

KONU ANLATIMI · CEVAPLI

Asal Sayılar ve Asal Çarpanlar

Kazanımlar: MAT.6.1.3. Bir doğal sayının asal olma durumunu ve asal çarpanlarını çözümleyebilme

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge **CC BY-NC 4.0** lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabılır.

Asal Sayılar

Tam olarak iki farklı doğal sayı çarpanı olan sayılara asal sayı denir. Bir asal sayının çarpanları yalnızca 1 ve kendisidir.

ÖRNEK

17 sayısını kalansız bölen sayıları arayalım: 2, 3, 4, ... denemelerinin hiçbiri kalansız bölmez. Yalnızca **1** ve **17** böler. İki farklı çarpanı olduğu için **17 asaldır**. **15** sayısı ise 1, 3, 5 ve 15 ile bölünür. **Dört** çarpanı olduğundan asal **değildir**.

Tanımdaki "**tam olarak iki farklı**" ifadesi iki özel durumu birden açıklar:

- **1 asal değildir.** 1'in "1"i ile "kendisi" aynı sayı olduğu için 1'in yalnızca **tek bir** çarpanı vardır.
- **2 asaldır** ve en küçük asal sayıdır. Çarpanları 1 ve 2'dir; tam olarak iki farklı çarpan.

2'den başka çift asal sayı yoktur. Çünkü 2'den büyük bir çift sayı 2'ye de kalansız bölünür; bu durumda çarpanları arasında 1, 2 ve kendisi bulunur, yani **en az üç** çarpanı olur ve asal olamaz. Bu yüzden **2'den büyük bütün asal sayılar tektir**.

NOT

Sık yapılan hata: Yukarıdaki cümleyi **ters çevirmek**. "2'den büyük her asal tektir" doğrudur; ama "tek olan her sayı asaldır" **yanlıştır**. Karşı örnekler: $9 = 3 \times 3$, $15 = 3 \times 5$, $21 = 3 \times 7$, $25 = 5 \times 5$. Hepsi tektir, hiçbiri asal değildir.

Eratosthenes Kalburu

Belirli bir sayıya kadar olan asal sayıları bulmanın en pratik yolu **Eratosthenes Kalburu**'dur. Yöntem, asal olmayanları eleyip geriye asalları bırakır:

- 1. adım:** 1 sayısı asal olmadığı için karalanır.
- 2. adım:** 2 yuvarlak içine alınır, **2'nin 2'den büyük bütün katları** karalanır.
- 3. adım:** Karalanmamış sıradaki sayı olan 3 yuvarlak içine alınır, **3'ün katları** karalanır.
- 4. adım:** Aynı işlem 5 ve 7 için sürdürülür.
- 5. adım:** Geriye kalan bütün sayılar asaldır.

Tabloda **100'den küçük 25 asal sayı** olduğu görülür:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

Bunlardan ilk dördü (2, 3, 5, 7) **tek basamaklı** asallardır. İki basamaklı en küçük asal **11**, en büyük asal **97**'dir.

Eratosthenes Kalburu — 1'den 100'e kadar asal sayılar

2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29
31	32	33	34	35	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49
51	52	53	54	55	56	57	58	59
61	62	63	64	65	66	67	68	69
71	72	73	74	75	76	77	78	79
81	82	83	84	85	86	87	88	89
91	92	93	94	95	96	97	98	99

Eratosthenes Kalburu ile 1'den 100'e kadar olan asal sayılar. Yuvarlak içine alınanlar asal, üzeri çizilenler elenen sayılardır. 1'den 100'e kadar 25 asal sayı vardır.

Kalburda **neden 7'den sonra durulur?** Elemeden sonra kalan ilk sayı 11'dir ve $11 \times 11 = 121 > 100$ 'dür. 11'in 100'den küçük katları (22, 33, 44, ...) 2 ve 3 elenirken zaten karalanmıştı. Genel kural: bir sayıya kadar eleme yapılırken, **kendisiyle çarpımı o sayıyı geçen ilk asala** gelindiğinde iş bitmiştir.

