ÇÖZÜMLER

# Kesir ile Bölme İşlemi İlişkisi ve Devirli Ondalık Gösterimler

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge **CC BY-NC 4.0** lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabilir.

## 1. Bölüm Soru 1–5

**1** Aşağıdaki kesirlerin ondalık gösterimlerini paydayı genişleterek bulunuz.

**a) 3/4**
**b) 7/50**
**c) 9/20**
**d) Bulduğunuz üç sayıyı küçükten büyüğe sıralayınız.**

**a) 3/4**
Paydayı 100 yapmak için 25 ile çarpmalıyız (4 · 25 = 100):
3/4 = (3 · 25)/(4 · 25) = 75/100 = **0,75**

**b) 7/50**
Paydayı 100 yapmak için 2 ile çarpmalıyız (50 · 2 = 100):
7/50 = (7 · 2)/(50 · 2) = 14/100 = **0,14**

**c) 9/20**
Paydayı 100 yapmak için 5 ile çarpmalıyız (20 · 5 = 100):
9/20 = (9 · 5)/(20 · 5) = 45/100 = **0,45**

**d) Sıralama**
Üç sayının da iki ondalık basamağı var; doğrudan karşılaştırabiliriz.

Onda birler basamaklarına bakalım: 7, 1 ve 4
1 < 4 < 7

Sıralama: **0,14 < 0,45 < 0,75**
yani **7/50 < 9/20 < 3/4**

*Kesirlerle kontrol:* Üç kesri de paydası 100 olacak biçimde yazdık: 14/100, 45/100 ve 75/100. Paydalar eşit olduğuna göre payları karşılaştırmak yeterlidir: 14 < 45 < 75 ✓

**a) 0,75 b) 0,14 c) 0,45 d) 0,14 < 0,45 < 0,75**

**2** Aşağıdaki altı kesir veriliyor.

I. 3/8
II. 5/6
III. 7/25
IV. 4/9
V. 9/12
VI. 7/15

**a) Her kesri en sade hâline getirip paydasını asal çarpanlarına ayırınız.**
**b) Ondalık gösterimi sonlu olanlarla devirli olanları ayırınız.**
**c) V. kesir neden sonlu gösterime sahiptir? Açıklayınız.**

**a) En sade hâller ve asal çarpanlar**

**I. 3/8** → en sade hâlde. 8 = 2 · 2 · 2

**II. 5/6** → en sade hâlde. 6 = 2 · **3**

**III. 7/25** → en sade hâlde. 25 = 5 · 5

**IV. 4/9** → en sade hâlde. 9 = **3** · **3**

**V. 9/12** → sadeleşir! Pay ve paydayı 3'e bölelim: 9/12 = **3/4**. 4 = 2 · 2

**VI. 7/15** → en sade hâlde. 15 = **3** · 5

**b) Gruplama**
Paydasında yalnız 2 ve 5 bulunanlar sonlu, başka asal çarpan bulunanlar devirlidir.

**Sonlu olanlar: I, III, V**
- I: 3/8 = **0,375**
- III: 7/25 = 28/100 = **0,28**
- V: 3/4 = 75/100 = **0,75**

**Devirli olanlar: II, IV, VI**
- II: 5/6 = 0,8333... = $\mathbf{0,8\overline{3}}$
- IV: 4/9 = 0,444... = $\mathbf{0,\overline{4}}$
- VI: 7/15 = 0,4666... = $\mathbf{0,4\overline{6}}$

**c) V. kesir neden sonlu?**
9/12 kesrinin paydası 12'dir ve 12 = 2 · 2 · **3** biçiminde çarpanlarına ayrılır. Paydada 3 olduğuna göre gösterimin devirli olması beklenirdi.

Ama kesir henüz **en sade hâlde değildi**. Pay ve paydanın ortak böleni 3'tür:
9/12 = (9 : 3)/(12 : 3) = **3/4**

En sade hâlde payda **4 = 2 · 2**'dir; yalnız 2 çarpanı vardır. O hâlde gösterim **sonludur**: 3/4 = 0,75 ✓

**Çıkarılacak ders:** Sonlu mu devirli mi kararını vermeden önce kesir mutlaka sadeleştirilmelidir. Bu adım atlanırsa karar yanlış çıkar.

**b) Sonlu: I, III, V · Devirli: II, IV, VI c) 9/12 = 3/4, payda 2 · 2**

**3** Aşağıdaki kesirlerin ondalık gösterimlerini **payı paydaya bölerek** bulunuz.

**a) 7/8**
**b) 23/4**
**c) 11/16**
**d) Bulduğunuz üç sayıdan hangisi en büyüktür?**

**a) 7/8**
7 sayısı 8'den küçük; bölüme **0** yazılır ve virgül konur.

70 : 8 → **8** (kalan 6)
60 : 8 → **7** (kalan 4)
40 : 8 → **5** (kalan 0)

Kalan sıfır oldu, işlem bitti.
**7/8 = 0,875**

**b) 23/4**
23 : 4 → **5** (kalan 3). Virgül konur.

30 : 4 → **7** (kalan 2)
20 : 4 → **5** (kalan 0)

