ÇÖZÜMLER

Aritmetik Ortalama, Ortanca, Açıklık ve Tepe Değeri

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge **CC BY-NC 4.0** lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabilir.

1. Bölüm Soru 1–5

1 Bir istatistik dersinde altı araştırma sorusu yazılmıştır:

I. Sınıftaki öğrencilerin matematik notlarının genel seviyesi nedir?
II. Okul kantininde en çok satılan içecek hangisidir?
III. Sınıftaki en uzun ve en kısa öğrenci arasındaki boy farkı kaç santimetredir?
IV. Bir mahalledeki evlerin fiyatları genelde ne kadardır? (Birkaç ev diğerlerinden çok pahalıdır.)
V. Öğrencilerin en sevdiği renk hangisidir?
VI. Bir haftadaki sıcaklıklar ne kadar dalgalanmıştır?

a) Her soruyu aritmetik ortalama, ortanca, tepe değer ve açıklık ölçülerinden uygun olanıyla eşleştiriniz.
b) II. ve V. sorularda neden yalnızca tek bir ölçü kullanılabilir?
c) IV. soruda neden aritmetik ortalama tercih edilmemiştir?

- **a)** Eşleştirmeler:

  I → ARİTMETİK ORTALAMA ("genel seviye" soruluyor, veriler sayısal ve uç değer belirtilmemiş)

  II → TEPE DEĞER ("en çok satılan" soruluyor)

  III → AÇIKLIK (en büyük – en küçük farkı soruluyor)

  IV → ORTANCA (uç değerler var, çoğunluğu temsil eden değer aranıyor)

  V → TEPE DEĞER ("en sevilen", kategorik veri)

  VI → AÇIKLIK ("ne kadar dalgalandı", yayılım soruluyor)

- **b)** Her iki soruda da veriler **kategoriktir**: içecek türleri (ayran, meyve suyu, su...) ve renkler (mavi, kırmızı, yeşil...).

  Kategorik veriler **toplanamaz** ve **sıralanamaz**:

  - "Ayran + meyve suyu" gibi bir toplama anlamsızdır → **ortalama hesaplanamaz**
  - Renkleri küçükten büyüğe dizmek mümkün değildir → **ortanca bulunamaz**
  - Aynı nedenle **açıklık** da hesaplanamaz

  Geriye tek seçenek kalır: **tepe değer**, yani en sık tekrar eden kategori. Tepe değeri diğer ölçülerden ayıran en önemli özellik budur.

devamı →

1 *(çözümün devamı)*

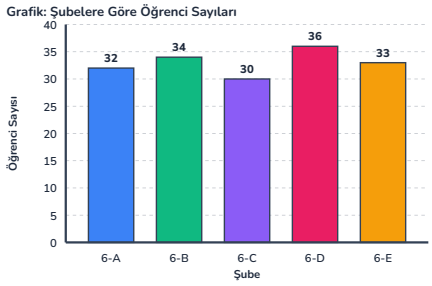
- **c)** Soruda "**birkaç ev diğerlerinden çok pahalıdır**" deniyor; yani veri setinde **uç değerler** var.

  Aritmetik ortalama **uç değerlerden etkilenir**; çünkü bütün veriler toplama girer ve çok yüksek birkaç fiyat toplamı yukarı çeker. Sonuçta ortalama, evlerin **çoğunluğunun** fiyatının epey üstünde çıkar.

  Ortanca ise yalnızca **sıralamadaki konuma** bakar; en pahalı evin fiyatı ne olursa olsun ortanca değişmez. Bu yüzden "genelde ne kadar" sorusuna **ortanca** çok daha doğru cevap verir.

✔ Doğru Sonuç: a) I → ortalama, II → tepe değer, III → açıklık, IV → ortanca, V → tepe değer, VI → açıklık b) Kategorik veriler toplanamaz ve sıralanamaz c) Uç değerler ortalamayı yukarı çeker

2 Bir ortaokulun 6. sınıf şubelerindeki öğrenci sayıları şekildeki sütun grafiğinde verilmiştir.



a) Şubelerdeki öğrenci sayılarının aritmetik ortalamasını bulunuz.
b) Ortancayı bulunuz.
c) Açıklığı bulunuz.
d) Bu veri setinin tepe değeri var mıdır?
e) Bu veri setini temsil etmek için aritmetik ortalamanın kullanılması uygun olur mu? Gerekçelendiriniz.

- **a)** Grafikten değerleri okuyalım: **32, 34, 30, 36, 33**

  1. adım — topla:

  32 + 34 + 30 + 36 + 33 = **165**

  2. adım — veri sayısına böl:

  Veri adedi: **5**

  Ortalama = 165 ÷ 5 = **33 öğrenci**

- **b)** Verileri küçükten büyüğe sıralayalım:

  30, 32, **33**, 34, 36

  Veri sayısı **5 (tek)** olduğuna göre tam ortadaki (3.) değer ortancadır.

  Ortanca = **33 öğrenci**

devamı →

2 *(çözümün devamı)*

Dikkat: Ortalama da 33 çıkmıştı. İkisinin eşit olması, verilerin **dengeli dağıldığının** bir işaretidir.

- **c)** En büyük değer: **36** (6-D) · En küçük değer: **30** (6-C)

  Açıklık = 36 − 30 = **6 öğrenci**

- **d)** Her değerin kaç kez geçtiğine bakalım:

  30 → 1 · 32 → 1 · 33 → 1 · 34 → 1 · 36 → 1

  Bütün değerlerden **birer tane** bulunmaktadır.

  Bu veri setinin tepe değeri yoktur.

  Not: "Tepe değer yoktur" ile "tepe değer 0'dır" farklı şeylerdir; ölçü tanımsızdır.

- **e) Evet, uygun olur.**

  Gerekçeler:

  1. Açıklık küçüktür (yalnızca 6). Şubeler arasında büyük bir farklılaşma yok.

  2. Veri setinde **uç değer yoktur**; hiçbir şube diğerlerinden kopuk değil (30 ile 36 arası dar bir aralık).

  3. Ortalama ile ortanca eşit çıkmıştır (ikisi de 33). Bu, dağılımın dengeli olduğunun güçlü bir göstergesidir.

  Böyle veri setlerinde aritmetik ortalama, veri setini **iyi temsil eder**.