Aynı kural **tek bir sayının** asal olup olmadığını test etmek için de kullanılır. Sayıyı sırayla 2, 3, 5, 7, 11, ... asallarına bölmeyi deneriz; **kendisiyle çarpımı sayıyı geçen** ilk asala gelindiğinde hiçbir bölmediyse sayı asaldır.

97 için: $2 \times, 3 \times, 5 \times, 7 \times$. Sıradaki asal 11'dir ama $11 \times 11 = 121 > 97$. Öyleyse **97 asaldır**.

91 için: $2 \times, 3 \times, 5 \times$, ama $7 \times 13 = 91$ ✓. Öyleyse **91 asal değildir**.

Sayı	Çarpanları	Çarpan Sayısı	Asal mı?
1	1	1	Hayır (iki farklı çarpanı yok)
2	1, 2	2	Evet (tek çift asal)
9	1, 3, 9	3	Hayır ($9 = 3 \times 3$)
29	1, 29	2	Evet
51	1, 3, 17, 51	4	Hayır ($51 = 3 \times 17$)
91	1, 7, 13, 91	4	Hayır ($91 = 7 \times 13$)
97	1, 97	2	Evet

NOT

Sık yapılan hata: Asallık testini **çok erken bırakmak**. 51, 87 ve 91 gibi sayılar 2'ye bölünmediği için hemen "asal" sanılır. Oysa 51 ve 87 sayılarının rakamları toplamı 3'ün katıdır (3'e bölünürler); 91 ise 7'ye bölünür. Bir sayıyı asal ilan etmeden önce **en az 2, 3, 5 ve 7** denenmelidir.

Asal Çarpanlar

Bir doğal sayının çarpanlarından **asal sayı olanlara** o sayının **asal çarpanı** denir.

ÖRNEK

18'in çarpanları: 1, 2, 3, 6, 9, 18. Bunlardan asal olanlar **2 ve 3'tür**. Öyleyse 18'in asal çarpanları 2 ve 3'tür. (1 asal değildir; 6, 9 ve 18 de asal değildir.)

1'den büyük her doğal sayı ya asaldır ya da **asal çarpanlarının çarpımı** biçiminde yazılabilir. Üstelik bu yazılış **tek** bir biçimdedir: çarpanların sırası değişse de hangi asalın kaç kez kullanıldığı hep aynıdır. Bu yüzden asal sayılara sayıların **yapı taşları** denir.

Bir sayıyı asal çarpanlarına ayırmanın iki yöntemi vardır.

1) Asal çarpan algoritması. Sayı yazılır, sağına dikey bir çizgi çizilir. Sayıyı kalansız bölen **en küçük asal** sağa, bölüm alta yazılır. Bölüm 1 olana kadar devam edilir. Sağ sütundaki bütün sayılar asal çarpanlardır.

60 için:

$$60 \div 2 = 30$$

$$30 \div 2 = 15$$

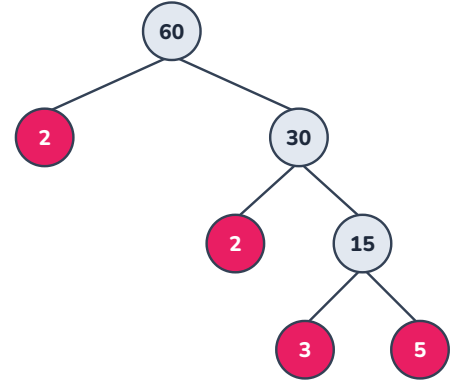
$$15 \div 3 = 5$$

$$5 \div 5 = 1$$

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

2) Çarpan ağacı. Sayı en üste yazılır, altına iki çarpanı yazılır. Asal olan çarpanın altı boş bırakılır; asal olmayan çarpan yeniden iki çarpana ayrılır. En altta yalnızca asal sayılar kalınca işlem biter.

İki yöntem **aynı sonucu** verir: $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$. Ağaçta hangi çarpan çiftinden başlarsanız başlayın ($60 = 2 \times 30$ ya da $60 = 6 \times 10$) en altta hep aynı asal çarpanlar kalır. Bu, asal çarpanlara ayırmanın **tek** biçimde olmasının sonucudur.