**23/4 = 5,75**

**c) 11/16**
11 sayısı 16'dan küçük; bölüme **0** yazılır ve virgül konur.

110 : 16 → **6** (kalan 14)
140 : 16 → **8** (kalan 12)
120 : 16 → **7** (kalan 8)
80 : 16 → **5** (kalan 0)

**11/16 = 0,6875**

**d) En büyük sayı**
Bulduğumuz değerler: **0,875** · **5,75** · **0,6875**
Tam kısımlara bakmak yeterlidir: 0, 5 ve 0

5 > 0 olduğuna göre **en büyük sayı 5,75'tir**, yani **23/4**.
*Mantık kontrolü:* 23/4 kesrinde pay paydadan büyüktür (bileşik kesir); o hâlde değeri 1'den büyük olmalıdır. Diğer iki kesirde pay paydadan küçüktür; değerleri 1'den küçüktür ✓
*Not:* Üç kesrin de paydası (8, 4, 16) yalnız 2 çarpanından oluşur; bu yüzden üç gösterim de sonlu çıktı.

**a) 0,875 b) 5,75 c) 0,6875 d) 23/4 = 5,75**

**4** Efe, **7/100** kesrinin ondalık gösterimini şöyle yazmıştır:

"Payda 100, pay 7. Payı virgülden sonra yazarım: **0,7**"

**a) Efe'nin hatasını açıklayınız.**
**b) 7/100 kesrinin doğru ondalık gösterimini yazınız.**
**c) Efe'nin yazdığı 0,7 sayısı hangi kesre eşittir?**
**d) 7/10, 7/100 ve 7/1000 kesirlerinin ondalık gösterimlerini yazıp aralarındaki ilişkiyi açıklayınız.**

**a) Hata nerede?**
Efe, **paydadaki sıfır sayısını** hesaba katmamıştır. Payı doğrudan virgülden sonra yazmış, kaç ondalık basamak olması gerektiğini düşünmemiştir.

Kural şudur: **Paydadaki sıfır sayısı kadar ondalık basamak olur.** Payda 100 olduğuna göre **iki** ondalık basamak gerekir.

**b) Doğru gösterim**
Pay 7 sayısını sağdan başlayarak yerleştirelim:
• Yüzde birler basamağı: **7**
• Onda birler basamağı boş kaldı → **0** yazılır

**7/100 = 0,07**

*Kontrol:* 0,07 sayısının yüzde birler basamağındaki rakam 7'dir ve basamak değeri 7/100'dür ✓

**c) Efe'nin yazdığı 0,7 hangi kesir?**
0,7 sayısında bir ondalık basamak var; o hâlde paydası 10 olan bir kesirdir:
**0,7 = 7/10**

Bunu paydası 100 olacak biçimde de yazabiliriz:
7/10 = 70/100

Yani Efe aslında **70/100** yazmış oldu; oysa soru **7/100** idi. Aradaki fark on kattır!

**d) Üç kesri karşılaştıralım**
• **7/10 = 0,7** (bir basamak)
• **7/100 = 0,07** (iki basamak)
• **7/1000 = 0,007** (üç basamak)

**İlişki:** Pay aynı kalırken payda her seferinde 10 kat büyüyor. Bütünü daha çok parçaya böldüğümüz için her parça daha küçük oluyor.

Bu yüzden sayılar da her adımda **10 kat küçülüyor**:
0,7 → 0,07 → 0,007

Ondalık gösterimde bu, 7 rakamının her seferinde bir basamak **sağa kayması** olarak görünür.

**a) Basamak sayısını atlamış b) 0,07 c) 0,7 = 7/10 = 70/100 d) Her adımda 10 kat küçülür**

**5** Bir öğrenci şöyle diyor:

"Paydası **tek sayı** olan her kesrin ondalık gösterimi devirlidir."

**a) Öğrenci haklı mıdır? Gerekçesiyle açıklayınız.**
**b) İddiayı çürüten bir karşı örnek veriniz.**
**c) Doğru kuralı yazınız.**
**d) 7/9 ve 7/5 kesirlerinden hangisinin ondalık gösterimi devirlidir? Hesaplayarak gösteriniz.**

**a) Öğrenci haklı mıdır?**
**Haklı değildir.**

Belirleyici olan paydanın tek ya da çift olması değil, paydanın **hangi asal çarpanlardan** oluştuğudur.

Tek sayılar arasında **5** ve onun kuvvetleri (25, 125, ...) de vardır ve bunlar sonlu gösterim verir; çünkü 5 çarpanı paydayı 10, 100 ya da 1000 yapmaya uygundur.

**b) Karşı örnek**
**3/5** kesrini inceleyelim. Paydası **5**'tir, yani tek sayıdır.

Paydayı 10 yapmak için pay ve paydayı 2 ile çarpalım:
3/5 = 6/10 = **0,6**

Gösterim **sonludur**, devirli değildir. Öğrencinin iddiası çürütüldü.

Başka karşı örnekler de var: 7/25 = 28/100 = **0,28** · 9/125 = 72/1000 = **0,072**

**c) Doğru kural**
"**En sade hâldeki** bir kesrin paydası yalnız **2** ve **5** asal çarpanlarından oluşuyorsa ondalık gösterimi **sonludur**; paydada başka bir asal çarpan varsa gösterim **devirlidir**."

