

ÇÖZÜMLER

Tam Sayılar, Rasyonel Sayılar ve Mutlak Değer

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge CC BY-NC 4.0 lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabılır.

1. Bölüm Soru 1-5

1 Bir alışveriş merkezinde **zemin kat 0** kabul edilmiştir. Katların yerleşimi şöyledir:

- **Otopark:** zemin kattan 2 kat aşağıda
- **Market:** zemin kattan 1 kat aşağıda
- **Yemek katı:** zemin kattan 3 kat yukarıda
- **Sinema:** zemin kattan 4 kat yukarıda

a) Her katı tam sayıyla ifade ediniz. Zemin katın referans seçilmesi neyi kolaylaştırmıştır? Açıklayınız.

b) Kat numarası niceliğinde 0 "yokluk" anlamına gelir mi? Gerekçelendiriniz.

c) Asansör ekranında "-2" yazması ne anlama gelir?

d) Bir kişi "Kat numarası negatif olamaz, çünkü kat diye bir şey eksi olmaz." diyor. Bu kişiye ne cevap verirsiniz?

- a) Zemin kat 0 kabul edildiğine göre **yukarı çıkmak "+"**, **aşağı inmek "-"** olur:

Otopark → -2 · Market → -1 · Zemin kat → 0 · Yemek katı → +3 · Sinema → +4

Neyi kolaylaştırdı: Bütün katlar **tek bir sayı doğrusu** üzerine yerleşti. Böylece "otoparktan sinemaya kaç kat çıkılır?" gibi sorular tek işlemle yanıtlanabilir hâle geldi. Referans seçilmeseydi her kat için ayrıca "yukarıda mı aşağıda mı" demek gerekirdi.

- b) **Hayır.** Kat numarasında 0, "kat yok" demek **değildir**; zemin kat gerçekten var olan bir kattır. Buradaki 0 yalnızca **seçilmiş bir referans noktasıdır**.

Karşılaştırınız: kütle, uzunluk, alan ve hacim gibi niceliklerde 0 **gerçek bir yokluğu** gösterir (0 kg = hiç kütle yok). Kat numarası, sıcaklık ve zaman ise bu gruba girmez; onlarda 0 **doğal bir başlangıç değil, seçilmiş bir başlangıçtır**.

- c) **"-2"**, asansörün zemin kattan **2 kat aşağıda** olduğunu, yani **otoparkta** bulunduğunu gösterir.

Eksi işareti burada bir **yön** bildirir: referans noktasının (zemin katın) **altı**. Sayının kendisi 2'dir; "-" ise hangi tarafta olduğunu söyler.

- d) **Kişi haklı değildir.** Ona şunu söyleriz: Negatif sayı "olmayan bir şey" anlamına gelmez; **seçilen referansın öbür tarafı** anlamına gelir.

Otopark katı gerçekten vardır ve içinde arabalar park edilir. Ona "-2" dememizin nedeni, zemin katı 0 seçmiş olmamızdır. Eğer otoparkı 0 kabul etseydik zemin kat +2, sinema +6 olurdu ve hiçbir kat negatif çıkmazdı.

devamı →

1 (çözümün devamı)

Asıl ölçüt şudur: Niceliğin **doğal bir başlangıç noktası var mı?** Kat numarasının yoktur, bu yüzden negatif değer anlamlıdır. Kütlenin vardır, bu yüzden -3 kg diye bir kütle olamaz.

✓ **Doğru Sonuç:** a) $-2, -1, 0, +3, +4$ b) Hayır, 0 seçilmiş referanstır c) Zemin kattan 2 kat aşağı (otopark) d) Negatif = referansın öbür tarafı, yokluk değil

2 Bir ölçüm atölyesinde şu nicelikler üzerinde çalışılmaktadır:

I. Kütle · II. Sıcaklık · III. Uzunluk · IV. Zaman · V. Hacim · VI. Deniz seviyesine göre yükseklik

- a) Bu nicelikleri "doğal başlangıç noktası olanlar" ve "olmayanlar" diye ikiye ayırınız. Her biri için 0'ın ne anlama geldiğini yazınız.
- b) Hangi niceliklerde negatif değer anlamlıdır? Kararınızı a şıkkına dayandırınız.
- c) "Bir cismin kütlesi -3 kg olabilir mi?" sorusunu yanıtlayınız.
- d) "Bir paketin hedef kütleden sapması -3 g olabilir mi?" sorusunu yanıtlayınız. c şıkkıyla arasındaki fark nedir?

• a)

DOĞAL BAŞLANGIÇ NOKTASI OLANLAR (0 = gerçek yokluk):

- **I. Kütle:** 0 kg → hiç kütle yok
- **III. Uzunluk:** 0 m → hiç uzunluk yok
- **V. Hacim:** 0 cm³ → hiç hacim yok

DOĞAL BAŞLANGIÇ NOKTASI OLMAYANLAR (0 = seçilmiş referans):

- **II. Sıcaklık:** 0 °C → "sıcaklık yok" değil; suyun **donma noktası**
- **IV. Zaman:** saat 00.00 ya da milat → seçilmiş bir **başlangıç anı**
- **VI. Deniz seviyesine göre yükseklik:** 0 m → **deniz seviyesi**, herkesçe kabul edilmiş sabit bir referans

• b) Negatif değer yalnızca II, IV ve VI'da anlamlıdır.

Gerekçe: Negatif sayı, referansın **öbür tarafını** gösterir. Bir niceliğin 0'ı gerçek bir yoklukluysa, o yokluğun "öbür tarafı" diye bir şey olamaz — hiçten daha az bir kütle yoktur. Oysa 0'ı seçilmişse iki taraf da vardır: sıfırın altındaki sıcaklıklar, miladın öncesi, deniz seviyesinin altı.

I, III ve V'te negatif değer **olamaz**.

devamı →

2 (çözümün devamı)

- **c) Olamaz.** Kütlenin doğal başlangıç noktası vardır: 0 kg, "hiç kütle yok" demektir. Bundan daha azı olamayacağı için bir cismin kütlesi negatif çıkamaz. En küçük değer 0'dır.

- **d) Olabilir.** Burada ölçülen şey kütlenin kendisi değil, **hedeften sapmadır.**

Fabrika hedef kütleyi (örneğin 500 g) **referans noktası** olarak seçmiştir. 497 g gelen paketin sapması **-3 g**, 503 g gelen paketinki **+3 g**'dir.

c ile d arasındaki fark: c şıkında **kütle** ölçülüyor (doğal başlangıcı var → negatif olamaz); d şıkında **kütle farkı** ölçülüyor (referansı seçilmiş → negatif olabilir).

Dikkat ediniz: -3 g sapması olan paketin kütlesi yine de **497 g'dır ve pozitif**dir. Negatif olan sapmadır, kütle değildir.