60 sayısının çarpan ağacı. Pembe daireler asal çarpanları gösterir. En altta kalan asal çarpanlar çarpılırsa 60 elde edilir: $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$.

Sayı	Asal Çarpanlarının Çarpımı	Farklı Asal Çarpanları	Farklı Asal Çarpan Sayısı
20	$2 \times 2 \times 5$	2 ve 5	2
42	$2 \times 3 \times 7$	2, 3 ve 7	3
81	$3 \times 3 \times 3 \times 3$	3	1
125	$5 \times 5 \times 5$	5	1
150	$2 \times 3 \times 5 \times 5$	2, 3 ve 5	3
300	$2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5$	2, 3 ve 5	3

NOT

Sık yapılan iki hata: (1) Algoritmada bölen olarak **asal olmayan** bir sayı kullanmak. "90 ÷ 9 = 10" yazmak hatalıdır; 9 asal değildir, yerine iki kez 3 kullanılmalıdır. Çarpımın sonucu doğru çıksa bile cevap asal çarpan çözümlemesi sayılmaz. **(2)** "Farklı asal çarpan sayısı" ile "çarpımdaki asal çarpan sayısı"nı karıştırmak. $300 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5$ çarpımında **beş** asal çarpan yazılıdır ama bunların yalnızca **üçü** birbirinden farklıdır (2, 3, 5).

Asal Çarpanlarla Bölünebilme ve Dikdörtgen Modeli

Bir sayının asal çarpan çarpımı elinizdeyse, o sayının **hangi sayılara tam bölündüğünü** bölme yapmadan görebilirsiniz. Kural şudur: bölenin asal çarpanlarının **hepsi**, sayının çarpımında **yeterli sayıda** bulunmalıdır.

$450 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$ için:

- **9'a bölünür mü?** $9 = 3 \times 3$; çarpımda **iki tane 3** var ✓ bölünür
- **10'a bölünür mü?** $10 = 2 \times 5$; çarpımda hem 2 hem 5 var ✓ bölünür
- **4'e bölünür mü?** $4 = 2 \times 2$; çarpımda **yalnızca bir tane 2** var × bölünmez

Görüldüğü gibi bir asal çarpanın çarpımda bulunması yetmez, **kaç kez** bulunduğu da önemlidir.

Asal çarpanlar **dikdörtgen modeliyle** de düşünülebilir. Alanı verilen ve kenar uzunlukları birer doğal sayı olan dikdörtgenin kenarları, alanın bir **çarpan çiftidir**. Kenarların ikisinin de asal olması isteniyorsa, alanın **tam olarak iki asalın çarpımı** biçiminde yazılabilmesi gerekir.



Alanı 21 birim kare olan dikdörtgen. $21 = 3 \times 7$ olduğundan kenar uzunluklarının ikisi de asaldır.

NOT

Sık yapılan hata: Alanı asal olan bir dikdörtgende "kenarların ikisi de asal olsun" istemek. Alan asalsa (örneğin 23) tek çarpan çifti 1×23 'tür ve 1 asal değildir. Böyle bir dikdörtgen **çizilemez**. Kenarların ikisinin de asal olabilmesi için alan, iki asalın çarpımı olmalıdır: $6 = 2 \times 3$, $10 = 2 \times 5$, $21 = 3 \times 7$, $35 = 5 \times 7$ gibi.

Etkinlikler

ETKİNLİK 1

Aşağıdaki ifadelerden doğru olanların yanına "D", yanlış olanların yanına "Y" yazınız.