Bu kural hem tek hem çift paydalarda geçerlidir. Örneğin payda 6 olduğunda (çift sayı) gösterim devirlidir; çünkü 6 = 2 · **3**'tür.

**d) 7/9 ile 7/5**

**7/9:** Payda 9 = **3 · 3**'tür. Paydada 3 çarpanı var → **devirli**
Bölme yapalım: 70 : 9 → 7 (kalan 7), 70 : 9 → 7 (kalan 7), ...
Kalan hep 7 çıkıyor.
7/9 = 0,777... = $0,\overline{7}$

**7/5:** Payda 5'tir; yalnız 5 çarpanı var → **sonlu**
7/5 = 14/10 = **1,4**

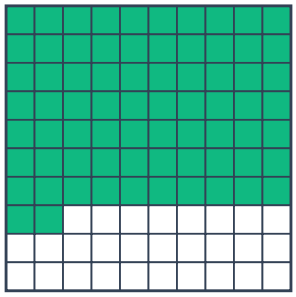
**Cevap: 7/9 kesrinin ondalık gösterimi devirlidir.**

İki kesrin de paydası tek sayı olduğu hâlde biri devirli, diğeri sonlu çıktı. Bu da öğrencinin kuralının işlemediğini bir kez daha gösteriyor.

**a) Haklı değil b) 3/5 = 0,6 c) Payda yalnız 2 ve 5 ise sonlu d) 7/9 devirli**

## 2. Bölüm Soru 6–10

**6** Aşağıdaki modelde bir bütün **100 eş kareye** ayrılmış ve bir kısmı boyanmıştır.



**a) Boyalı kısmı paydası 100 olan bir kesirle yazınız.**
**b) Bu kesrin en sade hâlini bulunuz.**
**c) Boyalı kısmın ondalık gösterimini yazınız.**
**d) Boyanmayan kısmın ondalık gösterimini yazınız.**
**e) İki ondalık gösterimin toplamı kaçtır? Neden?**

**a) Boyalı kısmın kesri**
Boyalı kareleri sayalım: **7 tam satır** (7 · 10 = 70 kare) ve **2 tek kare**
Toplam: 70 + 2 = **72 kare**

Bütün 100 kareye ayrıldığına göre boyalı kısım:
**72/100**

**b) En sade hâli**
72 ve 100 sayılarının ortak bölenlerini arayalım. İkisi de 4'e bölünür:
72 : 4 = **18**
100 : 4 = **25**

72/100 = **18/25**

18 = 2 · 3 · 3 ve 25 = 5 · 5 olduğuna göre başka ortak bölen yoktur; kesir en sade hâldedir.

**c) Boyalı kısmın ondalık gösterimi**
Paydası 100 olduğuna göre iki ondalık basamak olur:
72/100 = **0,72**

*Kontrol:* En sade hâlinden de bulabiliriz. 18/25 = (18 · 4)/(25 · 4) = 72/100 = 0,72 ✓

**d) Boyanmayan kısım**
Boyanmayan kare sayısı: 100 − 72 = **28 kare**

28/100 = **0,28**

En sade hâli: 28/100 = **7/25**

**e) İki gösterimin toplamı**
0,72 + 0,28 = **1**

**Neden 1 çıktı?** Çünkü boyalı kısım ile boyanmayan kısım birlikte **bütünü** oluşturur:
72/100 + 28/100 = 100/100 = **1**

Yüzde birler cinsinden düşünürsek: 72 + 28 = 100 kare, yani bütünün tamamı ✓

**Pratik kullanım:** Bu özellik bir kontrol aracıdır. Bir bütünü iki parçaya ayırdığında parçaların ondalık gösterimlerinin toplamı 1 çıkmıyorsa bir yerde hata vardır.

**a) 72/100 b) 18/25 c) 0,72 d) 0,28 e) 1**

**7** Aşağıdaki sayı doğrusunda 0 ile 1 arası **on eş parçaya** bölünmüş ve iki nokta işaretlenmiştir.




**a) A ve B noktalarının gösterdiği sayıları ondalık gösterimle yazınız.**
**b) Bu sayıları paydası 10 olan kesirler hâlinde yazınız.**
**c) Kesirleri en sade hâliyle yazınız.**
**d) A ile B arasındaki fark kaçtır?**
**e) 1/3 kesri bu doğruda hangi iki bölme noktası arasındadır? Gerekçesini yazınız.**

**a) A ve B noktaları**
0 ile 1 arası on eş parçaya bölündüğüne göre her bölme noktası bir **onda birdir**: 0,1 0,2 ... 0,9

- **A** noktası 0'dan sonraki **üçüncü** bölme noktasındadır → **A = 0,3**
- **B** noktası 0'dan sonraki **sekizinci** bölme noktasındadır → **B = 0,8**

**b) Paydası 10 olan kesirler**
Bir ondalık basamağı olan sayıların paydası 10'dur:
- A = 0,3 = **3/10**
- B = 0,8 = **8/10**

**c) En sade hâlleri**
- **3/10:** 3 asal sayıdır ve 10'u bölmez → kesir zaten en sade hâldedir: **3/10**
- **8/10:** Pay ve payda 2'ye bölünür → 8/10 = **4/5**

*Kontrol:* 4/5 = 8/10 = 0,8 ✓

**d) A ile B arasındaki fark**
0,8 − 0,3 = **0,5**

Kesirlerle: 8/10 − 3/10 = 5/10 = **1/2**

İki sonuç aynıdır; 0,5 = 1/2'dir.