✔ Doğru Sonuç: a) 33 öğrenci b) 33 öğrenci c) 6 öğrenci d) Tepe değer yoktur e) Evet; açıklık küçük, uç değer yok, ortalama = ortanca

3 Bir basketbolcunun dokuz maçta attığı sayılar şöyledir:

12, 18, 15, 22, 15, 20, 15, 17, 19

a) Aritmetik ortalamayı bulunuz.
b) Ortancayı bulunuz.
c) Tepe değerini bulunuz.
d) Açıklığı bulunuz ve bu oyuncunun performansı hakkında yorum yapınız.

- **a) Topla:**

  12 + 18 + 15 + 22 + 15 + 20 + 15 + 17 + 19

devamı →

3 *(çözümün devamı)*

Kolaylık için gruplayalım:

(12 + 18) + (15 + 15 + 15) + (22 + 20) + (17 + 19)

= 30 + 45 + 42 + 36

= **153**

Veri sayısına böl:

Veri adedi: **9**

Ortalama = 153 ÷ 9 = **17 sayı**

- **b)** Verileri küçükten büyüğe sıralayalım:

  12, 15, 15, 15, **17**, 18, 19, 20, 22

  Veri sayısı **9 (tek)** olduğuna göre tam ortadaki değer ortancadır. 9 verinin ortası **5. sıradaki** değerdir (solunda 4, sağında 4 veri kalır).

  Ortanca = **17 sayı**

- **c)** Tekrar sayılarını yazalım:

  12 → 1 kez · **15 → 3 kez** · 17 → 1 kez · 18 → 1 kez · 19 → 1 kez · 20 → 1 kez · 22 → 1 kez

  En çok tekrar eden değer **15**'tir.

  Tepe değer = **15 sayı**

  Dikkat: Cevap 15'tir; 3 sayısı yalnızca **kaç kez** tekrar ettiğini söyler.

- **d)** En büyük: **22** · En küçük: **12**

  Açıklık = 22 − 12 = **10 sayı**

  Yorum:

  • Oyuncu maç başına **ortalama 17 sayı** atmıştır.

  • Açıklık **10**'dur; en iyi maçı ile en kötü maçı arasında 10 sayılık fark vardır. Bu, ortalamanın (17) yaklaşık yarısı kadar olduğu için **orta düzeyde** bir dalgalanmadır.

  • Ortalama (17) ile ortanca (17) **eşittir** → veri setinde uç değer yoktur, performans **dengelidir**.

  • Tepe değer **15**'tir; oyuncu en sık 15 sayı atmıştır (9 maçın 3'ünde).

  Genel değerlendirme: Oyuncu istikrarlı bir performans sergilemiş; maçtan maça büyük iniş çıkışlar yaşamamıştır. Bu veri setinde **aritmetik ortalama** rahatlıkla kullanılabilir.

devamı →

3 *(çözümün devamı)*

✔ Doğru Sonuç: a) 17 sayı b) 17 sayı c) 15 sayı d) Açıklık 10; ortalama = ortanca olduğu için performans dengeli

4 Bir istatistik dersinde üç iddia ortaya atılmıştır:

I. Ela: "Ortanca **her zaman** veri setinde bulunan bir sayıdır."
II. Mert: "Bir veri setinin aritmetik ortalaması, o setteki **en büyük veriden büyük olamaz**."
III. Sude: "Açıklığı **0** olan bir veri setinde bütün veriler birbirine eşittir."

a) Ela'nın iddiası doğru mudur? Doğru değilse karşıt örnek veriniz.
b) Mert'in iddiası doğru mudur? Gerekçelendiriniz.
c) Sude'nin iddiası doğru mudur? Bir örnekle açıklayınız.

- **a) Ela haksızdır.**

  Veri sayısı **çift** olduğunda ortanca, ortadaki iki sayının **ortalaması** alınarak bulunur ve bu ortalama veri setinde bulunmayabilir.

  Karşıt örnek: 2, 4, 6, 8

  Ortadaki iki değer 4 ve 6 → Ortanca = (4 + 6) ÷ 2 = **5**

  5 sayısı veri setinde **yok** ×

  Başka karşıt örnekler:

  3, 5, 8, 10 → ortanca (5 + 8) ÷ 2 = 6,5 (veri setinde yok)

  1, 2, 3, 4, 5, 6 → ortanca (3 + 4) ÷ 2 = 3,5 (veri setinde yok)

  Doğrusu: Veri sayısı **tekse** ortanca her zaman veri setindedir; **çiftse** olmayabilir.

- **b) Mert haklıdır.**

  Aritmetik ortalama, bütün verilerin "ortak paydasını" verir; en büyük veriyi geçmesi mümkün değildir.

  Gerekçe: Bütün veriler en büyük veriden küçük ya da ona eşittir. O hâlde toplam, en fazla "en büyük veri × veri sayısı" kadar olabilir. Bu toplamı veri sayısına böldüğümüzde sonuç en fazla **en büyük veriye eşit** çıkar.

  Örnek: 8, 12, 20 → ortalama 40 ÷ 3 ≈ 13,3 → 20'den küçük ✓

  Eşitlik ne zaman olur: Bütün veriler birbirine eşitse. 7, 7, 7 → ortalama 7 = en büyük veri ✓

devamı →

4 *(çözümün devamı)*

Aynı gerekçeyle ortalama, **en küçük veriden de küçük olamaz**. Yani ortalama her zaman en küçük ile en büyük **arasındadır**. Bu, sonucu denetlemenin hızlı bir yoludur.

- **c) Sude haklıdır.**

  Açıklık = En büyük değer − En küçük değer'dir.

  Açıklığın 0 olması demek:

  En büyük değer − En küçük değer = 0 → **En büyük değer = En küçük değer**

  Bütün veriler en küçük ile en büyük **arasında** olmak zorunda olduğuna göre, bu ikisi eşitse geriye kalan bütün veriler de onlara **eşit** olmalıdır.

  Örnek: 20, 20, 20, 20

  Açıklık = 20 − 20 = **0** ✓ Bütün veriler eşit ✓

  Ayrıca: ortalama 20, ortanca 20, tepe değer 20 — **dört ölçü de aynı** çıkar.

  Bu, açıklığı 0 olan veri setlerinin tek örneğidir.