- a) ☒ Y En küçük asal sayı 1'dir.
- b) ☒ D Asal sayıların tam olarak iki farklı çarpanı vardır.
- c) ☒ D Çift olan yalnızca bir tane asal sayı vardır.
- d) ☒ Y Tek olan her doğal sayı asaldır.
- e) ☒ D Bir basamaklı asal sayılar dört tanedir.
- f) ☒ Y İki asal sayının toplamı her zaman çift bir doğal sayıdır.
- g) ☒ Y 91 sayısı asaldır.
- h) ☒ D Bir doğal sayının asal çarpanları, o sayının çarpanları arasından asal olanlardır.
- ı) ☒ Y Asal çarpan algoritmasında bölen olarak asal olmayan sayılar da kullanılabilir.
- i) ☒ D Bir sayının asal çarpanlarına ayrılışı tek bir biçimdedir.
- j) ☒ D Bir asal sayının asal çarpanı yalnızca kendisidir.
- k) ☒ D 1'den büyük her doğal sayı ya asaldır ya da asal çarpanlarının çarpımı biçiminde yazılabilir.

ETKİNLİK 2 Aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri doldurunuz.

Sayı	Asal Çarpanlarının Çarpımı	Farklı Asal Çarpanları	En Büyük Asal Çarpanı
24	$2 \times 2 \times 2 \times 3$	2 ve 3	3
45	$3 \times 3 \times 5$	3 ve 5	5
70	$2 \times 5 \times 7$	2, 5 ve 7	7
100	$2 \times 2 \times 5 \times 5$	2 ve 5	5
132	$2 \times 2 \times 3 \times 11$	2, 3 ve 11	11
189	$3 \times 3 \times 3 \times 7$	3 ve 7	7
286	$2 \times 11 \times 13$	2, 11 ve 13	13

ETKİNLİK 3 Aşağıdaki sayıların asal olup olmadığını belirleyiniz. Asal değilse 1 ve kendisi dışında bir çarpanını yazınız.

- a) 39 **Asal değil** $\rightarrow 3 + 9 = 12$, 3'e bölünür: $39 = 3 \times 13$
- b) 43 **ASAL** $\rightarrow$ tek (2 bölmez), $4 + 3 = 7$ (3 bölmez), birler basamağı 3 (5 bölmez), $7 \times 6 = 42$ ve $7 \times 7 = 49$ (7 bölmez). $7 \times 7 = 49 > 43$ olduğundan denemeler biter.
- c) 49 **Asal değil** $\rightarrow 49 = 7 \times 7$
- d) 59 **ASAL** $\rightarrow$ 2, 3, 5, 7 bölmez; $11 \times 11 = 121 > 59$, denemeler biter
- e) 77 **Asal değil** $\rightarrow 77 = 7 \times 11$
- f) 81 **Asal değil** $\rightarrow 8 + 1 = 9$, 9'a bölünür: $81 = 3 \times 27$
- g) 83 **ASAL** $\rightarrow$ 2, 3, 5, 7 bölmez; $11 \times 11 = 121 > 83$, denemeler biter
- h) 111 **Asal değil** $\rightarrow 1 + 1 + 1 = 3$, 3'e bölünür: $111 = 3 \times 37$
- i) 133 **Asal değil** $\rightarrow 133 = 7 \times 19$
- j) 143 **Asal değil** $\rightarrow 143 = 11 \times 13$

ETKİNLİK 4 Aşağıdaki soruları çözünüz.

- a) 20 ile 40 arasındaki (20 ve 40 hariç) asal sayıları yazınız. Kaç tanedir? **23, 29, 31, 37 $\rightarrow$ 4 tane**
- b) 50 ile 60 arasındaki asal sayıların toplamı kaçtır? **53 ve 59 asaldır $\rightarrow 53 + 59 = 112$**
- c) İki basamaklı en küçük ve en büyük asal sayılar hangileridir? **En küçük 11, en büyük 97**
- d) İki basamaklı 6■ sayısı asal olduğuna göre ■ yerine hangi rakamlar yazılabilir? **61 ✓, 67 ✓ asal; 60, 62, 64, 66, 68 çift, 63 ve 69 3'e bölünür, 65 5'e bölünür $\rightarrow$ ■ = 1 veya 7**
- e) Toplamı 24 olan bütün asal sayı çiftlerini yazınız. **5 + 19, 7 + 17, 11 + 13 $\rightarrow$ üç çift (2 + 22, 3 + 21, 13 + 11 tekrarı elenir)**
- f) 126 sayısının bütün asal çarpanlarının toplamı kaçtır? **126 = $2 \times 3 \times 3 \times 7 \rightarrow 2 + 3 + 3 + 7 = 15$**

devamı $\rightarrow$

ETKİNLİK 4 Aşağıdaki soruları çözünüz. (devam)