✓ **Doğru Sonuç: a) Doğal: I, III, V / Seçilmiş: II, IV, VI b) Negatif yalnız II, IV, VI'da anlamlı c) Olamaz d) Olabilir; ölçülen kütle değil sapmadır**

3 Bir sınıfta sayı kümeleri işlenirken üç öğrenci şöyle diyor:

Arda: "Her tam sayı aynı zamanda bir rasyonel sayıdır."

Belma: "Her rasyonel sayı aynı zamanda bir tam sayıdır."

Cem: "-4 sayısı hem doğal, hem tam, hem rasyonel sayıdır."

a) Her üç öğrenci için "doğru" ya da "yanlış" kararınızı verip gerekçelendiriniz. Yanlış olanlar için birer karşı örnek veriniz.

b) Sayı kümeleri arasındaki kapsama ilişkisini yazınız.

c) 7, -4, 2/5, 0 ve 1,5 sayılarını hangi kümelerle ait olduklarını belirterek bir tabloda gösteriniz.

d) "Bir sayı rasyonelse mutlaka kesir çizgisiyle yazılmıştır." ifadesini değerlendiriniz.

- **a)**

— **Arda: DOĞRU.** Her tam sayı, **paydası 1** olan bir rasyonel sayı olarak yazılabilir: $7 = 7/1$, $-4 = -4/1$, $0 = 0/1$. Pay ve payda tam sayı, payda sıfırdan farklı olduğu için rasyonel sayı tanımı sağlanır.

— **Belma: YANLIŞ. Karşı örnek: 2/5.** Bu bir rasyonel sayıdır (pay 2, payda 5, ikisi de tam sayı ve payda $\neq 0$), ama tam sayı **değildir**; sayı doğrusunda 0 ile 1 arasında, hiçbir tam sayı noktasında olmayan bir yerdedir. (1,5 ve $-7/3$ de karşı örnektir.)

— **Cem: YANLIŞ. Karşı örnek -4'ün kendisidir.** -4 gerçekten tam ve rasyoneldir, ama **doğal sayı değildir**. Doğal sayılar sıfır ve pozitif tam sayılardan oluşur; negatif sayılar bu kümeye girmez.

- **b) Doğal sayılar $\subset$ Tam sayılar $\subset$ Rasyonel sayılar**

devamı →

3 (çözümün devamı)

Yani her doğal sayı tamdır, her tam sayı rasyoneldir; ama tersleri doğru değildir. Kapsama **tek yönlüdür** — Belma ile Cem'in hatası tam olarak bu oku ters çevirmektir.

• c)

7 → Doğal ✓ · Tam ✓ · Rasyonel ✓ ($7 = 7/1$)

-4 → Doğal × · Tam ✓ · Rasyonel ✓ ($-4 = -4/1$)

$2/5$ → Doğal × · Tam × · Rasyonel ✓

0 → Doğal ✓ · Tam ✓ · Rasyonel ✓ ($0 = 0/1$)

1,5 → Doğal × · Tam × · Rasyonel ✓ ($1,5 = 15/10$)

Görüldüğü gibi bir sayı ne kadar "içteki" kümeye aitse o kadar çok kümeye birden aittir.

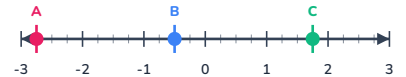
• d) İfade yanlıştır. Rasyonel olmak, **a/b biçiminde yazılabilmek** demektir; hâlihazırda öyle **yazılmış olmak** demek değildir.

Örnek: **1,5** kesir çizgisiyle yazılmamıştır ama $15/10$ biçiminde yazılabildiği için rasyoneldir. **%25** da öyledir: $25/100$ olarak yazılabilir. **-4** da öyledir: $-4/1$.

Ölçüt **yazılışta değil, yazılabilirliktir**.

✓ Doğru Sonuç: a) Arda doğru, Belma yanlış ($2/5$), Cem yanlış (-4 doğal değil) b) Doğal $\subset$ Tam $\subset$ Rasyonel c) 7 ve 0 üçüne de ait d) Yanlış; ölçüt yazılabilirliktir

4 Bir sınıf panosuna asılan eş aralıklı sayı doğrusunda A, B ve C noktaları işaretlenmiştir. Ardışık tam sayılar arası 4 eş parçaya bölünmüştür.



- Her birim kaç eş parçaya bölünmüştür? Bu sayı, noktaların karşılık geldiği kesirlerin neyini verir?
- A, B ve C noktalarına karşılık gelen rasyonel sayıları yazınız. Her birini tam sayılı kesir olarak da gösteriniz.
- Bu üç sayıyı küçükten büyüğe sıralayınız.
- Üç noktadan hangisi 0'a en yakındır? Kararınızı mutlak değer kullanarak gerekçelendiriniz.

- a) Ardışık tam sayılar arası **4 eş parçaya** bölünmüştür. Bu sayı, noktalara karşılık gelen kesirlerin **paydasını** verir.

Yani her bölme çizgisi $1/4$ birimlik bir adımdır; okurken "tam sayıdan kaç çizgi uzakta?" diye sayıp o sayıyı paya yazarız.

• b)

A noktası: -3 ile -2 arasında ve **-2'ye 3 çizgi** uzaklıkta (sola doğru).

devamı →

4 (çözümün devamı)

$$\rightarrow A = -2 \frac{3}{4} = -\frac{11}{4}$$

(Kontrol: $-2 - \frac{3}{4} = -\frac{8}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{11}{4} \checkmark$)

B noktası: -1 ile 0 arasında ve **0'a 2 çizgi** uzaklıkta (sola doğru).

$$\rightarrow B = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

($\frac{2}{4}$ sadeleştirilerek $\frac{1}{2}$ bulunur; ikisi de aynı sayıdır.)

C noktası: 1 ile 2 arasında ve **1'den 3 çizgi** ileride (sağa doğru).

$$\rightarrow C = 1 \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

(Kontrol: $1 + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} \checkmark$)

- **c)** Sayı doğrusunda **solda olan daha küçüktür**. Noktalar soldan sağa A, B, C sırasında durduğuna göre:

$$A < B < C \text{ yani } -\frac{11}{4} < -\frac{1}{2} < \frac{7}{4}$$

Ondalık karşılıklarıyla doğrulayalım: $-2,75 < -0,5 < 1,75 \checkmark$

- **d)** "0'a yakınlık" demek **sıfıra uzaklık**, yani **mutlak değer** demektir. Mutlak değerleri hesaplayalım:

$$|A| = |-\frac{11}{4}| = \frac{11}{4} = 2,75$$

$$|B| = |-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$|C| = |\frac{7}{4}| = \frac{7}{4} = 1,75$$

En küçük mutlak değer **0,5** olduğuna göre **0'a en yakın nokta B**'dir.