Sayı doğrusunda da görülebilir: A ile B arasında **beş** bölme aralığı vardır, yani 5 onda bir.

**e) 1/3 kesri nerede?**
Önce 1/3 kesrinin ondalık gösterimini bulalım:
10 : 3 → 3 (kalan 1), 10 : 3 → 3 (kalan 1), ...
1/3 = 0,333... = $\mathbf{0,\overline{3}}$

Şimdi 0,333... sayısının hangi iki bölme noktası arasında olduğuna bakalım:
0,3 < 0,333... < 0,4

**Cevap: 1/3 kesri 0,3 ile 0,4 bölme noktaları arasındadır.**

Yani A noktasının (0,3) hemen sağındadır, ama bir sonraki bölme noktasına (0,4) ulaşmaz.

devamı →

**7** *(çözümün devamı)*

**Önemli nokta:** 1/3 kesri hiçbir bölme noktasının **tam üzerine** düşmez. Aralığı yüz, bin, hatta bir milyon eş parçaya bölsek bile bu böyle kalır. İşte bu yüzden 1/3 kesrinin ondalık gösterimi **devirlidir**; asla bitmez.

**a) 0,3 ve 0,8 b) 3/10 ve 8/10 c) 3/10 ve 4/5 d) 0,5 e) 0,3 ile 0,4 arasında**

**8** Bir markette **8 kg** elmanın fiyatı **54 TL**'dir.

**a) 1 kilogram elmanın fiyatını kesir olarak yazıp en sade hâline getiriniz.**
**b) Bu kesrin ondalık gösterimini payı paydaya bölerek bulunuz.**
**c) 3 kilogram elma kaç TL'dir?**
**d) Bu fiyatın ondalık gösterimi sonlu mudur? Paydanın asal çarpanlarıyla açıklayınız.**

**a) 1 kilogramın fiyatı**
Birim fiyat bir **bölme** işlemiyle bulunur: toplam fiyat, toplam kilogram sayısına bölünür.

1 kg elmanın fiyatı: **54/8 TL**

Sadeleştirelim. Pay ve payda 2'ye bölünür:
54/8 = (54 : 2)/(8 : 2) = **27/4 TL**

27 tek sayıdır, 4 ile ortak böleni yoktur; kesir en sade hâldedir.

**b) Ondalık gösterimi**
27 : 4 bölmesini yapalım.

27 : 4 → **6** (kalan 3). Virgül konur.
30 : 4 → **7** (kalan 2)
20 : 4 → **5** (kalan 0)

Kalan sıfır oldu, işlem bitti.
**1 kg elma 6,75 TL'dir.**

*Kontrol:* 6,75 · 8 = 54 ✓

**c) 3 kilogram elmanın fiyatı**
3 · 6,75 = ?

Adım adım:
3 · 6 = 18
3 · 0,75 = 2,25
Toplam: 18 + 2,25 = **20,25 TL**

*Kesirlerle kontrol:* 3 · (27/4) = 81/4. 81 : 4 → 20 (kalan 1), 10 : 4 → 2 (kalan 2), 20 : 4 → 5 (kalan 0) → **20,25** ✓

devamı →

**8** *(çözümün devamı)*

**d) Gösterim neden sonlu?**
En sade hâldeki kesir **27/4** idi. Paydayı asal çarpanlarına ayıralım:
4 = **2 · 2**

Paydada yalnız **2** çarpanı var; 3, 7 gibi başka bir asal çarpan yok.

**Kural gereği gösterim SONLUDUR.** ✓

Gerçekten de (b) şıkkında bölme işlemi üç basamakta bitti: 6,75

*Pratik anlamı:* Fiyat tam olarak 6 lira 75 kuruş yazılabiliyor. Payda 3 olsaydı (örneğin 54 TL'lik elma 3 değil de 6 kilogram olsaydı) sonuç devirli çıkabilir ve kuruş cinsinden tam yazılamazdı.

**a) 27/4 TL b) 6,75 TL c) 20,25 TL d) Sonlu, 4 = 2 · 2**

**9** **13 metre** uzunluğundaki bir tel **20 eş parçaya** bölünecektir.

**a) Bir parçanın uzunluğunu kesir ve ondalık gösterimle yazınız.**
**b) Aynı tel 3 eş parçaya bölünseydi bir parça kaç metre olurdu?**
**c) Hangi durumda parça uzunluğu tam olarak yazılabilir? Gerekçelendiriniz.**
**d) "(b) şıkkında 4,33 m desek yeterli" diyen birine ne söylersiniz?**

**a) 20 eş parçaya bölme**
Bir parçanın uzunluğu: **13/20 metre**

Bu kesir en sade hâldedir (13 asal sayıdır ve 20'yi bölmez).

Paydayı 100 yapmak için pay ve paydayı 5 ile çarpalım:
13/20 = 65/100 = **0,65 m**

*Kontrol:* 0,65 · 20 = 13 ✓

**b) 3 eş parçaya bölme**
Bir parçanın uzunluğu: **13/3 metre**

Bölme yapalım:
13 : 3 → **4** (kalan 1). Virgül konur.
10 : 3 → **3** (kalan 1)
10 : 3 → **3** (kalan 1)
10 : 3 → **3** (kalan 1)

Kalan hep **1** çıkıyor; bölme hiç bitmiyor.