- g) 126 sayısının farklı asal çarpanlarının toplamı kaçtır? f şikkından neden farklı çıktı? $2 + 3 + 7 = 12$. Farklı çıktı çünkü 3 çarpımda iki kez geçiyor; burada bir kez sayıldı.
- h) Asal çarpanlarının çarpımı biçiminde yazılışı $2 \times 3 \times 3 \times 5$ olan sayı kaçtır? $2 \times 9 \times 5 = 90$
- i) Santimetre cinsinden kenar uzunluklarının ikisi de asal sayı ve alanı 33 cm^2 olan bir dikdörtgenin kenar uzunlukları kaçtır? $33 = 3 \times 11$; ikisi de asal $\rightarrow$ kenarlar 3 cm ve 11 cm
- j) Alanı 23 cm^2 olan ve kenar uzunluklarının ikisi de asal olan bir dikdörtgen çizilebilir mi? Çizilemez. 23 asaldır, tek çarpan çifti 1×23 'tür ve 1 asal değildir.

ETKİNLİK 5 Aşağıdaki koşulları sağlayan birer sayı yazıp seçiminizi gerekçelendiriniz. Her maddede birden çok doğru cevap vardır.

- a) Farklı asal çarpanları yalnızca 2 ve 5 olan iki basamaklı bir sayı. Örneğin $40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$ (20, 50, 80 de olur)
- b) Tek bir asal çarpanı olan iki basamaklı bir sayı. Örneğin $32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ (16, 25, 27, 49, 64, 81 de olur)
- c) Asal çarpanlarının çarpımı biçiminde yazılışı dört asal çarpandan oluşan bir sayı. Örneğin $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ (36, 40, 54, 56, 60, 84 de olur)
- d) Hem kendisi hem rakamları toplamı asal olan iki basamaklı bir sayı. Örneğin 23 ($2 + 3 = 5$ asal). 29, 41, 43, 47, 61, 67, 83, 89 da olur.
- e) "Tek olan her sayı asaldır." ifadesini çürüten bir karşı örnek. Örneğin $9 = 3 \times 3$ (15, 21, 25, 27, 33, 35 de olur)
- f) "İki asal sayının toplamı her zaman çifttir." ifadesini çürüten bir karşı örnek. Örneğin $2 + 3 = 5$ (tek). Biri 2 olduğu sürece toplam tek çıkar: $2 + 7 = 9$, $2 + 11 = 13$.

Konu Özeti

ÖZET Asal sayı, tam olarak iki farklı çarpanı olan sayıdır; çarpanları 1 ve kendisidir. **1 asal değildir** (tek çarpanı var), **2 en küçük asaldır** ve tek çift asaldır; 2'den büyük bütün asallar tektir — ama tek olan her sayı asal değildir. **Eratosthenes Kalburu** ile 100'e kadar **25** asal bulunur. Bir sayının asallığını test ederken, **kendisiyle çarpımı sayıyı geçen** ilk asala kadar denir; 51, 87 ve 91 gibi sayılar tam bu yüzden yanlışlıkla asal sanılır. **Asal çarpan**, bir sayının asal olan çarpanıdır. 1'den büyük her sayı ya asaldır ya da **asal çarpanlarının çarpımı** biçiminde **tek** bir şekilde yazılabilir; bu yazılış **asal çarpan algoritması** ya da **çarpan ağacı** ile bulunur. Algoritmada bölen olarak **yalnızca asal sayılar** kullanılır. Asal çarpan çarpımına bakarak bölünebilme kararı verilebilir: bölenin asal çarpanlarının hepsi, **yeterli sayıda** bulunmalıdır.