaya devam edin; 588'de 2'yi bir kez kullanıp 3'e geçmek eksik çözümleme olurdu.

ÇÖZÜMLÜ SORU 3 Asal çarpan çarpımından bölünebilmeye karar verme

Bir fidanlıkta dikilecek fide sayısı $2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$ biçiminde yazılmıştır. Fide sayısını bulunuz. Bu fideler 4'lü, 6'lı, 8'li ve 35'li sıralara artmadan dizilebilir mi?

1 Sayıyı hesapla

$$2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 4 \times 3 \times 35 = 12 \times 35 = 420 \text{ fide}$$

2 Kuralı yaz

Bölenin asal çarpanlarının **hepsi**, sayının çarpımında **yeterli sayıda** bulunmalıdır. Çarpımda 2 iki kez, 3 bir kez, 5 bir kez, 7 bir kez var.

3 4'lü ve 6'lı sıraları incele

- $4 = 2 \times 2 \rightarrow$ çarpımda iki tane 2 var ✓ **dizilebilir** ($420 \div 4 = 105$ sıra)
- $6 = 2 \times 3 \rightarrow$ çarpımda hem 2 hem 3 var ✓ **dizilebilir** (70 sıra)

4 8'li ve 35'li sıraları incele

- $8 = 2 \times 2 \times 2 \rightarrow$ üç tane 2 gerekir, çarpımda **iki** tane var $\times$ **dizilemez**
- $35 = 5 \times 7 \rightarrow$ çarpımda hem 5 hem 7 var ✓ **dizilebilir** (12 sıra)

5 Kontrol et

Tek şüpheli olan 8'i bölerek sağlayalım: $420 \div 8$ işleminde bölüm 52, **kalan 4**'tür ✓ Gerçekten bölünmüyor. Diğerleri: $105 \times 4 = 420$ ✓, $70 \times 6 = 420$ ✓, $12 \times 35 = 420$ ✓

Sonuç: 420 fide vardır; 4'lü, 6'lı ve 35'li sıralara dizilebilir, 8'li sıralara dizilemez.

Dikkat: Böleni önce **kendi asal çarpanlarına** ayırın, sonra saymaya geçin. 8 için "çarpımda 2 var, olur" demek en sık yapılan hatadır; 8 üç tane 2 ister.

ÇÖZÜMLÜ SORU 4 Sembolle verilen asal çarpanları bulma

▲ ve ■ birbirinden farklı iki asal sayıdır ve $\triangle \times \blacksquare \times \blacksquare = 45$ 'tir. Buna göre ▲ ve ■ kaçtır? $\triangle \times \triangle \times \blacksquare$ kaçtır?

1 Verilen sayıyı asal çarpanlarına ayır

$$45 \div 3 = 15 \cdot 15 \div 3 = 5 \cdot 5 \div 5 = 1$$

$$45 = 3 \times 3 \times 5$$

2 Tekrar sayılarını eşleştir

Verilen eşitlikte ▲ **bir** kez, ■ **iki** kez geçiyor. Çarpımda ise 3 iki kez, 5 bir kez geçiyor.

İki kez geçen $\rightarrow \blacksquare = 3$

Bir kez geçen $\rightarrow \triangle = 5$

3 Başka çözüm olmadığını göster

$$\triangle = 3 \text{ ve } \blacksquare = 5 \text{ denenirse: } 3 \times 5 \times 5 = 75 \neq 45 \times$$

45'in 3 ve 5'ten başka asal çarpanı olmadığı için başka bir seçenek kalmaz. Çözüm tektir.

devamı $\rightarrow$

ÇÖZÜMLÜ SORU 4 Sembolle verilen asal çarpanları bulma (devam)**4 İstenen çarpımı hesapla ve kontrol et**

$$\blacktriangle \times \blacktriangle \times \blacksquare = 5 \times 5 \times 3 = 25 \times 3 = 75$$

Kontrol: verilen eşitlik $\blacktriangle \times \blacksquare \times \blacksquare = 5 \times 3 \times 3 = 5 \times 9 = 45$ ✓ Değerler doğru.

Sonuç: $\blacktriangle = 5$ ve $\blacksquare = 3$ 'tür; $\blacktriangle \times \blacktriangle \times \blacksquare = 75$ 'tir.

Dikkat: Hangi sembolün hangi asala karşılık geldiğini kaç kez tekrar ettiğine bakarak bulun. Sembolleri rastgele eşleştirmek en sık yapılan hatadır; mutlaka verilen eşitlikte sağlama yapın.