KONU ANLATIMLI SORU ÇÖZÜMLERİ

Nokta Grafiği ve Kök-Yaprak Gösteriminden Çıkarım Yapma

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge **CC BY-NC 4.0** lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabilir.

ÇÖZÜMLÜ SORU 1 Nokta grafiğinden dört ölçü

Bir kitapçıda haftanın günlerine göre satılan dergi sayıları nokta grafiğiyle gösterilmiştir. Sütunlardaki nokta sayıları soldan sağa şöyledir:

Pazartesi 4, Salı 6, Çarşamba 5, Perşembe 6, Cuma 8, Cumartesi 6, Pazar 7

a) **Aritmetik ortalamayı** bulunuz.

b) **Ortancayı** bulunuz.

c) **Tepe değeri** ve **açıklığı** bulunuz.

d) Grafiğe bakarak hesap yapmadan söylenebilecek **iki bilgi** yazınız.

1 a) Aritmetik ortalama

Önce grafikteki bütün noktaları toplayalım:

4 + 6 + 5 + 6 + 8 + 6 + 7

= 10 + 5 + 6 + 8 + 6 + 7

= 15 + 6 + 8 + 6 + 7

= 21 + 8 + 6 + 7

= 29 + 6 + 7

= 35 + 7 = **42**

Sütun sayısı (veri sayısı): **7**

Ortalama = 42 : 7 = **6 dergi**

2 b) Ortanca

Önemli: Ortanca için grafikteki soldan sağa sırayı değil, **küçükten büyüğe sıralanmış** veri setini kullanırız.

Verileri sıralayalım:

4, 5, 6, **6**, 6, 7, 8

7 veri var; 7 tek sayı olduğundan tam ortadaki (4. sıradaki) değer alınır:

Ortanca = 6 dergi

Tuzağa dikkat: Grafikte ortadaki sütun perşembedir ve değeri 6'dır — bu kez tesadüfen doğru çıktı. Ama bu bir yöntem değildir; her zaman **sıralama** yapılmalıdır.

3 c) Tepe değer ve açıklık

Tepe değer: Hangi değer en çok tekrar ediyor?

Sıralı veri: 4, 5, **6, 6, 6**, 7, 8

6 değeri üç kez tekrar etmiştir (Salı, Perşembe, Cumartesi). Diğerleri birer kez.

Tepe değer = 6 dergi

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 1 **Nokta grafiğinden dört ölçü** (devam)

Grafikte bu, **üç sütunun da 6 nokta yüksekliğinde** olması demektir.

Açıklık: En büyük veri – En küçük veri

= 8 − 4 = **4 dergi**

Dikkat çekici sonuç: Ortalama, ortanca ve tepe değerin üçü de **6** çıktı. Bu, verilerin dengeli dağıldığını ve veri setinde **uç değer bulunmadığını** gösterir.

4 **d) Hesap yapmadan okunabilecek bilgiler**

Nokta grafiğinin en büyük avantajı, bazı bilgilerin **doğrudan şekilden** okunabilmesidir.

Bilgi 1 — En yoğun ve en sakin gün:

En yüksek sütun **cumadadır** (8 nokta) → en çok dergi o gün satılmış.

En alçak sütun **pazartesidedir** (4 nokta) → en az dergi o gün satılmış.

Bunları görmek için tek bir toplama bile yapmaya gerek yoktur.

Bilgi 2 — Genel eğilim:

Sütunlar hafta başında düşük başlayıp **hafta sonuna doğru yükselmektedir**. Cumartesi biraz düşüş olsa da pazar yeniden yükselmiştir. Bu, insanların hafta sonuna doğru dergi almaya daha çok zaman ayırdığını düşündürür.

Üçüncü bir bilgi: Üç sütunun aynı yükseklikte (6 nokta) olduğu hemen göze çarpar; bu da tepe değerin 6 olduğunu hesap yapmadan söyler.

Genel kural: En büyük, **en küçük**, **tepe değer** ve **genel eğilim** grafikten doğrudan okunur. **Ortalama** ve **ortanca** için ise hesap gerekir.

Sonuç: a) 6 dergi b) 6 dergi c) Tepe değer 6, açıklık 4 d) En çok cuma, en az pazartesi; satışlar hafta sonuna doğru artıyor

Dikkat: Ortanca için grafikteki soldan sağa sırayı KULLANMA; önce verileri küçükten büyüğe sırala.