✓ Doğru Sonuç: a) Yanlış; 2, 4, 6, 8 → ortanca 5 (veri setinde yok) b) Doğru; ortalama en küçük ile en büyük arasındadır c) Doğru; açıklık 0 ise bütün veriler eşittir

5 **Soru:** 14, 8, 22, 5, 19 veri setinin ortancasını bulunuz.

Bir öğrenci şöyle çözmüştür:
"Beş veri var, ortadaki üçüncü veridir. Üçüncü sırada 22 yazıyor. Ortanca = 22'dir."

a) Öğrencinin hatası nedir?
b) Doğru ortancayı bulunuz.
c) Öğrencinin bulduğu 22 sayısı bu veri setinde aslında neyi ifade eder?
d) Ortanca bulunurken izlenmesi gereken adımları sırayla yazınız.

- **a)** Öğrenci, verileri **sıralamadan** doğrudan "üçüncü sıradaki" sayıyı almıştır.

  Ortancanın tanımı şudur: veri seti **küçükten büyüğe sıralandığında** tam ortada bulunan değer. Veriler karışık sırada verilmişse, verildiği sıradaki ortadaki sayı ortanca **değildir**.

  Öğrenci tanımın "tam ortada" kısmını almış, "sıralandığında" kısmını atlamıştır.

- **b)** Önce sıralayalım:

  5, 8, **14**, 19, 22

devamı →

5 *(çözümün devamı)*

Veri sayısı **5 (tek)** olduğuna göre tam ortadaki (3.) değer ortancadır:

Ortanca = **14**

Kontrol: 14'ün solunda 2 veri (5 ve 8), sağında 2 veri (19 ve 22) var ✓ Tam ortada.

- **c)** 22 sayısı bu veri setinin **en büyük değeridir**.

  Sıralı hâl: 5, 8, 14, 19, **22** → 22 en sonda.

  Yani öğrenci ortanca yerine, veri setinin **en büyük değerini** bulmuştur. İki ölçü arasında büyük fark var: 14 ile 22.

  Not: 22 sayısı açıklık hesabında işe yarar: Açıklık = 22 − 5 = **17**

- **d) Ortanca bulma adımları:**

  1. adım: Verileri **küçükten büyüğe sırala**. (Bu adım asla atlanamaz.)

  2. adım: Veri sayısını belirle.

  3. adım:

  - Veri sayısı **tekse** → tam ortadaki değeri al.
  - Veri sayısı **çiftse** → ortadaki iki değerin aritmetik ortalamasını al.

  4. adım: Kontrol et — ortancanın solunda ve sağında eşit sayıda veri kalmalı.

  Bu dört adım izlendiğinde ortanca hatası yapmak neredeyse imkânsızdır.

✓ Doğru Sonuç: a) Verileri sıralamamış b) 14 c) Veri setinin en büyük değeri d) Sırala → veri sayısını bul → tek/çift durumuna göre seç → kontrol et

2. Bölüm Soru 6–10

6 Beş sayının aritmetik ortalaması **24**'tür. Bu sayılardan biri çıkarıldığında kalan dört sayının aritmetik ortalaması **26** olmaktadır.

a) Beş sayının toplamı kaçtır?
b) Kalan dört sayının toplamı kaçtır?
c) Çıkarılan sayı kaçtır?
d) Çıkarılan sayı, eski ortalamadan büyük müydü küçük müydü? Bunu ortalamanın artmasıyla ilişkilendiriniz.

- **a)** "Toplam = Ortalama × Veri sayısı" bağıntısını kullanalım:

  Beş sayının toplamı = 24 × 5 = **120**

- **b)** Aynı bağıntıyı kalan dört sayı için kullanalım:

  Dört sayının toplamı = 26 × 4 = **104**

- **c)** Çıkarılan sayı, iki toplam arasındaki farktır:

  Çıkarılan sayı = 120 − 104 = **16**

  Kontrol: Beş sayıdan biri 16 olsun; kalan dördünün toplamı 120 − 16 = 104 ve ortalaması 104 ÷ 4 = **26** ✓

- **d)** Çıkarılan sayı **16**, eski ortalama **24**'tür.

  16 < 24 → çıkarılan sayı ortalamadan **küçüktü**.

  İlişki: Ortalamanın altında kalan bir sayı, ortalamayı **aşağı çeken** bir veridir. O sayı setten çıkarılınca bu aşağı çekme ortadan kalkar ve ortalama **yükselir**.

  Gerçekten de ortalama 24'ten 26'ya çıkmıştır ✓

  Genel kural (veri çıkarma):

  - Ortalamadan **küçük** bir veri çıkarılırsa → ortalama **artar**
  - Ortalamadan **büyük** bir veri çıkarılırsa → ortalama **azalır**
  - Ortalamaya **eşit** bir veri çıkarılırsa → ortalama **değişmez**

  (Veri eklendiğinde bu kuralların tam tersi geçerlidir.)

✓ Doğru Sonuç: a) 120 b) 104 c) 16 d) Küçüktü (16 < 24); bu yüzden çıkarılınca ortalama yükseldi

7 Üç farklı şubede beşer öğrencinin matematik puanları aşağıda verilmiştir.

Şube	Puanlar
6-A	55, 60, 62, 65, 68
6-B	40, 55, 62, 70, 93
6-C	62, 62, 62, 62, 62

a) Her şubenin aritmetik ortalamasını ve açıklığını bulunuz.
b) Hangi şubede öğrencilerin puanları birbirine en yakındır?
c) 6-A ile 6-C şubelerinin ortalamaları aynıdır. Aradaki fark hangi ölçüyle ortaya çıkar?
d) Hangi şube için aritmetik ortalama en az temsil edicidir? Gerekçelendiriniz.

- **a)** Şube şube hesaplayalım:

  6-A: 55 + 60 + 62 + 65 + 68 = 310 → Ortalama = 310 ÷ 5 = **62**

  Açıklık = 68 − 55 = **13**

  6-B: 40 + 55 + 62 + 70 + 93 = 320 → Ortalama = 320 ÷ 5 = **64**

  Açıklık = 93 − 40 = **53**

  6-C: 62 × 5 = 310 → Ortalama = 310 ÷ 5 = **62**

  Açıklık = 62 − 62 = **0**
- **b)** Açıklıklar: 6-A → 13, 6-B → 53, **6-C → 0**

  En küçük açıklık **6-C** şubesindedir.