13/3 = 4,333... = **$4,\overline{3}$ m**

**c) Hangi durumda tam yazılabilir?**
**20 eş parçaya bölmede** uzunluk tam olarak yazılabilir.

devamı →

**9** *(çözümün devamı)*

**Gerekçe:** Paydaları asal çarpanlarına ayıralım.
• **13/20:** 20 = **2 · 2 · 5** → yalnız 2 ve 5 → **SONLU**
• **13/3:** 3 = **3** → 2 ve 5 dışında bir asal çarpan → **DEVİRLİ**

İki kesir de en sade hâldedir, o hâlde kural doğrudan uygulanabilir.

**d) "4,33 m yeterli" diyen birine ne söylenir?**
4,33 sayısı gerçek uzunluğa **yakın** bir değerdir, ama ona **eşit değildir**.

Gerçek uzunluk 4,333... m'dir; 4,33 ise bundan biraz küçüktür.

Farkın ne kadar olduğuna bakalım: Üç parçanın toplam uzunluğu tam 13 m olmalıdır.
• Gerçek değerle: 3 · 4,333... = **13 m** ✓
• 4,33 ile: 3 · 4,33 = **12,99 m**

Aradaki **1 santimetrelik** fark, yuvarlamadan gelen kayıptır.

**Söylenecek:** "4,33 m bir **yaklaşık değerdir**, tam değer değildir. Kâğıt üzerinde tam değeri göstermek için 13/3 kesrini ya da $4,\overline{3}$ devirli gösterimini kullanmak gerekir. Ölçme yaparken yaklaşık değer kullanılabilir; ama hesapta kullanılırsa küçük bir hata oluşur."

**a) 13/20 = 0,65 m b) 13/3 = 4,3 devirli m c) 20'ye bölmede; 20 = 2 · 2 · 5**

**10** Beril, **0,4333...** sayısını devir çizgisiyle yazarken çizgiyi **43** rakamlarının üzerine koymuş ve **$0,\overline{43}$** biçiminde yazmıştır.

**a) Beril'in hatasını açıklayınız.**
**b) Sayının doğru yazılışını yazınız.**
**c) Beril'in yazdığı sayının açılımını yazınız.**
**d) İki sayıyı karşılaştırınız. Hangisi büyüktür?**

**a) Hata nerede?**
Devir çizgisi yalnız **gerçekten tekrar eden** rakamların üzerine konur.

0,4333... sayısını basamak basamak okuyalım:
• Onda birler basamağı: **4** (bir kez geçiyor, tekrar etmiyor)
• Yüzde birler basamağından itibaren: **3, 3, 3, ...**

Tekrar eden rakam yalnız **3**'tür. Beril çizgiyi 4 rakamının da üzerine koyarak 4'ün de tekrar ettiğini söylemiş oldu; bu yanlıştır.

**b) Doğru yazılış**
Çizgi yalnız 3 üzerine konur:
**$0,4\overline{3}$**

**c) Beril'in yazdığı sayının açılımı**
$0,\overline{43}$ yazılışında çizgi **43** ikilisinin üzerindedir; yani bu ikili sürekli tekrar eder:
**0,43434343...**

Bu, tamamen farklı bir sayıdır.

devamı →

**10** *(çözümün devamı)*

**d) İki sayıyı karşılaştıralım**
Basamak basamak yazalım:

Doğru sayı: **0,4 3 3 3 3 ...**
Beril'in sayısı: **0,4 3 4 3 4 ...**

Karşılaştırmaya soldan başlayalım:
• Onda birler: 4 = 4 → eşit, devam
• Yüzde birler: 3 = 3 → eşit, devam
• **Binde birler: 3 ile 4** → 3 < 4

İlk farklı rakamı bulduk.

**0,4333... < 0,434343...**

Yani **Beril'in yazdığı sayı daha büyüktür.**

*Pratik yöntem:* Devir çizgisini koymadan önce bölme işlemini yap ve hangi rakamların gerçekten tekrar ettiğini gör. 13/30 bölmesinde kalan hep 10 çıkar ve bölüme hep 3 yazılır; yani tekrar eden yalnız 3'tür.

**b) 0,4 üzeri çizgili 3 c) 0,434343... d) Beril'in sayısı büyüktür**

## 3. Bölüm Soru 11–15

**11** **5/6** ve **7/12** kesirleri veriliyor.

**a) 5/6 kesrinin ondalık gösterimini bölme yaparak bulunuz.**
**b) 7/12 kesrinin ondalık gösterimini bölme yaparak bulunuz.**
**c) İki kesri karşılaştırınız.**
**d) İki kesrin farkını bulunuz. Bu farkın ondalık gösterimi sonlu mudur devirli midir?**

**a) 5/6 kesrinin ondalık gösterimi**
5 sayısı 6'dan küçük; bölüme **0** yazılır ve virgül konur.

50 : 6 → **8** (kalan 2)
20 : 6 → **3** (kalan 2)
20 : 6 → **3** (kalan 2)
20 : 6 → **3** (kalan 2)

İlk basamaktan sonra kalan hep **2** çıkıyor ve bölüme hep **3** yazılıyor.