Dikkat çekici nokta: c şıkkındaki sıralamada B **ortadaydı**; mutlak değer sıralamasında ise **en küçük** oldu. Çünkü mutlak değer yönü siler, yalnızca uzaklığı bırakır. En küçük sayı (A) sıfıra **en uzak** noktadır.

✓ Doğru Sonuç: a) 4 parça → payda b) $A = -\frac{11}{4}, B = -\frac{1}{2}, C = \frac{7}{4}$ c) $A < B < C$ d) B ($|\frac{-1}{2}| = 0,5$ en küçük)

5 Bir öğrenci $-7/4$ sayısını sayı doğrusunda göstermek için ödev defterine şu çözümü yazmıştır:

1. adım: Sayı negatiftir, 0'ın solunda olacaktır.
2. adım: $-7/4 = -1 \frac{3}{4}$ olduğundan bu sayı -1 ile -2 arasındadır.
3. adım: Ardışık tam sayılar arası **7 eş parçaya** ayrılır.
4. adım: -1 noktasından başlayıp **4 birim sağa** gidilerek nokta işaretlenir.

a) Öğrencinin 3. ve 4. adımlarındaki iki hatayı bulup neden hata olduklarını açıklayınız.

b) Doğru çözümü dört adımı izleyerek yazınız.

c) Öğrencinin yöntemiyle işaretlenen nokta hangi sayıya karşılık gelirdi? Bu sayı $-7/4$ 'e eşit midir?

d) Öğrenci basit bir kontrol yapsaydı hatasını yakalayabilirdi. Bu kontrol nedir?

• a)

1. hata — eş parça sayısı yanlış (3. adım). Öğrenci ardışık tam sayılar arasını **7** parçaya bölmüştür. Oysa bölme sayısını belirleyen **paydadır**, pay değil. $-7/4$ sayısının paydası **4** olduğuna göre her birim **4 eş parçaya** ayrılmalıdır. Öğrenci payı (7) payda sanmıştır.

2. hata — yön yanlış (4. adım). Öğrenci -1 'den **sağa** gitmiştir. Oysa sayı **negatif** olduğunda pay kadar **sola** gidilir. Sağa gitmek sayıyı büyütür, yani sıfıra yaklaştırır; oysa $-7/4$ sayısı -1 'den **küçüktür**, sıfırdan uzaklaşmalıdır.

(Ayrıca "4 birim" demek de yanlıştır; ilerlenecek adım sayısı **paydır**, yani 3'tür — bkz. b şıkkı.)

• b) Doğru çözüm:

1. adım: Sayı negatiftir → 0'ın **solunda** ✓ (öğrenci bunu doğru yapmış)

2. adım: $7 \div 4$ işleminde bölüm 1, kalan 3 → $-7/4 = -1 \frac{3}{4}$ → sayı **-2 ile -1 arasındadır** ✓

3. adım: Payda **4** olduğundan ardışık tam sayılar arası **4 eş parçaya** ayrılır.

4. adım: Tam kısma karşılık gelen **-1** noktasından başlanır ve pay kadar, yani **3 parça sola** gidilir. Ulaşılan nokta **$-7/4$** 'tür.

• c) Öğrenci -1 'den 4 parça **sağa** gitmiştir ve her parçayı $1/7$ birim yapmıştır. Buna göre ulaştığı nokta:

$$-1 + 4/7 = -7/7 + 4/7 = -3/7$$

Bu sayı $-7/4$ 'e eşit değildir. $-3/7 \approx -0,43$ iken $-7/4 = -1,75$ 'tir. Üstelik $-3/7$ sayısı **-1 ile 0 arasında** çıkmıştır; oysa öğrencinin kendi 2. adımında yazdığı gibi sayı **-2 ile -1 arasında** olmalıydı.

• d) Kontrol: "İşaretlediğim nokta, 2. adımda bulduğum iki tam sayının arasına düşüyor mu?"

devamı →

5 (çözümün devamı)

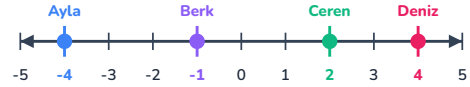
Öğrenci 2. adımda doğru biçimde "-2 ile -1 arasında" demişti. Ama 4. adımda işaretlediği nokta -1'in **sağında**, yani -1 ile 0 arasında kalmıştır. Kendi yazdığı iki adım **birbiriyle çelişmektedir**; bu çelişkiyi fark etseydi hatayı hemen bulurdu.

Bu kontrol her iki hatayı da yakalar: yanlış yöne gidildiğinde de, yanlış payda kullanıldığında da nokta beklenen aralığın dışına çıkar.

✓ **Doğru Sonuç: a) Payda yerine pay kadar bölmüş; negatifte sağa gitmiş b) 4 parçaya böl, -1'den 3 parça sola c) -3/7 bulunurdu, eşit değil d) Nokta 2. adımdaki aralığa düşüyor mu kontrolü**

2. Bölüm Soru 6–10

- 6** Bir otelde zemin kat 0 kabul edilmiştir. Dört çalışanın bulunduğu katlar aşağıdaki sayı doğrusunda işaretlenmiştir.



- a) Her çalışanın bulunduğu katı tam sayıyla yazınız.
b) Her çalışanın zemin kata uzaklığını mutlak değer kullanarak bulunuz.
c) Zemin kata eşit uzaklıkta olan çalışanlar hangileridir? Aynı katta mıdır? Açıklayınız.
d) Bir müdür "Sayısı en küçük olan çalışan zemin kata en yakındır." diyor. Bu iddiayı değerlendiriniz.

- a) Doğrudaki işaretlerden okunur:

Ayla → -4 (zemin kattan 4 kat aşağıda)

Berk → -1 (zemin kattan 1 kat aşağıda)

Ceren → +2 (zemin kattan 2 kat yukarıda)

Deniz → +4 (zemin kattan 4 kat yukarıda)

- b) "Zemin kata uzaklık" = **sıfıra uzaklık** = **mutlak değer**:

$$|-4| = 4 \text{ kat} \rightarrow \text{Ayla}$$

$$|-1| = 1 \text{ kat} \rightarrow \text{Berk}$$

$$|+2| = 2 \text{ kat} \rightarrow \text{Ceren}$$

$$|+4| = 4 \text{ kat} \rightarrow \text{Deniz}$$

Uzaklıkların hepsi **pozitif** çıktı; çünkü uzaklık yön taşımaz.