  Açıklığın 0 olması, bütün puanların **birbirine eşit** olduğunu gösterir (hepsi 62). Bu şubedeki öğrencilerin puanları arasında **hiç farklılaşma yoktur**.
- **c)** İki şubenin de ortalaması **62**'dir; ama veri setleri tamamen farklıdır:

  6-A: 55, 60, 62, 65, 68 → puanlar 55 ile 68 arasında yayılmış

  6-C: 62, 62, 62, 62, 62 → bütün puanlar aynı

  Bu farkı ortaya çıkaran ölçü **AÇIKLIK**'tır:

  6-A → 13 · 6-C → 0

devamı →

7 *(çözümün devamı)*

Önemli ders: Aritmetik ortalama, verilerin **ne kadar yayıldığı** hakkında hiçbir şey söylemez. İki veri setinin ortalaması aynı olsa bile dağılımları çok farklı olabilir. Bu yüzden ortalama tek başına yeterli değildir; yanına **açıklık** da bakılmalıdır.

- **d)** Aritmetik ortalama **6-B** şubesi için en az temsil edicidir.

  Gerekçeler:

  1. Açıklığı **53**'tür — diğer iki şubeden çok daha büyük.

  2. Puanlar **40 ile 93** arasında çok geniş bir aralığa yayılmış.

  3. Ortalama **64** çıkmış, ama bu değer 40 alan öğrenciyi de 93 alan öğrenciyi de **hiç temsil etmiyor**.

  Bu şube için **ortanca** (sıralı hâlde ortadaki değer: **62**) daha dengeli bir özet verir.

  Karşılaştırma için 6-C'ye bakalım: orada bütün öğrenciler 62 aldığı için ortalama **mükemmel** bir temsilcidir.

✔ Doğru Sonuç: a) 6-A: 62 ve 13 — 6-B: 64 ve 53 — 6-C: 62 ve 0 b) 6-C (açıklık 0) c) Açıklık d) 6-B; açıklığı çok büyük

8 **Soru:** 7, 9, 9, 9, 12, 15 veri setinin tepe değerini bulunuz.

Bir öğrenci şöyle çözmüştür:
"9 sayısı üç kez tekrar ediyor; en çok tekrar eden odur.
O hâlde tepe değer 3'tür."

a) Öğrencinin hatası nedir?
b) Doğru tepe değeri yazınız.
c) Aynı veri setinin ortancasını bulunuz.
d) "Tepe değer" ile "tekrar sayısı" arasındaki farkı, bir örnek üzerinde açıklayınız.

- **a)** Öğrenci, veri setindeki tekrarı **doğru saymış** (9 sayısı gerçekten üç kez geçiyor) ama cevap olarak **tekrar sayısını** yazmıştır.

  Tepe değerin tanımı şudur: **en sık tekrar EDEN DEĞER**. Yani cevap, tekrar eden sayının kendisidir; kaç kez tekrar ettiği değil.

  Öğrencinin cevabı olan 3, veri setinde **hiç bulunmayan** bir sayıdır. Bu bile hatanın işaretidir.

- **b)** Tekrar sayılarını yazalım:

  7 → 1 kez · **9 → 3 kez** · 12 → 1 kez · 15 → 1 kez

devamı →

8 *(çözümün devamı)*

En çok tekrar eden değer **9**'dur.

Tepe değer = 9

- **c)** Veriler zaten sıralı: 7, 9, **9**, **9**, 12, 15

  Veri sayısı **6 (çift)** olduğuna göre ortadaki iki değerin ortalaması alınır. Ortadaki iki değer **3. ve 4. sıradakiler**, yani 9 ve 9'dur:

  Ortanca = (9 + 9) ÷ 2 = 18 ÷ 2 = **9**

  Bu veri setinde tepe değer ile ortanca **aynı** çıktı (ikisi de 9). Bu bir tesadüf değil: 9 sayısı hem en sık tekrar ediyor hem de tam ortada bulunuyor.

- **d) Örnek:** 4, 4, 4, 4, 7, 10 veri setini ele alalım.

  Tepe değer = 4 → veri setinde **en sık geçen sayı**

  Tekrar sayısı = 4 → 4 sayısının **kaç kez geçtiği**

  Bu örnekte ikisi de 4 çıktı ama **tamamen farklı şeyleri** ölçüyorlar. Karışıklığı önlemek için başka bir örnek:

  25, 25, 25, 30, 41 → **Tepe değer 25**, tekrar sayısı **3**'tür.

  Ayrım için sor: "Hangi değer en çok tekrar ediyor?" — cevabın kendisi tepe değerdir. "Kaç kez tekrar ediyor?" sorusunun cevabı ise tepe değer **değildir**.

✔ Doğru Sonuç: a) Tekrar sayısını yazmış b) Tepe değer 9 c) Ortanca (9 + 9) ÷ 2 = 9 d) Tepe değer tekrar eden sayının kendisidir

9 Bir okulda düzenlenen 200 metre koşusunda on öğrencinin saniye cinsinden dereceleri şekildeki kök-yaprak gösterimiyle verilmiştir.

200 Metre Koşu Dereceleri (saniye)

Kök (onlar)	Yaprak (birler)
3	5 8 8
4	1 3 3 7
5	2 5 8

a) Verileri küçükten büyüğe liste hâlinde yazınız. Kaç veri vardır?
b) Ortancayı bulunuz.
c) Tepe değerini bulunuz.
d) Açıklığı bulunuz.
e) Aritmetik ortalamayı bulunuz ve ortancayla karşılaştırınız.

- **a)** Kök-yaprak gösteriminde **kök** onlar basamağını, **yaprak** birler basamağını gösterir. Satır satır okuyalım:

  Kök 3 → yapraklar 5, 8, 8 → **35, 38, 38**

  Kök 4 → yapraklar 1, 3, 3, 7 → **41, 43, 43, 47**

devamı →

9 *(çözümün devamı)*

Kök 5 → yapraklar 2, 5, 8 → **52, 55, 58**

Sıralı liste: 35, 38, 38, 41, 43, 43, 47, 52, 55, 58

Yaprakları sayalım: 3 + 4 + 3 = **10 veri**

Not: Kök-yaprak gösteriminde veriler **zaten sıralıdır**; ayrıca sıralamaya gerek yok.