5/6 = 0,8333... = $0,8\overline{3}$
*Kural kontrolü:* 6 = 2 · **3** olduğu için gösterimin devirli olması beklenirdi ✓

devamı →

**11** *(çözümün devamı)*

**b) 7/12 kesrinin ondalık gösterimi**
7 sayısı 12'den küçük; bölüme **0** yazılır ve virgül konur.

70 : 12 → **5** (kalan 10)
100 : 12 → **8** (kalan 4)
40 : 12 → **3** (kalan 4)
40 : 12 → **3** (kalan 4)

İkinci basamaktan sonra kalan hep **4** çıkıyor.

7/12 = 0,58333... = $\mathbf{0,58\overline{3}}$

*Kural kontrolü:* 12 = 2 · 2 · **3** → devirli ✓

**c) Karşılaştırma**
**Ondalık gösterimlerle:**
0,8333... ile 0,58333...
Onda birler basamağı: 8 ile 5 → 8 > 5
**5/6 > 7/12**

**Kesirlerle:** Paydaları eşitleyelim. 12 sayısı 6'nın katıdır:
5/6 = (5 · 2)/(6 · 2) = **10/12**

Şimdi paydalar eşit; payları karşılaştıralım:
10 > 7 → **10/12 > 7/12** ✓

**d) İki kesrin farkı**
Paydaları eşitlenmiş hâlleriyle çıkaralım:
10/12 − 7/12 = **3/12**

Sadeleştirelim. Pay ve payda 3'e bölünür:
3/12 = **1/4**

**Ondalık gösterimi:** Payda 4 = **2 · 2**'dir; yalnız 2 çarpanı var.
Kural gereği gösterim **SONLUDUR**.

1/4 = 25/100 = **0,25**

**Şaşırtıcı sonuç:** İki devirli sayının farkı **sonlu** bir ondalık gösterim verdi!

*Kontrol:* 0,8333... − 0,58333... = 0,25 ✓ Devreden kısımlar birbirini götürdü.

Bunun sebebi, iki kesrin paydalarındaki 3 çarpanının farkta sadeleşmesidir. Devirli gösterimi yaratan çarpan yok olunca sonuç sonlu çıkar.

**a) 0,8 devirli 3 b) 0,58 devirli 3 c) 5/6 büyüktür d) 1/4 = 0,25, sonlu**

**12** Bir öğrenci şöyle diyor:

"**$0,\overline{3}$** sayısı **0,33**'ten büyüktür, ama **0,34**'ten küçüktür."

**a) $0,\overline{3}$ sayısının açılımını altı basamak olarak yazınız.**
**b) Bu sayıyı 0,33 ile karşılaştırınız.**
**c) Bu sayıyı 0,34 ile karşılaştırınız.**
**d) Öğrenci haklı mıdır?**
**e) $0,\overline{3}$ sayısı hangi kesre eşittir?**

**a) Açılım**
Devir çizgisi 3 üzerinde olduğuna göre 3 rakamı sürekli tekrar eder:
**0,333333...**

**b) 0,33 ile karşılaştırma**
Basamak sayılarını eşitleyelim. 0,33 sayısının sağına sıfır eklemek değeri değiştirmez:
0,33 = **0,330000**

Karşılaştıralım:
0,**33**3333 ile 0,**33**0000

Soldan başlayalım:
- Onda birler: 3 = 3 → eşit
- Yüzde birler: 3 = 3 → eşit
- **Binde birler: 3 ile 0** → 3 > 0

**0,333... > 0,33** ✓

**c) 0,34 ile karşılaştırma**
0,34 = **0,340000**

Karşılaştıralım:
0,**33**3333 ile 0,**34**0000
- Onda birler: 3 = 3 → eşit
- **Yüzde birler: 3 ile 4** → 3 < 4

**0,333... < 0,34** ✓

**d) Öğrenci haklı mıdır?**
**Evet, haklıdır.**

Bulduğumuz iki sonucu birleştirelim:
**$0,33 < 0,\overline{3} < 0,34$**

Yani $0,\overline{3}$ sayısı bu iki ondalık gösterimin **tam arasındadır**.

Bu, devirli sayıların önemli bir özelliğini gösteriyor: Bir devirli sayı, hiçbir sonlu ondalık gösterime **eşit değildir**; her zaman iki sonlu gösterim arasına düşer.

devamı →

**12** *(çözümün devamı)*

**e) Hangi kesre eşit?**
Konu anlatımında 1/3 kesrinin bölmesini yapmıştık:
10 : 3 → 3 (kalan 1), 10 : 3 → 3 (kalan 1), ...

Kalan hep 1 çıkıyor ve bölüme hep 3 yazılıyor.

**$0,\overline{3} = 1/3$**

*Kontrol:* 1/3 kesrinin paydası 3'tür; 2 ve 5 dışında bir asal çarpan olduğu için gösterimin devirli olması gerekir ✓

**Ek gözlem:** 1/3 ≈ 0,33 demek günlük hayatta yeterli olabilir; ama tam değeri 0,33 değildir. Tam değeri yazmak için ya kesir (1/3) ya da devirli gösterim ($0,\overline{3}$) kullanılır.