- c) $|-4| = |+4| = 4$ olduğundan **Ayla ile Deniz** zemin kata eşit uzaklıktadır (ikisi de 4 kat).

devamı →

6 (çözümün devamı)

Ama aynı katta değildirler. Ayla -4 . katta (4 kat **aşağıda**), Deniz $+4$. katta (4 kat **yukarıda**) bulunur. Aralarında **8 kat** vardır.

Bunun nedeni şudur: mutlak değer **yönü siler, yalnızca uzaklığı bırakır**. Ters işaretli iki sayı aynı mutlak değeri verir ama aynı sayı değildir: $-4 \neq +4$ iken $|-4| = |+4|$.

- **d) İddia yanlıştır.**

Sayıcı en küçük çalışan **Ayla**'dır ($-4 < -1 < 2 < 4$). Oysa zemin kata **en yakın** olan **Berk**'tir, çünkü $|-1| = 1$ en küçük uzaklıktır. Ayla ise 4 kat uzaklıkla en uzaktakilerden biridir.

Nerede yanılıyor: Müdür **sayının büyüklüğü** ile **sıfıra uzaklığı** karıştırmıştır. Bunlar farklı sıralamalar verir:

— Sayılara göre sıra: $-4 < -1 < +2 < +4$

— Uzaklıklara göre sıra: $1 < 2 < 4 = 4$

Doğru ifade şudur: "Mutlak değeri en küçük olan çalışan zemin kata en yakındır."

✓ **Doğru Sonuç:** a) $-4, -1, +2, +4$ b) $4, 1, 2, 4$ kat c) Ayla ve Deniz eşit uzaklıkta ama farklı katlarda d) Yanlış; ölçüt mutlak değerdir, en yakın Berk

7 Bir sabah beş şehirde ölçülen sıcaklıklar şöyledir:

Erzurum $-14\text{ }^{\circ}\text{C}$ · Ankara $-3\text{ }^{\circ}\text{C}$ · İzmir $+11\text{ }^{\circ}\text{C}$ · Kars $-18\text{ }^{\circ}\text{C}$ · Antalya $+15\text{ }^{\circ}\text{C}$

a) Sıcaklıkları küçükten büyüğe sıralayınız. En soğuk şehir hangisidir?

b) Her sıcaklığın mutlak değerini bulup büyükten küçüğe sıralayınız.

c) Bir sunucu "Mutlak değeri en büyük olan şehir en soğuktur." diyor. Katılıyor musunuz? Gerekçelendiriniz.

d) $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ 'ye en yakın şehir hangisidir? Erzurum ile İzmir'in $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ 'ye uzaklıkları arasındaki farkı bulunuz.

- **a)** Sayı doğrusunda solda olan küçüktür. Negatif sayılarda mutlak değer büyüdükçe sayı küçülür:

$$-18 < -14 < -3 < +11 < +15$$

Yani **Kars < Erzurum < Ankara < İzmir < Antalya**

En soğuk şehir Kars'tır ($-18\text{ }^{\circ}\text{C}$).

- **b)** Mutlak değerler:

$$|-14| = 14 \cdot |-3| = 3 \cdot |+11| = 11 \cdot |-18| = 18 \cdot |+15| = 15$$

Büyükten küçüğe: **$18 > 15 > 14 > 11 > 3$**

devamı →

7 (çözümün devamı)

Yani $|-18| > |+15| > |-14| > |+11| > |-3|$ (Kars, Antalya, Erzurum, İzmir, Ankara)

- **c) Katılmıyorum.** İddia bu veride **tesadüfen kısmen** işe yarar gibi görünse de yanlıştır.

Mutlak değer sıralamasında ikinci sırada **Antalya** vardır ($|+15| = 15$). Oysa Antalya **en sıcak** şehirdir, en soğuk değil! Mutlak değeri büyük olmasının nedeni sıfırdan uzak olması, ama **yukarı yönde** uzak olmasıdır.

Nerede yanılıyor: Mutlak değer **yönü siler**; sıfırdan ne kadar uzak olduğunu söyler ama **hangi tarafta** olduğunu söylemez. Soğukluk ise yön bilgisi ister — sıfırın **altında** olmak gerekir.

Doğru ifade: "Sayısı en küçük olan şehir en soğuktur." (Kars, -18 °C)

- **d) 0 °C'ye uzaklık = mutlak değer.** En küçük mutlak değer **3** olduğuna göre **0 °C'ye en yakın şehir Ankara'dır** (-3 °C).

Erzurum ile İzmir'in uzaklık farkı:

Erzurum: $|-14| = 14$

İzmir: $|+11| = 11$

Fark: $14 - 11 = 3$ °C

Dikkat: Bu, iki şehrin sıcaklık farkı **değildir**. Sıcaklık farkı $11 - (-14) = 25$ °C'dir. Burada sorulan, ikisinin **sıfıra uzaklıkları** arasındaki farktır; ikisi bambaşka sayılardır.

✓ **Doğru Sonuç:** a) $-18 < -14 < -3 < 11 < 15$; en soğuk Kars b) $18 > 15 > 14 > 11 > 3$ c) Hayır; Antalya $|15|$ ile ikinci ama en sıcak d) Ankara; fark 3 °C

8 Bir matematik oyununda dağıtılan kartlarda şu sayılar yazılıdır:

$$12 \cdot -7 \cdot \frac{3}{8} \cdot 0 \cdot -2,5 \cdot \%40 \cdot \frac{9}{3} \cdot \frac{6}{0}$$

a) Kartları doğal sayı, tam sayı ama doğal değil, rasyonel sayı ama tam değil ve hiçbirisi olmak üzere dörde ayırınız.

b) $\frac{9}{3}$ kartı hangi gruba girer? Kararınızı işlem yaparak gösteriniz.

c) $\frac{6}{0}$ kartı neden hiçbir gruba girmez? Açıklayınız.

d) Rasyonel olan kartların hepsini a/b biçiminde yazınız.

- a)

DOĞAL SAYI (aynı zamanda tam ve rasyonel):

— $12 \cdot 0 \cdot \frac{9}{3}$ (bkz. b şıkkı)

TAM SAYI AMA DOĞAL DEĞİL:

devamı →

8 (çözümün devamı)

— **-7** (negatif olduğu için doğal sayı kümesine girmez)

RASYONEL AMA TAM DEĞİL:

— **$\frac{3}{8} \cdot -2,5 \cdot \%40$**

HİÇBİRİ:

— **$\frac{6}{0}$** (tanımsız)

- **b) $\frac{9}{3}$** kartı ilk bakışta kesir gibi görünür, ama işlem yapılmalıdır:

$$9 \div 3 = 3$$

3 sayısı pozitif bir tam sayıdır, dolayısıyla **doğal sayıdır**. Aynı zamanda tam ve rasyoneldir ($3 = \frac{3}{1}$).