- **b)** Veri sayısı **10 (çift)** olduğuna göre ortadaki **iki değerin** ortalaması alınır. 10 verinin ortası **5. ve 6. sıradakilerdir**:

  35, 38, 38, 41, **43**, **43**, 47, 52, 55, 58

  Ortanca = (43 + 43) ÷ 2 = 86 ÷ 2 = **43 saniye**

- **c)** Tekrar sayılarına bakalım:

  35 → 1 · **38 → 2** · 41 → 1 · **43 → 2** · 47 → 1 · 52 → 1 · 55 → 1 · 58 → 1

  38 ve 43 sayılarının **ikisi de ikişer kez** tekrar ediyor ve bu en yüksek sıklıktır.

  Tepe değerler = 38 ve 43 saniye

  Bu veri setinde **iki tepe değer** vardır; ikisini de yazmak gerekir.

- **d)** En büyük derece: **58** · En küçük derece: **35**

  Açıklık = 58 − 35 = **23 saniye**

  Kök-yaprak gösteriminde en küçük değer **ilk satırın ilk yaprağı**, en büyük değer **son satırın son yaprağıdır**; bu yüzden açıklık çok hızlı okunur.

- **e) Topla:**

  35 + 38 + 38 + 41 + 43 + 43 + 47 + 52 + 55 + 58

  Satır satır toplayalım:

  Kök 3: 35 + 38 + 38 = **111**

  Kök 4: 41 + 43 + 43 + 47 = **174**

  Kök 5: 52 + 55 + 58 = **165**

  Toplam = 111 + 174 + 165 = **450**

  Böl: Ortalama = 450 ÷ 10 = **45 saniye**

  Karşılaştırma: Ortalama **45**, ortanca **43**'tür. İkisi birbirine oldukça yakın (2 saniye fark).

devamı →

9 *(çözümün devamı)*

Ortalamanın biraz yüksek çıkmasının nedeni, üst uçtaki 52, 55 ve 58 derecelerinin toplamı yukarı çekmesidir. Ama aralarındaki fark küçük olduğu için veri setinde **belirgin bir uç değer yoktur**; her iki ölçü de kullanılabilir.

✔ Doğru Sonuç: a) 35, 38, 38, 41, 43, 43, 47, 52, 55, 58 → 10 veri b) 43 sn c) 38 ve 43 sn (iki tepe değer) d) 23 sn e) 45 sn; ortancaya yakın, uç değer yok

10 Aşağıdaki sekiz veri seti, **tepe değer durumuna** göre gruplandırılacaktır.

I. 4, 8, 3, 1, 8, 2 **II.** 24, 32, 15, 9, 24, 15, 7
III. 10, 8, 17, 24, 21, 34, 106 **IV.** 3, 7, 11, 3, 11, 6, 3, 7, 11
V. 25, 13, 12, 10, 8, 6, 5, 13 **VI.** 2, 2, 8, 8, 9, 9, 16, 16
VII. 120, 100, 90, 100, 100, 90, 100 **VIII.** 5, 5, 7, 7, 9

a) Veri setlerini "tek tepe değer", "iki tepe değer" ve "tepe değer yok" gruplarına ayırınız. Tepe değerleri de yazınız.
b) III. ve VI. setlerin tepe değeri neden yoktur? İkisi arasındaki farkı açıklayınız.
c) VII. setin ortancasını da bulunuz.

- **a)** Her seti sıralayıp tekrarları sayalım:

  TEK TEPE DEĞER:

  - **I.** 1, 2, 3, 4, 8, 8 → 8 iki kez → tepe değer **8**
  - **V.** 5, 6, 8, 10, 12, 13, 13, 25 → 13 iki kez → tepe değer **13**
  - **VII.** 90, 90, 100, 100, 100, 100, 120 → 100 dört kez → tepe değer **100**

  İKİ TEPE DEĞER:

  - **II.** 7, 9, 15, 15, 24, 24, 32 → 15 ve 24 ikişer kez → tepe değerler **15 ve 24**
  - **IV.** 3, 3, 3, 6, 7, 7, 11, 11, 11 → 3 üç kez, 11 üç kez → tepe değerler **3 ve 11**
  - **VIII.** 5, 5, 7, 7, 9 → 5 ve 7 ikişer kez → tepe değerler **5 ve 7**

  TEPE DEĞER YOK:

  - **III.** 8, 10, 17, 21, 24, 34, 106
  - **VI.** 2, 2, 8, 8, 9, 9, 16, 16

- **b)** İki setin de tepe değeri yoktur ama **sebepleri farklıdır**:

  III. set: 8, 10, 17, 21, 24, 34, 106

devamı →

10 *(çözümün devamı)*

Bütün değerlerden **birer tane** bulunmaktadır. Hiçbir değer tekrar etmediği için "en sık tekrar eden" diye bir değer yoktur.

VI. set: 2, 2, 8, 8, 9, 9, 16, 16

Burada **tekrarlar var** ama bütün değerler **eşit sıklıkta** (her biri ikişer kez) tekrar ediyor. Hiçbiri diğerinden daha sık olmadığı için yine tepe değer yoktur.

Ortak kural: Tüm değerler eşit sıklıkta tekrar ediyorsa **ya da** birer kez bulunuyorsa, o veri setinin tepe değeri yoktur.

Dikkat: **IV. sette** de birden fazla değer tekrar ediyor ama sıklıklar eşit değil (3 ve 11 üçer kez, 7 iki kez); bu yüzden en yüksek sıklığa sahip olanlar tepe değer olur.

- **c) VII.** set: 120, 100, 90, 100, 100, 90, 100

  Sıralayalım: 90, 90, 100, **100**, 100, 100, 120

  Veri sayısı **7 (tek)** → tam ortadaki (4.) değer ortancadır.

  Ortanca = **100**

  Bu sette tepe değer de 100'dür. Aritmetik ortalamayı da bulalım:

  Toplam = 90 + 90 + 100 + 100 + 100 + 100 + 120 = **700**

  Ortalama = 700 ÷ 7 = **100**

  Üç ölçü de **100** çıktı — bu, verilerin 100 çevresinde dengeli toplandığını gösterir.

