

KONU ANLATIMLI SORU ÇÖZÜMLERİ

Ortak Katlar, Ortak Bölenler ve Aralarında Asal Sayılar

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge CC BY-NC 4.0 lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabılır.

ÇÖZÜMLÜ SORU 1 Ortak katla tekrarlı olay problemi çözme

Bir iskeleden kalkan iki vapurdan biri her **12 dakikada**, diğeri her **18 dakikada** bir sefere çıkmaktadır. İki vapur saat **08.00**'de birlikte kalkmıştır. Bundan sonraki **3. kez** birlikte kalktıklarında saat kaç olur?

1 Hangi kavram gerekli, karar ver

Kalkışlar **tekrar ediyor** ve iki vapurun **aynı anda** kalkması soruluyor. Öyleyse bu bir **ortak kat** problemidir. Bölüştürülen, eşit parçalara ayrılan bir miktar yok; ortak bölenle ilgisi yoktur.

2 Katları yaz ve ortak olanları işaretle

12'nin katları: 12, 24, **36**, 48, 60, **72**, 84, 96, **108**

18'in katları: 18, **36**, 54, **72**, 90, **108**

Ortak katlar: **36, 72, 108, ...**

3 Kaçıncı buluşma sorulduğuna dikkat et

1. birlikte kalkış: **36** dakika sonra

2. birlikte kalkış: **72** dakika sonra

3. birlikte kalkış: **108** dakika sonra

Ortak katların en küçüğü 36'dır; sonrakiler onun katlarıdır. Bu yüzden 3. buluşma $3 \times 36 = 108$ dakika sonradır.

4 Saati hesapla

108 dakika = **1 saat 48 dakika** ($60 + 48$)

$08.00 + 1 \text{ saat} = 09.00 \rightarrow 09.00 + 48 \text{ dakika} = \mathbf{09.48}$

5 Sağlamasını yap

$108 \div 12 = 9 \checkmark$ (birinci vapurun 9. seferi)

$108 \div 18 = 6 \checkmark$ (ikinci vapurun 6. seferi)

İki sayı da kalansız bölündüğü için 108 gerçekten ortak kattır.

Sonuç: 3. kez saat 09.48'de birlikte kalkarlar (108 dakika sonra).

Dikkat: "Kaçıncı kez" ifadesini atlamayın. En küçük ortak kat yalnızca **1. buluşmayı** verir; 3. buluşma için onu **3 ile çarpmanız** gerekir. Ayrıca dakikayı saate çevirmeyi unutmayın.

ÇÖZÜMLÜ SORU 2 Ortak bölenle eşit paylaşırma problemi çözme

Bir kırtasiyede **48 kalem** ve **60 silgi** bulunmaktadır. Bunlar birbirine karıştırılmadan, hiç artmayacak biçimde **özdeş hediye paketlerine** konacaktır. En fazla kaç paket yapılabilir? Her pakette kaç kalem ve kaç silgi olur?

1 Hangi kavram gerekli, karar ver

Elde **belirli miktarlar** var ve bunlar **eşit olarak bölüştürülüyor**. Öyleyse bu bir **ortak bölen** problemidir. Paket sayısı hem 48'i hem 60'ı kalansız bölmelidir; yani 48 ile 60'ın **ortak böleni** olmalıdır.

2 Bölenleri çarpan çiftleriyle yaz

$$48 = 1 \times 48 \cdot 2 \times 24 \cdot 3 \times 16 \cdot 4 \times 12 \cdot 6 \times 8 \rightarrow 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48$$

$$60 = 1 \times 60 \cdot 2 \times 30 \cdot 3 \times 20 \cdot 4 \times 15 \cdot 5 \times 12 \cdot 6 \times 10 \rightarrow 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60$$

3 Ortak bölenleri belirle

İki listede de bulunanlar: **1, 2, 3, 4, 6, 12**

Soruda "**en fazla**" paket istendiği için bunların **en büyüğü** alınır: **12**.

4 Paket içeriğini hesapla

Kalem: $48 \div 12 = 4$ kalem

Silgi: $60 \div 12 = 5$ silgi

Her pakette 4 kalem ve 5 silgi bulunur.

5 Sağlamasını yap

$12 \times 4 = 48 \checkmark$ $12 \times 5 = 60 \checkmark$ Hiç kalem ya da silgi artmadı.

Ayrıca 13 paket denenirse: $48 \div 13$ kalansız değil $\times$ Demek ki 12'den fazlası mümkün değil.

Bir de şunu fark edin: 4 ile 5 aralarında asaldır. En büyük ortak bölene bölündüğünde elde kalan sayılar her zaman aralarında asal çıkar.

Sonuç: En fazla 12 paket yapılır; her pakette 4 kalem ve 5 silgi bulunur.

Dikkat: Ortak bölenlerin **hepsi** geçerli bir paket sayısıdır: 2, 3, 4, 6 ya da 12 paket yapılabilir. "En fazla" denildiği için en büyüğü seçilir. Soruda "en fazla" yerine "kaç farklı biçimde" sorulsaydı cevap **ortak bölen sayısı** olurdu.