Ders: Bir sayının hangi kümeye ait olduğuna karar vermeden önce **sadeleştirin ve işlemi yapın**. Kesir çizgisi görmek o sayının tam olmadığı anlamına gelmez: $\frac{10}{5} = 2$, $-\frac{8}{4} = -2$, $\frac{100}{25} = 4$ hep tam sayıdır.

- **c) $\frac{6}{0}$** bir sayı **değildir**, tanımsızdır.

Bölmenin temel kuralına göre **$6 = 0 \times \blacksquare$** eşitliği yazılır. **$\blacksquare$** yerine hangi sayıyı koyarsak koyalım, sıfır ile çarpım her zaman **0** verir; hiçbir zaman 6 olamaz. Eşitliği sağlayan bir değer **bulunamadığı** için işlem tanımsızdır.

Rasyonel sayı tanımında **$b \neq 0$** koşulunun bulunmasının nedeni tam olarak budur. Tanımsız bir ifade hiçbir sayı kümesine giremez.

Karıştırmayın: $\frac{0}{6}$ tanımsız **değildir**; $\frac{0}{6} = 0$ 'dır ve doğal sayıdır.

- **d) Rasyonel olan yedi kartın a/b biçimleri:**

$$12 = \frac{12}{1} \cdot -7 = -\frac{7}{1} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{8} \text{ (zaten bu biçimde)}$$

$$0 = \frac{0}{1} \cdot -2,5 = -\frac{25}{10} \text{ (sadeleşmiş hâli } -\frac{5}{2})$$

$$\%40 = \frac{40}{100} \text{ (sadeleşmiş hâli } \frac{2}{5}) \cdot \frac{9}{3} = \frac{3}{1}$$

Yedisinde de pay ve payda **tam sayıdır** ve payda **sıfırdan farklıdır** ✓

✓ **Doğru Sonuç: a) Doğal: 12, 0, $\frac{9}{3}$ / Tam ama doğal değil: -7 / Rasyonel ama tam değil: $\frac{3}{8}$, -2,5, $\%40$ / Hiçbiri: $\frac{6}{0}$ b) $\frac{9}{3} = 3$, doğal c) Tanımsız d) $\frac{12}{1}$, $-\frac{7}{1}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{0}{1}$, $-\frac{25}{10}$, $\frac{40}{100}$, $\frac{3}{1}$**

- 9 Bir öğrenci matematik günlüğüne şu üç eşitliği yazmış ve hepsinin doğru olduğunu iddia etmiştir:

I. $-5/2 = 5/(-2)$

II. $-5/2 = (-5)/(-2)$

III. $-5/2 = (-5)/2$

- a) Üç eşitlikten hangileri doğrudur? Her biri için gerekçenizi yazınız.
 b) Yanlış olan eşitliğin sol ve sağ tarafını ayrı ayrı hesaplayıp farkı gösteriniz.
 c) Negatif bir rasyonel sayıda eksi işareti kaç farklı yere yazılabilir? Bunu bir kuralla ifade ediniz.
 d) $(-3)/(-7)$ sayısı pozitif midir negatif midir? Gerekçelendiriniz.

• a)

— **I. DOĞRU.** Eksi işareti kesir çizgisinin önünde ya da paydanın önünde olabilir; sayının değeri değişmez. $-5/2 = 5/(-2) = -2,5$ ✓

— **II. YANLIŞ.** Burada hem payda hem paydada eksi vardır. İki negatifin bölümü **pozitif** çıkar, oysa sol taraf negatiftir.

— **III. DOĞRU.** Eksi işareti payın önüne yazılmıştır; bu da geçerli bir gösterimdir. $-5/2 = (-5)/2 = -2,5$ ✓

• b) II. eşitliğin iki tarafını hesaplayalım:

Sol taraf: $-5/2 = -2,5$

Sağ taraf: $(-5)/(-2)$ — pay ve paydadaki eksiler birbirini götürür $\rightarrow 5/2 = +2,5$

Fark: $-2,5$ ile $+2,5$ **eşit değildir**; ters işaretli iki sayıdır. Aralarındaki fark 5'tir.

(Mutlak değerleri eşittir: $|-2,5| = |+2,5| = 2,5$. Öğrenci muhtemelen mutlak değerlerin eşitliğini sayıların eşitliği sanmıştır.)

• c) Eksi işareti **üç** farklı yere yazılabilir: **payın önüne, kesir çizgisinin önüne** ya da **paydanın önüne**.

Kural: Bir kesirde **tek** bir eksi işareti varsa — nerede olursa olsun — sayı **negatiftir**:

$$-a/b = (-a)/b = a/(-b)$$

Eksi işareti **çift** sayıda varsa (yani hem payda hem paydada) birbirlerini götürür ve sayı **pozitif** olur.

• d) $(-3)/(-7)$ pozitiftir.

Gerekçe: Hem payda hem paydada eksi işareti vardır; eksi sayısı **çifttir (2 tane)**. Aynı işaretli iki sayının bölümü pozitif olacağından:

$$(-3)/(-7) = 3/7$$

Sağlama: $3/7 \approx 0,43 > 0$ ✓ Sayı doğrusunda 0 ile 1 arasında, **sıfırın sağında** yer alır.

devamı →

9 (çözümün devamı)

✓ Doğru Sonuç: a) I ve III doğru, II yanlış b) $-2,5$ ile $+2,5$, eşit değil c) Üç yere; tek eksi → negatif, çift eksi → pozitif d) Pozitif; $(-3)/(-7) = 3/7$

- 10 Bir un fabrikasında paketlerin hedef kütlesi 1000 g olarak belirlenmiştir. Kalite kontrolde tartılan beş paketin kütleleri şöyledir:

$$996 \text{ g} \cdot 1000 \text{ g} \cdot 1007 \text{ g} \cdot 993 \text{ g} \cdot 1002 \text{ g}$$

- a) Her paketin hedeften sapmasını tam sayıyla yazınız.
 b) Hedefe eşit uzaklıkta olan paketler hangileridir? Mutlak değer kullanarak gösteriniz.
 c) Fabrika hedef kütleyi 1000 g yerine 995 g seçseydi sapmalar ne olurdu? Yeniden hesaplayınız.
 d) Referans değişince sapmalar değişti. Peki paketlerin kütleleri de değişti mi? Bu durum size ne anlatıyor?

- a) Sapma = kütle – hedef (hedef 1000 g). Hedeften fazla gelenler "+", eksik gelenler "-" olur:

$$996 \text{ g} \rightarrow 996 - 1000 = -4$$

$$1000 \text{ g} \rightarrow 1000 - 1000 = 0$$

$$1007 \text{ g} \rightarrow 1007 - 1000 = +7$$

$$993 \text{ g} \rightarrow 993 - 1000 = -7$$

$$1002 \text{ g} \rightarrow 1002 - 1000 = +2$$

- b) "Hedefe uzaklık" = sapmanın mutlak değeri:

$$|-4| = 4 \cdot |0| = 0 \cdot |7| = 7 \cdot |-7| = 7 \cdot |2| = 2$$

$|+7| = |-7| = 7$ olduğundan **1007 g'lık ve 993 g'lık paketler** hedefe eşit uzaklıktadır.