✔ Doğru Sonuç: a) Tek tepe: I (8), V (13), VII (100) — İki tepe: II (15, 24), IV (3, 11), VIII (5, 7) — Yok: III, VI b) III'te hiç tekrar yok, VI'da hepsi eşit sıklıkta c) Ortanca 100

3. Bölüm Soru 11–15

11 Uç değerlerin etkisi üzerine üç iddia ortaya atılmıştır:

I. "Bir veri setine çok büyük bir değer eklenirse **aritmetik ortalama artar**."
II. "Bir veri setine uç değer eklenirse **ortanca hiç değişmez**."
III. "Açıklığı büyük olan bir veri setinde aritmetik ortalama **her zaman yanıltıcıdır**."

a) I. iddia doğru mudur? Bir örnekle gösteriniz.
b) II. iddia doğru mudur? Doğru değilse karşıt örnek verip iddiayı düzeltiniz.
c) III. iddia doğru mudur? Doğru değilse karşıt örnek veriniz.

- **a) I. iddia DOĞRUDUR.**

  Eklenen değer mevcut ortalamadan büyükse ortalama artar; "çok büyük" bir değer kesinlikle ortalamadan büyüktür.

  Örnek: 4, 6, 8 veri seti

  Ortalama = 18 ÷ 3 = **6**

  Bu sete **102** ekleyelim: 4, 6, 8, 102

  Yeni ortalama = 120 ÷ 4 = **30**

  Ortalama 6'dan 30'a fırladı ✓

  Gerekçe: Aritmetik ortalama **bütün verileri** toplama katar. Büyük bir değer toplamı çok yukarı çeker; veri sayısı yalnızca bir artarken toplam çok arttığı için bölüm de büyür.

- **b) II. iddia YANLIŞTIR.**

  Ortanca uç değerin **büyüklüğünden** etkilenmez; ama yeni bir veri eklenmesi veri sayısını değiştirir ve **ortanın konumu kayabilir**.

  Karşıt örnek: 1, 2, 3 veri seti → Ortanca = **2**

  Bu sete 100 ekleyelim: 1, 2, 3, 100

  Veri sayısı 4 (çift) → Ortanca = (2 + 3) ÷ 2 = **2,5**

  Ortanca 2'den 2,5'e değişti ×

  Düzeltilmiş iddia:

  "Bir veri setindeki uç değerin **büyüklüğü değiştirilirse** ortanca değişmez."

  Örnek: 1, 2, 3, 100 setinde 100 yerine 1000 yazalım: 1, 2, 3, 1000 → Ortanca yine **2,5** ✓

  Oysa ortalama 26,5'ten 251,5'e fırlardı.

devamı →

11 *(çözümün devamı)*

Yani ortancanın gücü, uç değerin **ne kadar** uç olduğunu umursamamasıdır; ama veri **sayısı** değişince konum da değişir.

- **c) III. iddia YANLIŞTIR.**

  Açıklığın büyük olması tek başına yeterli değildir; asıl belirleyici, verilerin **nasıl dağıldığıdır**.

  Karşıt örnek: 10, 30, 50, 70, 90

  Açıklık = 90 − 10 = **80** (büyük)

  Ortalama = 250 ÷ 5 = **50**

  Ortanca = **50**

  Ortalama ile ortanca **eşit**; veriler 50 çevresinde **dengeli** dağılmış. Burada ortalama hiç de yanıltıcı değil ✓

  Karşılaştırma: 10, 11, 12, 13, 204 setine bakalım.

  Açıklık = 194 (yine büyük)

  Ortalama = 250 ÷ 5 = 50 · Ortanca = 12

  Burada ortalama **gerçekten yanıltıcı**; beş veriden dördü 13'ün altında.

  Doğrusu: Ortalamanın yanıltıcı olup olmadığını anlamak için açıklığa değil, **ortalama ile ortancanın birbirine yakın olup olmadığına** bakmak gerekir. İkisi birbirinden çok uzaksa veri setinde uç değer vardır.

✓ Doğru Sonuç: a) I doğru; 4, 6, 8'e 102 eklenince ortalama 6'dan 30'a çıkar b) II yanlış; 1,2,3 → 2 iken 1,2,3,100 → 2,5 c) III yanlış; 10, 30, 50, 70, 90 setinde açıklık 80 ama ortalama temsil edici

12 Beş sayının aritmetik ortalaması **30**, açıklığı **24**'tür. Bu sayıların **en küçüğü 18**'dir.

a) Sayıların en büyüğü kaçtır?
b) Beş sayının toplamı kaçtır?
c) En küçük ve en büyük dışındaki üç sayının toplamı kaçtır?
d) Bu üç sayının aritmetik ortalaması kaçtır?
e) Koşulları sağlayan bir sayı beşlisi yazınız.

- **a)** Açıklık = En büyük değer − En küçük değer

  24 = En büyük − 18

  En büyük = 24 + 18 = **42**

devamı →

12 *(çözümün devamı)*

- **b)** "Toplam = Ortalama × Veri sayısı":

  Toplam = 30 × 5 = **150**

- **c)** Beş sayıdan ikisini (en küçük 18 ve en büyük 42) biliyoruz. Bunları toplamdan çıkaralım:

  18 + 42 = **60**

  Diğer üç sayının toplamı = 150 − 60 = **90**

- **d)** Üç sayının toplamı 90 olduğuna göre:

  Ortalama = 90 ÷ 3 = **30**

  İlginç bir sonuç: Bu üç sayının ortalaması, beş sayının ortalamasıyla **aynı** çıktı.

  Neden: Çıkardığımız iki sayının (18 ve 42) ortalaması da (18 + 42) ÷ 2 = **30**'dur. Ortalamaya eşit değerler çıkarıldığında kalanların ortalaması **değişmez**.

- **e)** Üç sayının toplamı 90 olmalı ve bu sayılar **18 ile 42 arasında** bulunmalıdır (çünkü 18 en küçük, 42 en büyük olarak belirlendi).

  Örnek beşli: 18, 25, 30, 35, 42

  Kontrol:

  - Toplam: 18 + 25 + 30 + 35 + 42 = **150** ✓
  - Ortalama: 150 ÷ 5 = **30** ✓
  - En küçük 18, en büyük 42 → Açıklık = 42 − 18 = **24** ✓
  - Ortadaki üç sayı: 25 + 30 + 35 = **90** ✓

  Başka çözümler: 18, 20, 30, 40, 42 (toplam 150 ✓) · 18, 28, 30, 32, 42 ✓

  Sonsuz çoklukta çözüm vardır; tek koşul üç sayının toplamının 90 olması ve 18–42 aralığında kalmalarıdır.