**a) 0,333333... b) Büyüktür c) Küçüktür d) Haklı e) 1/3**

**13** Aşağıdaki altı eşitlik veriliyor.

I. 1,222... = $1,\overline{2}$
II. 3,818181... = $3,\overline{81}$
III. 0,4333... = $0,\overline{43}$
IV. 1,656565... = $1,\overline{65}$
V. 4,79888... = $4,79\overline{8}$
VI. 12,6444... = $12,\overline{64}$

**a) Bu eşitlikleri doğru yazılanlar ve yanlış yazılanlar diye ikiye ayırınız.**
**b) Yanlış olanların doğru yazılışını yazınız.**
**c) Yanlış yazılan eşitliklerde sağ taraftaki sayının açılımı ne olur?**
**d) Devir çizgisini doğru koymak için hangi ölçüt kullanılır?**

Her eşitlikte soldaki açılımda **hangi rakamların gerçekten tekrar ettiğine** bakacağız.

**I. 1,222...**
Tekrar eden: **2** → çizgi 2 üzerinde → **DOĞRU** ✓

**II. 3,818181...**
Tekrar eden: **81** ikilisi → çizgi 81 üzerinde → **DOĞRU** ✓

**III. 0,4333...**
Tekrar eden yalnız **3**; 4 rakamı bir kez geçiyor.
Çizgi 43 üzerine konmuş → **YANLIŞ** ×

**IV. 1,656565...**
Tekrar eden: **65** ikilisi → çizgi 65 üzerinde → **DOĞRU** ✓

devamı →

**13** *(çözümün devamı)*

**V. 4,79888...**
Tekrar eden yalnız **8**; 7 ve 9 birer kez geçiyor.
Çizgi yalnız 8 üzerinde → **DOĞRU** ✓

**VI. 12,6444...**
Tekrar eden yalnız **4**; 6 rakamı bir kez geçiyor.
Çizgi 64 üzerine konmuş → **YANLIŞ** ×

**a) Gruplama**
**Doğru yazılanlar: I, II, IV, V**
**Yanlış yazılanlar: III, VI**

**b) Yanlışların doğru yazılışı**
• III: 0,4333... = **$0,4\overline{3}$**
• VI: 12,6444... = **$12,6\overline{4}$**

Her iki düzeltmede de çizgi **bir rakam sağa** kaydı; virgülden sonraki ilk rakam devreden kısma dâhil değil.

**c) Yanlış yazılanların açılımları**
• **$0,\overline{43}$** = 0,43434343...
(Doğrusu 0,433333... idi; ikisi binde birler basamağında ayrışıyor.)

• **$12,\overline{64}$** = 12,64646464...
(Doğrusu 12,644444... idi; ikisi binde birler basamağında ayrışıyor.)

**d) Ölçüt**
"Devir çizgisi yalnız **sonsuza kadar tekrar eden** rakam ya da rakam grubunun üzerine konur. Virgülden sonra gelen ve yalnız bir kez yazılan rakamlar çizginin **dışında** bırakılır."

**Pratik yöntem:** Açılımda ilk tekrar eden bloğu bul; o bloktan önceki rakamlar çizginin solunda kalır. 0,4333... açılımında tekrar eden blok "3"tür ve ondan önce bir "4" vardır; o hâlde 4 çizginin dışındadır.

**a) Doğru: I, II, IV, V · Yanlış: III, VI b) 0,4 üzeri 3 ve 12,6 üzeri 4**

**14** Bir depodaki **47 litre** su eşit hacimli şişelere doldurulacaktır.

**a) Su 8 şişeye doldurulursa bir şişeye kaç litre düşer? Ondalık gösterimle yazınız.**
**b) Su 6 şişeye doldurulursa bir şişeye kaç litre düşer?**
**c) İki sonucu karşılaştırınız.**
**d) Hangi durumda ondalık gösterim devirlidir? Paydaların asal çarpanlarıyla açıklayınız.**
**e) (b) şıkkındaki sonucu yüzde birler basamağına yuvarlayınız.**

**a) 8 şişeye doldurma**
Bir şişeye düşen miktar: **47/8 litre**

47 tek sayıdır, 8 ile ortak böleni yoktur; kesir en sade hâldedir.

Bölme yapalım:
47 : 8 → **5** (kalan 7). Virgül konur.
70 : 8 → **8** (kalan 6)
60 : 8 → **7** (kalan 4)
40 : 8 → **5** (kalan 0)

Kalan sıfır oldu, işlem bitti.
**47/8 = 5,875 litre**

*Kontrol:* 5,875 · 8 = 47 ✓

**b) 6 şişeye doldurma**
Bir şişeye düşen miktar: **47/6 litre**

Bölme yapalım:
47 : 6 → **7** (kalan 5). Virgül konur.
50 : 6 → **8** (kalan 2)
20 : 6 → **3** (kalan 2)
20 : 6 → **3** (kalan 2)

İkinci basamaktan sonra kalan hep **2** çıkıyor.