Ama aynı durumda değildirler: biri 7 g fazla, diğeri 7 g eksik gelmiştir. Fabrika için bu ikisi çok farklı sorunlardır — mutlak değer bu farkı gizler.

(Hedefe en yakın paket 1000 g'lıktır; sapması 0'dır.)

- c) Yeni hedef **995 g** olunca sapma = kütle – 995 olur:

$$996 \text{ g} \rightarrow 996 - 995 = +1$$

$$1000 \text{ g} \rightarrow 1000 - 995 = +5$$

$$1007 \text{ g} \rightarrow 1007 - 995 = +12$$

$$993 \text{ g} \rightarrow 993 - 995 = -2$$

$$1002 \text{ g} \rightarrow 1002 - 995 = +7$$

devamı →

10 (çözümün devamı)

Görüldüğü gibi sapmaların **hepsi değişti**; üstelik işaretler de değişti: eskiden -4 olan paket şimdi $+1$, eskiden 0 olan paket şimdi $+5$ oldu.

- **d) Paketlerin kütleleri değişmedi.** Paketler hâlâ 996 , 1000 , 1007 , 993 ve 1002 gramdır; terazide okunan değerler aynıdır. Değişen tek şey, bu kütleleri **neye göre** ifade ettiğimizdir.

Bu durum şunu anlatıyor: Sapma **referansa bağlıdır**, kütle ise **değildir**. Kütlenin doğal bir başlangıç noktası vardır ($0 \text{ kg} = \text{hiç kütle yok}$), bu yüzden kütle herkes için aynıdır ve asla negatif olamaz. Sapma ise **seçilmiş bir referansa** göre ölçülür; referans değişince bütün sapmalar değişir ve pekâlâ negatif olabilir.

Genel kural: Bir niceliğin negatif değer alabilmesi, o niceliğin "eksi" olabilmesinden değil, **referansın seçilmiş olmasından** kaynaklanır.

✓ **Doğru Sonuç:** a) $-4, 0, +7, -7, +2$ b) 1007 g ve 993 g ($|\pm 7| = 7$) c) $+1, +5, +12, -2, +7$ d) **Kütleler değişmedi; sapma referansa bağlı, kütle değil**

3. Bölüm Soru 11–15

11 Bir öğrencinin sınav kâğıdında şu dört satır yazılıdır:

- I. $|-5| = -5$
- II. $|-3| + |4| = 1$
- III. $|x| = 9$ ise $x = 9$ 'dur.
- IV. $|-2| > |-8|$ (çünkü $-2 > -8$)

- a) Dört satırın her birini inceleyip doğru olanları belirtiniz, yanlış olanları düzeltiniz.
- b) I. satırdaki hatanın altında yatan yanlış düşünce nedir? Açıklayınız.
- c) IV. satırdaki öğrenci " $-2 > -8$ " derken haklıdır. Öyleyse nerede hata yapmıştır?
- d) Öğrenciye mutlak değerle ilgili, bu dört hatayı da önleyecek tek bir kural yazınız.

- a)
 - **I. YANLIŞ.** Doğrusu: $|-5| = 5$
 - **II. YANLIŞ.** Doğrusu: $|-3| = 3$ ve $|4| = 4 \rightarrow 3 + 4 = 7$
(Öğrenci mutlak değerleri hesaplamadan $-3 + 4 = 1$ işlemini yapmış.)
 - **III. EKSİK.** $x = 9$ doğrudur **ama tek çözüm değildir.** Doğrusu: $x = 9$ veya $x = -9$
(Sıfıra 9 birim uzaklıkta iki nokta vardır.)
 - **IV. YANLIŞ.** $|-2| = 2$ ve $|-8| = 8$ 'dir. $2 < 8$ olduğundan doğrusu $|-2| < |-8|$ 'dir.
- b) **I. satırdaki yanlış düşünce:** Öğrenci mutlak değeri, işareti **koruyan** ya da **aynen geçiren** bir sembol sanmıştır. Sanki $|$ yalnızca bir parantezmiş gibi davranmıştır.

devamı →

11 (çözümün devamı)

Oysa mutlak değer bir **uzaklıktır** ve uzaklık negatif olamaz. $|-5|$, "-5 sayısının sıfıra uzaklığı" demektir; sayı doğrusunda bu uzaklık **5 birimdir**.

Kısacası mutlak değer işareti **korumaz, siler**: sonuç her zaman 0 veya pozitiftir.

- **c) Öğrenci " $-2 > -8$ " derken gerçekten haklıdır**; sayı doğrusunda -2 , -8 'in sağındadır ve daha büyüktür.

Hatası şudur: Bu doğru bilgiyi **mutlak değerlere olduğu gibi taşımıştır**. Oysa karşılaştırılan şey sayıların kendisi değil, **mutlak değerleridir** ve mutlak değer almak sıralamayı **bozabilir**.

— Sayılara göre: $-8 < -2$

— Mutlak değerlere göre: $|-2| = 2 < 8 = |-8| \rightarrow$ **sıra tersine döndü**

Bunun nedeni şudur: negatif sayılarda sayı **küçüldükçe** sıfıra uzaklığı **büyür**. Bu yüzden mutlak değer sıralaması yapılırken önce mutlak değerler **hesaplanmalı**, sonra sıralanmalıdır.

- **d) Tek kural: "Mutlak değeri gördüğün anda önce içini hesapla ve sonucu pozitif yaz; ancak ondan sonra işleme ya da karşılaştırmaya geç."**

Bu kural dört hatayı da önler:

— **I:** Önce hesaplansaydı $|-5| = 5$ yazılırdı ✓

— **II:** Önce hesaplansaydı $3 + 4 = 7$ olurdu ✓

— **IV:** Önce hesaplansaydı 2 ile 8 karşılaştırılır, doğru sonuca varılırdı ✓

— **III:** Ters yönde çalışırken (mutlak değer verilip sayı istendiğinde) kuralın eki devreye girer: **işaret silindiği için geri dönüşte iki olasılık vardır**.

✓ **Doğru Sonuç: a) I: 5 · II: 7 · III: $x = 9$ veya -9 · IV: $|-2| < |-8|$ b) Mutlak değer işareti korumaz, siler c) $-2 > -8$ doğru ama mutlak değere taşınamaz d) Önce içini hesapla, sonra işleme geç**

12 Bir matematik yarışmasında takımlara şu iddia kartı verilmiştir:

" $|a| = |b|$ ise $a = b$ 'dir."