✓ Doğru Sonuç: a) 42 b) 150 c) 90 d) 30 e) Örneğin 18, 25, 30, 35, 42

13 Bir mağazanın iki şubesinin bir haftalık günlük satışları bin TL cinsinden şöyledir:

A şubesi: 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30
B şubesi: 12, 14, 16, 18, 20, 22, 66

a) İki şubenin de aritmetik ortalamasını bulunuz.
b) İki şubenin ortancasını bulunuz.
c) İki şubenin açıklığını bulunuz.
d) Ortalamalar eşit olduğu hâlde şubeler aynı mıdır? Farkı hangi ölçüler gösteriyor?
e) Hangi şube daha istikrarlı satış yapmaktadır? Gerekçelendiriniz.

- **a) A şubesi:**

  18 + 20 + 22 + 24 + 26 + 28 + 30 = **168**

  Ortalama = 168 ÷ 7 = **24 bin TL**

  B şubesi:

  12 + 14 + 16 + 18 + 20 + 22 + 66 = **168**

  Ortalama = 168 ÷ 7 = **24 bin TL**

  İki şubenin ortalaması **tam olarak aynı** çıktı.

- **b)** Her iki veri seti de zaten sıralı. Veri sayısı **7 (tek)** → tam ortadaki (4.) değer ortancadır.

  A şubesi: 18, 20, 22, **24**, 26, 28, 30 → Ortanca = **24 bin TL**

  B şubesi: 12, 14, 16, **18**, 20, 22, 66 → Ortanca = **18 bin TL**

  Ortancalar **farklı** çıktı: 24 ile 18.

- **c) A şubesi:** Açıklık = 30 − 18 = **12 bin TL**

  B şubesi: Açıklık = 66 − 12 = **54 bin TL**

  B şubesinin açıklığı, A şubesinin **dört katından fazla**.

- **d) Hayır, şubeler kesinlikle aynı değildir.**

  Ortalamalar eşit (24) ama iki ölçü farkı açıkça gösteriyor:

  1. ORTANCA: A'da 24, B'de 18. B şubesinin ortancası ortalamasından **6 bin TL düşük**. Bu, B'de bir **uç değer** bulunduğunun işaretidir.

  2. AÇIKLIK: A'da 12, B'de 54. B şubesinin satışları çok daha **yayılmış**.

  B şubesine daha yakından bakalım: **66** bin TL'lik gün açık bir uç değerdir (diğer günlerin hepsi 22'nin altında). Muhtemelen özel bir kampanya günüdür.

devamı →

13 *(çözümün devamı)*

Bu tek gün, haftalık toplamı öyle yukarı çekmiştir ki ortalama 24'e çıkmıştır; oysa **yedi günün altısında** satış 22 binin altında kalmıştır.

Ders: Aritmetik ortalama tek başına iki veri setini ayırt etmeye yetmez. Yanına mutlaka **ortanca** ve **açıklık** da bakılmalıdır.

- **e) A şubesi daha istikrarlıdır.**

  Gerekçeler:

  1. A'nın açıklığı **12**, B'nin **54**. A'da günden güne değişim çok daha az.

  2. A'da ortalama (24) ile ortanca (24) **eşit** → dengeli dağılım, uç değer yok.

  B'de ortalama (24) ile ortanca (18) **farklı** → uç değer var.

  3. A'nın satışları 18–30 arasında düzenli artıyor; B'de altı gün düşük, bir gün çok yüksek.

  Yorum: A şubesi her gün benzer satış yapıyor, bu da planlama açısından değerlidir. B şubesinin haftalık cirosu aynı olsa da satışları **tek bir güne bağımlıdır**; bu daha riskli bir durumdur.

✓ Doğru Sonuç: a) İkisi de 24 bin TL b) A: 24, B: 18 bin TL c) A: 12, B: 54 bin TL d) Hayır; ortanca ve açıklık farkı gösteriyor e) A şubesi (açıklık küçük, ortalama = ortanca)

14 Bir veri setindeki **bütün verilere** aynı işlem uygulandığında ölçülerin nasıl değişeceği tartışılmaktadır:

I. "Bütün verilere **5 eklenirse** aritmetik ortalama da **5 artar**."
II. "Bütün verilere **5 eklenirse** açıklık da **5 artar**."
III. "Bütün veriler **2 ile çarpılırsa** ortanca da **2 ile çarpılır**."

a) I. iddia doğru mudur? 4, 6, 8 veri seti üzerinde sınayınız.
b) II. iddia doğru mudur? Aynı veri seti üzerinde sınayıp gerekçelendiriniz.
c) III. iddia doğru mudur? 3, 5, 9 veri seti üzerinde sınayınız.

- **a) I. iddia DOĞRUDUR.**

  Eski set: 4, 6, 8

  Ortalama = (4 + 6 + 8) ÷ 3 = 18 ÷ 3 = **6**

  Yeni set (her veriye 5 eklendi): 9, 11, 13

  Ortalama = (9 + 11 + 13) ÷ 3 = 33 ÷ 3 = **11**

devamı →

14 *(çözümün devamı)*

11 − 6 = **5** ✓ Ortalama tam olarak 5 arttı.

Gerekçe: Üç veriye 5'er eklendiğinde toplam 3 × 5 = 15 artar. Bu artış veri sayısına (3) bölününce 15 ÷ 3 = 5 çıkar. Genel olarak, n veriye k eklenirse toplam n · k artar ve ortalama k artar.

- **b) II. iddia YANLIŞTIR.**

  Eski set: 4, 6, 8 → Açıklık = 8 − 4 = **4**

  Yeni set: 9, 11, 13 → Açıklık = 13 − 9 = **4**

  Açıklık **değişmedi** × İddia bozuldu.

  Gerekçe: Açıklık bir **fark**tır. Hem en büyük hem en küçük değer 5'er arttığı için aradaki fark aynı kalır:

  (En büyük + 5) − (En küçük + 5) = En büyük − En küçük

  Eklenen 5'ler birbirini götürür.

  Düzeltilmiş iddia: "Bütün verilere aynı sayı eklenirse **açıklık değişmez**."

  Not: Aynı şey ortanca ve tepe değer için geçerli değildir; onlar da 5 artar. Eklemeden etkilenmeyen tek ölçü **açıklıktır**.