ÇÖZÜMLÜ SORU 2 **Kategorik veride tepe değer**

Bir sınıftaki öğrencilere en sevdikleri meyve sorulmuş ve yanıtlar nokta grafiğiyle gösterilmiştir:
Elma 5, Muz 3, Çilek 7, Karpuz 4, Üzüm 7, Kiraz 3
a) Bu veri setinin **tepe değerini** bulunuz.
b) Bu veri setinin **aritmetik ortalaması** hesaplanabilir mi? Gerekçelendiriniz.
c) Bu veri setinin **ortancası** bulunabilir mi? Gerekçelendiriniz.
d) Sınıfta kaç öğrenci vardır? En az sevilen meyveler hangileridir?

1 **a) Tepe değer**

Sütunları karşılaştıralım:

Elma 5 · Muz 3 · **Çilek 7** · Karpuz 4 · **Üzüm 7** · Kiraz 3

En yüksek sütunlar **çilek** ve **üzüm**'dür; ikisi de **7** noktadan oluşuyor.

Tepe değer: Çilek ve Üzüm

Bu veri setinin **iki tepe değeri** vardır. Tepe değerin birden fazla olabileceğini hatırlayalım; "tepe değer çilektir" demek eksik bir cevap olurdu.

2 **b) Aritmetik ortalama hesaplanabilir mi?**

Hayır, hesaplanamaz.

Gerekçe: Bu grafikte yatay eksende **meyve adları** vardır. Meyve adı **kategorik** bir veridir.

Aritmetik ortalama, verileri **toplayıp veri sayısına bölmeyi** gerektirir. Oysa "Elma + Muz" diye bir toplama işlemi yoktur; meyveler toplanamaz.

Dikkat edilecek incelik: Sütunlardaki **sayılar** (5, 3, 7, 4, 7, 3) elbette toplanabilir. Ama bu sayılar meyveleri değil, **her meyveyi seçen öğrenci sayısını** gösterir. Bunların ortalamasını almak "bir meyveyi ortalama kaç öğrenci seçmiş?" sorusunu cevaplar — ki bu **başka bir sorudur**.

"Sınıfın en sevdiği meyvenin ortalaması" diye bir kavram yoktur. Bu yüzden veri setinin aritmetik ortalaması hesaplanamaz.

3 **c) Ortanca bulunabilir mi?**

Hayır, bulunamaz.

Gerekçe: Ortanca bulmak için önce verileri **küçükten büyüğe sıralamak** gerekir. Kategorik verilerde ise bir sıralama ölçütü yoktur.

Meyveleri nasıl sıralardık? Alfabetik sıra (Çilek, Elma, Karpuz, Kiraz, Muz, Üzüm) matematiksel bir sıralama değildir; "çilek muzdan küçüktür" demek anlamsızdır.

Sıralama yapılamadığı için **ortanca da bulunamaz**.

Sonuç: Kategorik verilerde kullanılabilen **tek** merkezî eğilim ölçüsü **tepe değerdir**. Bu, tepe değeri diğer ölçülerden ayıran en önemli özelliktir.

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 2 **Kategorik veride tepe değer** (devam)

4 **d) Öğrenci sayısı ve en az sevilenler**

Toplam öğrenci sayısı: Her öğrenci bir meyve seçtiğine göre bütün noktaları toplarız:

5 + 3 + 7 + 4 + 7 + 3

= 8 + 7 + 4 + 7 + 3

= 15 + 4 + 7 + 3

= 19 + 7 + 3

= 26 + 3 = **29 öğrenci**

En az sevilen meyveler: En alçak sütunları arayalım.

Muz **3** · Kiraz **3** → ikisi de en alçak

En az sevilenler: Muz ve Kiraz (3'er öğrenci)

Ek yorum: Bu grafikte hem tepe değer hem de en az seçilen kategori **ikişer tanedir**. Grafiğin şekli, sınıfın belirgin bir meyvede birleşmediğini; tercihlerin iki uçta toplandığını gösteriyor.

Sonuç: a) Çilek ve Üzüm (iki tepe değer) b) Hayır; kategorik veriler toplanamaz c) Hayır; kategorik veriler sıralanamaz d) 29 öğrenci; en az muz ve kiraz

Dikkat: Yatay eksende isim/renk/tür varsa veri KATEGORİKTİR; orada yalnızca tepe değer kullanılabilir.

ÇÖZÜMLÜ SORU 3 **Kök-yaprak gösteriminden çıkarım**

Bir okulda 6. sınıf öğrencilerinin bir haftada yaptığı spor süreleri (dakika) kök-yaprak gösterimiyle verilmiştir:

Kök 4 → 0, 5, 5, 8
Kök 5 → 2, 2, 2, 6
Kök 6 → 1, 3

a) Veri setini **yazıp** kaç öğrenci olduğunu belirtiniz.
b) **Tepe değeri** ve **açıklığı** bulunuz.
c) **Ortancayı** bulunuz.
d) Hesap yapmadan **aritmetik ortalamanın onlar basamağını** tahmin edip sonra hesaplayarak kontrol ediniz.