Takımlardan biri iddiayı savunmak için "Mutlak değerleri eşitse sayılar da eşittir, çünkü aynı uzaklıktalar." demiştir.

a) İddia doğru mudur? Kararınızı bir karşı örnekle gerekçelendiriniz.

b) Takımın savunmasındaki mantık hatası nedir? "Aynı uzaklıkta olmak" ne anlama gelir?

c) $|a| = |b|$ verildiğinde a ile b arasında hangi doğru ilişki yazılabilir? İddianın düzeltilmiş hâlini yazınız.

d) İddianın tersi olan " $a = b$ ise $|a| = |b|$ 'dir." ifadesi doğru mudur? Gerekçelendiriniz.

- a) İddia yanlıştır.

Karşı örnek: $a = 6$ ve $b = -6$

$|6| = 6$ ve $|-6| = 6$ olduğundan $|a| = |b|$ koşulu sağlanır ✓

Ama $6 \neq -6$ 'dır × Sayılar eşit değildir.

Tek bir karşı örnek, "ise" biçimindeki bir iddiayı çürütmeye yeter. ($a = 3$, $b = -3$ ya da $a = 1/2$, $b = -1/2$ de olur.)

- b) Takımın savunmasındaki hata, "**aynı uzaklıkta olmak**" ile "**aynı yerde olmak**"ı karıştırmaktır.

Sıfıra belirli bir uzaklıkta **tek bir nokta değil, iki nokta** vardır: biri sağda, biri solda. 6 ile -6 gerçekten sıfıra aynı uzaklıktadır (6 birim), ama sayı doğrusunda **bambaşka iki noktada** dururlar; aralarında 12 birim vardır.

Mutlak değer **yalnızca uzaklığı** söyler, **yönü söylemez**. Yön bilgisi silindiği için iki farklı sayı aynı mutlak değeri verebilir.

- c) $|a| = |b|$ verildiğinde yazılabilecek **doğru** ilişki şudur:

$a = b$ veya $a = -b$

Yani iki sayı ya **birbirinin aynısıdır** ya da **birbirinin ters işaretlisidir**; üçüncü bir seçenek yoktur.

Düzeltilmiş iddia: " $|a| = |b|$ ise $a = b$ veya $a = -b$ 'dir."

Örneklerle: $|5| = |5| \rightarrow a = b$ durumu ✓ · $|5| = |-5| \rightarrow a = -b$ durumu ✓

- d) **Tersi DOĞRUDUR.** " $a = b$ ise $|a| = |b|$ 'dir."

Gerekçe: a ile b aynı sayıysa sayı doğrusunda **aynı noktadadırlar**. Aynı noktanın sıfıra uzaklığı da elbette aynıdır. Öyleyse mutlak değerleri eşit olmak zorundadır.

Burada karşı örnek aramak boşunadır; eşit iki sayının mutlak değerleri hiçbir durumda farklı çıkamaz.

devamı →

12 (çözümün devamı)

Önemli sonuç: Bir ifade doğru olabilir ama **tersi doğru olmayabilir**. Burada " $a = b \Rightarrow |a| = |b|$ " doğru, " $|a| = |b| \Rightarrow a = b$ " yanlıştır. Bir kuralı ters çevirirken her zaman yeniden denetlemek gerekir.

✓ **Doğru Sonuç: a) Yanlış; 6 ve -6 b) Aynı uzaklık ≠ aynı yer; sıfıra eşit uzaklıkta iki nokta var c) $a = b$ veya $a = -b$ d) Ters doğru**

13 Bir koşu parkurunda su çeşmesi **başlangıç noktası (0)** kabul edilmiştir. Çeşmenin doğusu "+", batısı "-" ile gösterilmektedir. İki koşucunun bulunduğu noktalar aşağıdaki sayı doğrusunda işaretlenmiştir (birimler 10'ar metredir).



- a) Her koşucunun konumunu tam sayıyla yazıp çeşmeye uzaklığını bulunuz.
b) İki koşucu arasındaki uzaklık kaç birimdir? Sayı doğrusundan sayarak bulunuz.
c) İki nokta arasındaki uzaklık, konumların farkının mutlak değeriyle de bulunur. Bu yöntemle b şikkını doğrulayınız.
d) Bir öğrenci "Uzaklık için iki sayının mutlak değerlerini toplarım." diyor. Bu yöntem her zaman doğru sonuç verir mi? Bir örnekle test ediniz.

- a) Doğrudan okunur:

Ela → -3 (çeşmenin 3 birim batısında, yani 30 m batıda)

Mert → +5 (çeşmenin 5 birim doğusunda, yani 50 m doğuda)

Çeşmeye uzaklıklar (mutlak değer):

$$|-3| = 3 \text{ birim} = 30 \text{ m (Ela)}$$

$$|+5| = 5 \text{ birim} = 50 \text{ m (Mert)}$$

- b) Sayı doğrusunda -3'ten +5'e kadar tek tek sayalım:

$$-3 \rightarrow -2 \rightarrow -1 \rightarrow 0 \rightarrow +1 \rightarrow +2 \rightarrow +3 \rightarrow +4 \rightarrow +5$$

Toplam **8 adım** atıldı. Öyleyse iki koşucu arası **8 birim = 80 metredir**.

(Başka bir deyişle: Ela'dan çeşmeye 3 birim, çeşmeden Mert'e 5 birim → $3 + 5 = 8$ ✓)

- c) **Farkın mutlak değeri** yöntemiyle:

$$|5 - (-3)| = |5 + 3| = |8| = 8 \text{ birim} \checkmark$$

Ters sırayla da aynı sonuç çıkar:

$$|(-3) - 5| = |-8| = 8 \text{ birim} \checkmark$$

devamı →

13 (çözümün devamı)

İki hesap da 8 verdi; b şıkkı **doğrulanmış** oldu. Mutlak değer alındığı için **hangi sayıdan hangisini çıkardığımız fark etmez**; uzaklık her zaman pozitif çıkar.

- **d) Hayır, her zaman doğru sonuç vermez.** Yöntem yalnızca **iki nokta sıfırın zıt taraflarındaysa** çalışır.

Bu soruda çalışır: Ela -3 'te (solda), Mert $+5$ 'te (sağda). $|-3| + |+5| = 3 + 5 = 8 \checkmark$ Doğru çıktı, çünkü sıfır tam aralarındadır.

Çalışmadığı örnek: İki koşucu da doğuda olsun — biri $+2$ 'de, diğeri $+5$ 'te.

Öğrencinin yöntemi: $|+2| + |+5| = 2 + 5 = 7 \times$

Doğrusu: $|5 - 2| = 3 \checkmark$ (Sayarak da görülür: $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$, üç adım.)