- **c) III. iddia DOĞRUDUR.**

  Eski set: 3, 5, 9 → sıralı → Ortanca = **5**

  Yeni set (her veri 2 ile çarpıldı): 6, 10, 18 → Ortanca = **10**

  10 = 2 × 5 ✓ Ortanca da 2 ile çarpıldı.

  Gerekçe: Bütün veriler pozitif bir sayıyla çarpıldığında **sıralama bozulmaz**; en küçük yine en küçük, en büyük yine en büyük kalır. Ortadaki veri de yerinde kalır ve yalnızca değeri 2 katına çıkar.

  Ek bilgi: Çarpma işleminde **bütün ölçüler** 2 ile çarpılır:

  Ortalama: (3+5+9) ÷ 3 = 17/3 → yeni: (6+10+18) ÷ 3 = 34/3 = 2 × 17/3 ✓

  Açıklık: 9 − 3 = 6 → yeni: 18 − 6 = 12 = 2 × 6 ✓

  Yani **toplama** açıklığı değiştirmez ama **çarpma** bütün ölçüleri aynı oranda büyütür.

✓ Doğru Sonuç: a) I doğru; ortalama 6'dan 11'e (5 artış) b) II yanlış; açıklık 4 iken yine 4 — değişmez c) III doğru; ortanca 5'ten 10'a (2 katı)

15 Bir "veri atölyesi" etkinliğinde öğrencilerden, verilen koşulları sağlayan **veri setleri üretmeleri** ve seçimlerini gerekçelendirmeleri isteniyor. Çoğu maddede birden çok doğru cevap vardır.

a) Aritmetik ortalaması 20, ortancası 18 olan beş sayı.
b) Açıklığı 0 olan bir veri seti.
c) Tepe değeri olmayan, beş elemanlı bir veri seti.
d) Aritmetik ortalaması, ortancasından büyük olan bir veri seti.
e) Aritmetik ortalaması 10 olan ve hiçbir verisi 10 olmayan dört sayı.
f) İki tepe değeri olan, altı elemanlı bir veri seti.

- **a)** Beş sayının toplamı 20 × 5 = **100** olmalı ve sıralı hâlde **3. sıradaki** sayı 18 olmalıdır.

  Cevap: 10, 15, 18, 22, 35

  Kontrol:

  - Toplam: 10 + 15 + 18 + 22 + 35 = **100** ✓
  - Ortalama: 100 ÷ 5 = **20** ✓
  - Sıralı; 3. sıradaki değer **18** ✓

  Başka cevap: 12, 16, 18, 24, 30 (toplam 100 ✓, ortanca 18 ✓)

  Püf noktası: Ortalama (20) ortancadan (18) büyük olduğuna göre üst uçta biraz büyük bir sayı bulunmalıdır.

- **b)** Açıklık = En büyük − En küçük = 0 olması, en büyük ile en küçüğün **eşit** olması demektir. O hâlde **bütün veriler eşit** olmalıdır.

  Cevap: 7, 7, 7, 7

  Açıklık = 7 − 7 = **0** ✓

  Bu sette ortalama 7, ortanca 7, tepe değer 7 — **dört ölçü de aynı**.

  Başka cevaplar: 25, 25, 25 · 100, 100, 100, 100, 100

  Bunun dışında açıklığı 0 yapan başka bir durum **yoktur**.

- **c)** Tepe değerin olmaması için hiçbir değerin diğerlerinden daha sık tekrar etmemesi gerekir. En kolay yol: **hepsi farklı** sayılar seçmek.

  Cevap: 3, 6, 9, 12, 15

  Her değerden birer tane var → **tepe değer yoktur** ✓

  Başka cevaplar: 4, 11, 18, 25, 40 · 1, 2, 3, 4, 5

  Not: Beş elemanlı bir sette "hepsi eşit sıklıkta" durumu da olabilirdi ama 5 tek sayı olduğu için eşit gruplara ayrılamaz; bu yüzden en pratik yol hepsini farklı seçmektir.

devamı →

15 *(çözümün devamı)*

- **d)** Ortalamanın ortancadan büyük olması için üst uçta bir **uç değer** bulunmalıdır.

  Cevap: 2, 3, 4, 5, 36

  Kontrol:

  • Toplam: 2 + 3 + 4 + 5 + 36 = **50** → Ortalama = 50 ÷ 5 = **10**

  • Sıralı; 3. sıradaki değer → Ortanca = **4**

  • 10 > 4 ✓

  Büyük olan 36, toplamı yukarı çekerek ortalamayı yükseltmiş; ortanca ise sıralamadaki konuma baktığı için etkilenmemiştir.

  Başka cevaplar: 1, 2, 3, 4, 90 · 10, 11, 12, 13, 204

- **e)** Dört sayının toplamı 10 × 4 = **40** olmalı ve hiçbiri 10 olmamalıdır.

  Cevap: 4, 8, 12, 16

  Kontrol: 4 + 8 + 12 + 16 = **40** → Ortalama = 40 ÷ 4 = **10** ✓

  Hiçbir veri 10 değil ✓

  Başka cevaplar: 1, 5, 15, 19 (toplam 40 ✓) · 2, 6, 14, 18 ✓

  Önemli ders: Aritmetik ortalama, veri setinde **bulunmayan** bir değer olabilir. Ortalama "gerçek bir veri" değil, veri setini temsil eden hesaplanmış bir sayıdır.

- **f)** İki tepe değer için, iki farklı sayının **eşit ve en yüksek** sıklıkta tekrar etmesi gerekir.

  Cevap: 3, 3, 7, 7, 9, 12

  Kontrol: Tekrar sayıları → **3 → 2 kez**, **7 → 2 kez**, 9 → 1 kez, 12 → 1 kez

  3 ve 7 en yüksek sıklığa sahip → **tepe değerler 3 ve 7** ✓

  Başka cevaplar: 5, 5, 5, 8, 8, 8 (üçer kez; tepe değerler 5 ve 8) · 10, 10, 20, 20, 30, 40

  Dikkat: 3, 3, 7, 7, 9, 9 yazsaydık **üç** değer eşit sıklıkta olurdu ve bu durumda tepe değer **olmazdı** (hepsi eşit sıklıkta).

✓ Doğru Sonuç: a) 10, 15, 18, 22, 35 b) 7, 7, 7, 7 c) 3, 6, 9, 12, 15 d) 2, 3, 4, 5, 36 e) 4, 8, 12, 16 f) 3, 3, 7, 7, 9, 12