1 **a) Veri setini yazma**

Her kökü, yanındaki yapraklarla birleştirelim:

Kök 4 → yapraklar 0, 5, 5, 8 → **40, 45, 45, 48**

Kök 5 → yapraklar 2, 2, 2, 6 → **52, 52, 52, 56**

Kök 6 → yapraklar 1, 3 → **61, 63**

Veri seti (zaten sıralı):

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 3 **Kök-yaprak gösteriminden çıkarım** (devam)

40, 45, 45, 48, 52, 52, 52, 56, 61, 63

Öğrenci sayısı: Yaprakları sayalım: 4 + 4 + 2 = **10 öğrenci**

Uyarı: Kökler (4, 5, 6) veri değildir. "3 veri var" demek yaygın ama yanlış bir okumadır.

2 b) Tepe değer ve açıklık

Tepe değer: Tekrar eden yaprakları arayalım.

Kök 4 satırında **5** yaprağı iki kez → 45 iki kez

Kök 5 satırında **2** yaprağı **üç kez** → 52 üç kez

En çok tekrar eden değer **52**'dir (üç kez).

Tepe değer = 52 dakika

Açıklık:

En büyük veri: son yaprak → **63**

En küçük veri: ilk yaprak → **40**

Açıklık = 63 − 40 = **23 dakika**

3 c) Ortanca

Veriler zaten sıralı olduğu için doğrudan sayabiliriz:

40, 45, 45, 48, **52**, **52**, 52, 56, 61, 63

10 veri var; 10 **çift** sayı olduğundan tam ortada tek bir değer yoktur. Ortadaki **iki değerin** (5. ve 6. sıradakiler) ortalamasını alırız.

5. veri: **52** · 6. veri: **52**

Ortanca = (52 + 52) : 2 = 104 : 2 = **52 dakika**

Not: Ortanca ile tepe değer aynı çıktı (ikisi de 52). Bu, verilerin 52 dakika çevresinde yoğunlaştığını gösteriyor — kök 5 satırının en kalabalık satır olması da bunu doğruluyor.

Sayma kolaylığı: Kök-yaprak gösteriminde ortancayı bulmak için baştan ve sondan eşit sayıda ilerlemek yeterlidir; sıralama işi zaten yapılmıştır.

4 d) Ortalama tahmini ve kontrolü

Tahmin: Satırlardaki yaprak sayılarına bakalım.

Kök 4 → **4** veri · Kök 5 → **4** veri · Kök 6 → **2** veri

Burada birinci ve ikinci satır **eşit** sayıda veriye sahip. Böyle bir durumda tahmin kesin bir cevap veremez; ama üçüncü satırda da 2 veri olduğu için ağırlık **4 ile 5 arası**, biraz da 5'e doğru kayıyor gibi görünüyor. Tahminimiz: onlar basamağı **5**.

Şimdi hesaplayalım:

Kök 4 satırı: 40 + 45 + 45 + 48 = **178**

Kök 5 satırı: 52 + 52 + 52 + 56 = **212**

Kök 6 satırı: 61 + 63 = **124**

Genel toplam = 178 + 212 + 124 = **514**

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 3 **Kök-yaprak gösteriminden çıkarım** (devam)

Ortalama = 514 : 10 = **51,4 dakika**

Onlar basamağı 5 ✓ Tahminimiz doğru çıktı.

Değerlendirme: Bu örnekte iki satır eşit veriye sahip olduğu için tahmin **zayıftı**; kesin sonucu ancak hesap verdi. Tahmin yöntemi, bir satır diğerlerinden **belirgin şekilde kalabalıksa** güvenilirdir.

Sonucun yorumu: Öğrenciler haftada ortalama yaklaşık **51 dakika** spor yapıyor; ortanca da 52 dakika. İki ölçünün birbirine çok yakın olması, veri setinde **uç değer bulunmadığını** gösterir.

Sonuç: a) 40, 45, 45, 48, 52, 52, 52, 56, 61, 63 — 10 öğrenci b) Tepe değer 52, açıklık 23 c) 52 dakika d) Tahmin 5; hesap 51,4 ✓

Dikkat: Kök-yaprakta veri sayısı için YAPRAKLARI say; kökler veri değildir.

ÇÖZÜMLÜ SORU 4 **İki gösterim arasında geçiş ve karşılaştırma**

Bir sınıftaki sekiz öğrencinin matematik sınavı puanları şöyledir:
72, 85, 72, 91, 68, 85, 72, 90
a) Bu verileri **kök-yaprak gösterimine** çeviriniz.
b) **Tepe değeri**, **ortancayı** ve **açıklığı** bulunuz.
c) Bu veriler için **nokta grafiği** uygun bir gösterim olur muydu? Tartışınız.
d) **Aritmetik ortalamayı** hesaplayıp ortanca ile karşılaştırınız.