ÇÖZÜMLÜ SORU 3 Aralarında asal olma koşuluyla çarpan çifti seçme

▲ ile ● aralarında asal iki doğal sayıdır ve $\triangle \times \bullet = 60$ 'tır. Buna göre $\triangle + \bullet$ ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır? En büyük değer kaçtır?

1 60'ın bütün çarpan çiftlerini yaz

$$60 = 1 \times 60 \cdot 2 \times 30 \cdot 3 \times 20 \cdot 4 \times 15 \cdot 5 \times 12 \cdot 6 \times 10$$

Altı çarpan çifti vardır. Sıradaki deneme (10×6) daha önce yazılanı tekrar ettiği için liste burada biter.

2 Her çiftin aralarında asal olup olmadığını denetle

- **1 ve 60** → 1 ile her sayı aralarında asaldır ✓
- **2 ve 30** → ikisi de çift, ortak bölen 2 ×
- **3 ve 20** → 3'ün bölenleri 1, 3; 20'nin bölenleri 1, 2, 4, 5, 10, 20 → ortak yalnız 1 ✓
- **4 ve 15** → $4 = 2 \times 2$, $15 = 3 \times 5$, ortak asal çarpan yok ✓
- **5 ve 12** → 5 asal, 12'yi bölmez ✓
- **6 ve 10** → ikisi de çift, ortak bölen 2 ×

3 Kalan çiftlerin toplamlarını hesapla

$$1 + 60 = 61$$

$$3 + 20 = 23$$

$$4 + 15 = 19$$

$$5 + 12 = 17$$

4 En küçüğü ve en büyüğü seç, kontrol et

En küçük toplam **17** (▲ ve ● sayıları 5 ile 12), en büyük toplam **61** (1 ile 60).

Kontrol: $5 \times 12 = 60$ ✓ ve 5 ile 12'nin ortak böleni yalnızca 1 ✓

$1 \times 60 = 60$ ✓ ve 1 ile 60 aralarında asal ✓

Genel kural: Çarpımı sabit olan iki sayının toplamı, sayılar **birbirine yaklaştıkça küçülür**. Bu yüzden en küçük toplam, aralarında asal çiftlerden birbirine en yakın olanında çıkar.

Sonuç: ▲ + ● en küçük 17 (5 ve 12), en büyük 61 (1 ve 60) olur.

Dikkat: Elenen çiftlere bakın: **2 ile 30 ve 6 ile 10**. İkisinde de her iki sayı çifttir. Çarpımı çift olan bir sayıda 2'leri **bölüştürmek** aralarında asallığı bozar; bütün 2'ler **aynı** sayıda kalmalıdır.

ÇÖZÜMLÜ SORU 4 Belirli aralıkta ortak kat bulma ve çarpım yanlışlığını çürütme

Bir depodaki vidalar **8'erli** ya da **10'arlı** kutulara konduğunda hiç vida artmamaktadır. Vida sayısının **100 ile 150 arasında** olduğu bilindiğine göre depoda kaç vida vardır? Depo sorumlusu " $8 \times 10 = 80$ olduğu için ortak katlar 80'in katlarıdır." diyor. Bu iddiayı değerlendiriniz.

1 Kavramı seç

Vidalar hem 8'erli hem 10'arlı kutulara **artmadan** yerleşiyor. Öyleyse vida sayısı hem 8'in hem 10'un katıdır; yani 8 ile 10'un **ortak katıdır**.

2 Ortak katları bul

8'in katları: 8, 16, 24, 32, **40**, 48, 56, 64, 72, **80**, 88, 96, 104, 112, **120**, ...

10'un katları: 10, 20, 30, **40**, 50, 60, 70, **80**, 90, 100, 110, **120**, ...

Ortak katlar: **40, 80, 120, 160**, ...

En küçük ortak kat **40'tır**; diğerleri onun katlarıdır.

3 Verilen aralıkta olanı seç

Ortak katlardan 100 ile 150 arasında olan tek sayı **120'dir**. (40 ve 80 küçük, 160 büyüktür.)

Demek ki depoda **120 vida** vardır.

Kontrol: $120 \div 8 = 15$ kutu ✓ $120 \div 10 = 12$ kutu ✓

4 Depo sorumlusunun iddiasını değerlendir

İddia yanlıştır. 80 gerçekten bir ortak kattır, ama ortak katların **en küçüğü değildir**; en küçük ortak kat **40'tır**.

80'in katları: 80, 160, 240, ... Bu listede **40 yoktur** ve **120 de yoktur**. Yani sorumlunun yöntemi bu sorunun doğru cevabını bile **kaçırır**: 100–150 aralığında 80'in katı bulunmadığı için "böyle bir sayı yok" sonucuna varırdı.

Doğru kural: bütün ortak katlar, **en küçük ortak katın** katlarıdır — çarpımın değil.

Sonuç: Depoda 120 vida vardır. "Ortak katlar çarpımın katlarıdır" iddiası yanlıştır; ortak katlar en küçük ortak kat olan 40'ın katlarıdır.

Dikkat: İki sayının çarpımı **her zaman** bir ortak kattır, ama **yalnızca sayılar aralarında asalsa** en küçük ortak kat olur. 8 ile 10'un ortak böleni 2 olduğu için çarpım burada en küçük ortak katın **iki katı** çıkmıştır.