47/6 = 7,8333... = **$7{,}8\overline{3}$ litre**

**c) Karşılaştırma**
5,875 ile 7,8333...

Tam kısımlara bakmak yeterlidir: 5 < 7

**7,8333... > 5,875**

Bu beklenen bir sonuçtur: Aynı miktar su daha **az** şişeye bölündüğünde her şişeye **daha çok** su düşer.

devamı →

**14** *(çözümün devamı)*

**d) Hangi durumda devirli?**
Paydaları asal çarpanlarına ayıralım.

- **47/8:** 8 = **2 · 2 · 2** → yalnız 2 çarpanı → **SONLU**
- **47/6:** 6 = 2 · **3** → paydada 3 var → **DEVİRLİ**

Her iki kesir de en sade hâldedir (47 asal sayıdır, ne 8'i ne 6'yı böler).

**Cevap: 6 şişeye doldurmada gösterim devirlidir.**

**e) Yüzde birler basamağına yuvarlama**
7,8333... sayısında yüzde birler basamağındaki rakam **3**'tür (7,8**3**33...).

Hemen sağındaki rakama bakalım: **3**

3 sayısı 5'ten küçük olduğu için yüzde birler basamağındaki 3 aynen kalır ve sonrası silinir:

7,8333... → **7,83 litre**

*Uyarı:* Yuvarlanmış değer gerçek değerden biraz **küçüktür**. Altı şişenin toplamı 6 · 7,83 = 46,98 litre eder; oysa depoda 47 litre vardı. Aradaki 0,02 litrelik fark yuvarlamadan gelir.

**a) 5,875 L b) 7,8 devirli 3 L c) 6 şişede daha çok d) 6'ya bölmede e) 7,83 L**

**15** Aşağıdaki koşulların tamamını sağlayan **iki kesir** yazınız.

- Birinci kesrin ondalık gösterimi **sonlu** olmalıdır.
- İkinci kesrin ondalık gösterimi **devirli** olmalıdır.
- İki kesrin de **payı aynı** olmalıdır.
- İki kesrin de **paydası 30'dan küçük** olmalıdır.
- İki kesir de **en sade hâlde** olmalıdır.

**a) Kesirlerinizi yazınız.**
**b) Ondalık gösterimlerini bulunuz.**
**c) Birinin neden sonlu, diğerinin neden devirli olduğunu açıklayınız.**
**d) Paydası 1'den büyük ve 30'dan küçük olan, sonlu gösterim veren kaç farklı payda seçilebilir? Hepsini listeleyiniz.**

Bu soruda tek bir doğru cevap yoktur; koşulları sağlayan her ikili kabul edilir. Aşağıda örnek bir çözüm verilmiştir.

**a) Örnek kesirler**

Payı **7** seçelim (asal sayı olduğu için pek çok paydayla sadeleşmez, bu da işimizi kolaylaştırır).

- Birinci kesir: **7/20**
- İkinci kesir: **7/12**

Koşulları kontrol edelim:

- Paylar aynı: **7** ✓
- Paydalar 30'dan küçük: 20 ve 12 ✓
- İkisi de en sade hâlde: 7 asaldır, ne 20'yi ne 12'yi böler ✓

**b) Ondalık gösterimler**

**7/20:** Paydayı 100 yapmak için 5 ile çarpalım:
7/20 = 35/100 = **0,35** (sonlu) ✓

**7/12:** Bölme yapalım:
70 : 12 → **5** (kalan 10)
100 : 12 → **8** (kalan 4)
40 : 12 → **3** (kalan 4)
40 : 12 → **3** (kalan 4)

Kalan hep 4 çıkıyor.
7/12 = 0,58333... = **$0,58\overline{3}$** (devirli) ✓

devamı →

**15** *(çözümün devamı)*

**c) Neden biri sonlu, diğeri devirli?**
Paydaları asal çarpanlarına ayıralım:

• **20 = 2 · 2 · 5** → yalnız 2 ve 5 çarpanları var. Bu paydayı 100 yapmak mümkündür (20 · 5 = 100). O hâlde gösterim **SONLUDUR**.

• **12 = 2 · 2 · 3** → paydada **3** çarpanı var. 3 sayısı ne 2 ne 5'tir; bu yüzden payda hiçbir zaman 10, 100 ya da 1000 yapılamaz. O hâlde gösterim **DEVİRLİDİR**.

Paylar aynı olduğu hâlde sonuçların farklı olması, belirleyici olanın **payda** olduğunu gösteriyor.

**d) Sonlu gösterim veren paydalar**
Bir paydanın sonlu gösterim vermesi için yalnız **2** ve **5** asal çarpanlarından oluşması gerekir.

1'den büyük, 30'dan küçük böyle sayıları bulalım:

**Yalnız 2'nin kuvvetleri:** 2, 4, 8, 16 (32 > 30)
**Yalnız 5'in kuvvetleri:** 5, 25 (125 > 30)
**2 ve 5'in çarpımları:** 10 (2 · 5), 20 (4 · 5) (40 ve 50 > 30)

Hepsini sıralayalım:
**2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25**

**Cevap: 8 farklı payda seçilebilir.**

*Not:* Bu liste, kesrin **en sade hâlde** olduğu varsayımıyla geçerlidir. Örneğin 6/24 kesrinin paydası 24'tür ve 24 = 2 · 2 · 2 · 3 olduğu için listede yoktur; ama kesir sadeleşince 1/4 olur ve gösterimi sonludur (0,25).

**Örnek: 7/20 = 0,35 (sonlu) ve 7/12 = 0,58 devirli 3 · d) 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25**