1 **a) Kök-yaprak gösterimine çevirme**

1. adım — verileri sırala.

68, 72, 72, 72, 85, 85, 90, 91

2. adım — onlar basamaklarını kök yap.

Kökler: **6, 7, 8, 9**

3. adım — birler basamaklarını yaprak olarak yaz.

Kök 6 → 8 (68)
Kök 7 → 2, 2, 2 (72, 72, 72)
Kök 8 → 5, 5 (85, 85)
Kök 9 → 0, 1 (90, 91)

Kontrol: Yaprak sayısı 1 + 3 + 2 + 2 = **8** ✓ Sekiz öğrenci vardı.

2 **b) Tepe değer, ortanca ve açıklık**

Tepe değer: Kök 7 satırında **2** yaprağı **üç kez** geçiyor → 72 üç kez tekrar etmiş. Kök 8 satırında 5 yaprağı iki kez → 85 iki kez.

En çok tekrar eden: **72 puan**

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 4 **İki gösterim arasında geçiş ve karşılaştırma** (devam)

Ortanca: Sıralı veri:

68, 72, 72, **72**, **85**, 85, 90, 91

8 veri var (çift); ortadaki iki değerin (4. ve 5.) ortalaması:

Ortanca = (72 + 85) : 2 = 157 : 2 = **78,5 puan**

Dikkat: 78,5 değeri veri setinde **yoktur**. Ortanca, veri setinin bir elemanı olmak zorunda değildir.

Açıklık: 91 − 68 = **23 puan**

3 **c) Nokta grafiği uygun olur muydu?**

Uygun olurdu ama pratik olmazdı.

Neden uygun olurdu? Veriler sayısaldır ve her öğrenci bir kategori olarak yatay eksene yerleştirilebilir.

Neden pratik olmazdı?

Nokta grafiğinde her sütunun yüksekliği, o kategorinin değeri **kadar nokta** içerir. Buradaki puanlar 68 ile 91 arasında olduğuna göre:

- En kısa sütun **68 nokta**,
- En uzun sütun **91 nokta** içerecekti.

Toplamda **635 nokta** çizmek ve saymak gerekirdi! Üstelik 85 ile 91 arasındaki farkı gözle ayırt etmek neredeyse imkânsız olurdu.

Sonuç: Nokta grafiği **küçük sayılar** (0–10 gibi) için idealdir. İki basamaklı ve birbirine yakın sayılarda **kök-yaprak gösterimi** çok daha uygundur; hem yer kaplamaz hem her veri tek tek okunur.

4 **d) Ortalama ve karşılaştırma**

Aritmetik ortalama:

Toplamı kök-yaprak satırları üzerinden bulalım:

Kök 6: 68

Kök 7: 72 + 72 + 72 = **216**

Kök 8: 85 + 85 = **170**

Kök 9: 90 + 91 = **181**

Genel toplam = 68 + 216 + 170 + 181

= 284 + 170 + 181

= 454 + 181 = **635**

Ortalama = 635 : 8 = **79,375 puan**

Karşılaştırma:

Ortalama **79,375** · Ortanca **78,5**

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 4 **İki gösterim arasında geçiş ve karşılaştırma** (devam)

İki değer birbirine **çok yakın** (aradaki fark 1 puandan az). Bu, veri setinde **uç değer bulunmadığını** ve verilerin görece dengeli dağıldığını gösterir.

Kök-yaprak gösteriminden okunan dağılım: En kalabalık satır **kök 7**'dir (3 veri). Yani puanlar ağırlıklı olarak **70'li** aralıkta toplanmış; ama 80'li ve 90'lı aralıklarda da ikişer veri var. Sınıf, iki grup hâlinde ayrışmış gibi görünüyor: 70'lerde bir küme, 85 ve üstünde bir küme.

Bu ayrışma yüzünden ortanca (78,5) bu iki kümenin **tam ortasına** düşmüş ve hiçbir öğrencinin puanına denk gelmemiştir.

Sonuç: a) Kök 6→8, Kök 7→2,2,2, Kök 8→5,5, Kök 9→0,1 b) Tepe değer 72, ortanca 78,5, açıklık 23 c) Uygun ama pratik değil; 635 nokta gerekirdi d) Ortalama 79,375; ortancaya çok yakın

Dikkat: İki basamaklı ve çok sayıda veri varsa kök-yaprak, küçük sayılar ve az kategori varsa nokta grafiği seç.