Yöntem 7 dedi ama gerçek uzaklık 3'tür; fark çok büyüktür.

Neden: Mutlak değerleri toplamak, iki noktayı **çeşmeden geçerek** dolaştırmak demektir. İkisi de aynı taraftaysa bu gereksiz bir gidiş-geliş ekler.

Her durumda çalışan yöntem: $|a - b|$, yani farkın mutlak değeri.

✓ Doğru Sonuç: a) Ela -3 (30 m), Mert $+5$ (50 m) b) 8 birim = 80 m c) $|5 - (-3)| = 8 \checkmark$
d) Hayır; aynı taraftaysa yanlış ($+2$ ve $+5 \rightarrow 7$ yerine 3)

14 Bir araştırma ekibi deniz seviyesini **0 m** kabul etmiştir. Ölçüm anında:

- Denizaltı: -180 m
- Dalgıç: -45 m
- Araştırma gemisi: 0 m
- Drone: $+120$ m

a) Her aracın deniz seviyesine uzaklığını bulunuz. En uzak olan hangisidir?

b) Denizaltı ile drone arasındaki dikey mesafe kaç metredir? İşlemi yazınız.

c) Denizaltı ile dalgıç arasındaki dikey mesafe kaç metredir? b şıkkındaki yöntemle karşılaştırınız.

d) Bir ekip üyesi "Denizaltı -180 m'de, drone $+120$ m'de. $-180 < 120$ olduğuna göre denizaltı deniz seviyesine daha yakındır." diyor. Bu çıkarımı değerlendiriniz.

- a) "Deniz seviyesine uzaklık" = **sıfıra uzaklık** = **mutlak değer**:

Denizaltı: $|-180| = 180$ m

Dalgıç: $|-45| = 45$ m

Gemi: $|0| = 0$ m (tam deniz seviyesinde)

Drone: $|+120| = 120$ m

devamı →

14 (çözümün devamı)

$180 > 120 > 45 > 0$ olduğundan **en uzak olan denizaltıdır** (180 m).

- **b)** Denizaltı ile drone sıfırın **zıt taraflarındadır**. Dikey mesafe, farkın mutlak değeriyle bulunur:

$$|120 - (-180)| = |120 + 180| = |300| = \mathbf{300 \text{ m}}$$

Başka yoldan doğrulama: Denizaltıdan deniz seviyesine 180 m çıkılır, oradan drone'a 120 m daha çıkılır $\rightarrow 180 + 120 = \mathbf{300 \text{ m}}$ ✓

İkisi zıt taraflarda olduğu için mutlak değerleri **toplamak** burada doğru sonuç verdi.

- **c)** Denizaltı ile dalgıç **aynı taraftadır** (ikisi de su altında). Yine farkın mutlak değeri kullanılır:

$$|(-45) - (-180)| = |-45 + 180| = |135| = \mathbf{135 \text{ m}}$$

Karşılaştırma: Burada mutlak değerleri **toplasaydık** $180 + 45 = 225 \text{ m}$ bulurduk ki bu **yanlış** olurdu. Çünkü toplama yöntemi, iki noktayı **deniz seviyesinden geçirerek** dolaştırır; oysa ikisi de aynı tarafta olduğu için böyle bir gidiş-geliş yoktur.

Kural: Zıt taraflardakiler için mutlak değerler toplanabilir, ama **her durumda çalışan yöntem farkın mutlak değeridir:** $|a - b|$.

- **d)** Çıkarım yanlıştır.

Ekip üyesinin " $-180 < 120$ " demesi **doğrudur**; sayı doğrusunda -180 gerçekten 120 'nin solundadır ve daha küçüktür. Ama buradan "deniz seviyesine daha yakın" sonucu **çıkamaz**.

Nerede yanılıyor: Sayının **küçüklüğü** ile **sıfıra uzaklık** farklı şeylerdir. Yakınlığın ölçütü sayının kendisi değil, **mutlak değeridir**:

$$|-180| = 180 \cdot |120| = 120$$

$180 > 120$ olduğundan **denizaltı deniz seviyesine daha UZAKTIR**; iddia tam tersidir.

Doğru ifade: "Mutlak değeri küçük olan, deniz seviyesine daha yakındır." Bu listede deniz seviyesine (gemi hariç) en yakın olan **dalgıçtır** (45 m).

✓ **Doğru Sonuç:** a) 180, 45, 0, 120 m; en uzak denizaltı b) $|120 - (-180)| = 300 \text{ m}$ c) 135 m (toplamak yanlış olurdu) d) Yanlış; ölçüt mutlak değer, denizaltı daha uzak

15 Öğrenciler sınıf panosu için **sayı kartları** hazırlayacaktır. Her madde için koşulu sağlayan bir sayı bulup, kartın arkasına koşulu **nasil sağladığını** yazacaklar. Dikkat: her maddede birden çok doğru cevap vardır.

- a) -2 ile -1 arasında bulunan, tam sayı olmayan bir rasyonel sayı yazınız. Tam sayılı kesir olarak da gösteriniz.
- b) Mutlak değeri $3/4$ olan iki farklı sayı yazınız.
- c) Rasyonel olan, tam sayı olmayan ve mutlak değeri 2'den büyük bir sayı yazınız.
- d) Bir arkadaşınız "Bir sayı ne kadar küçükse sıfıra o kadar yakındır." diyor. Ona iki örnekle mutlak değer ne işe yaradığını anlatan kısa bir metin yazınız.

- a) Örnek: $-3/2$

Tam sayılı kesir olarak: $-3/2 = -1 1/2$

Koşulların denetimi: Tam kısmı 1 olduğu için sayı -2 ile -1 arasındadır ✓ · Pay 2'ye bölünmediği için tam sayı değildir ✓ · Pay ve payda tam sayı, payda $\neq 0$ olduğu için rasyoneldir ✓

Nasil kurulur: -1 ile -2 arasında bir sayı istendiğine göre tam kısım -1 olmalı, üzerine 0 ile 1 arasında bir kesir eklenmelidir.

(Başka doğru cevaplar: $-5/4 = -1 1/4$ · $-7/5 = -1 2/5$ · $-1,8$ · $-5/3$)

- b) $3/4$ ve $-3/4$

Denetim: $|3/4| = 3/4$ ✓ ve $|-3/4| = 3/4$ ✓

Neden tam olarak iki tane: Mutlak değer sıfıra uzaklıktır; sayı doğrusunda sıfıra $3/4$ birim uzaklıkta **iki** nokta vardır — biri sağda ($3/4$), biri solda ($-3/4$). Üçüncü bir sayı bulunamaz.

($0,75$ ve $-0,75$ yazmak da aynı cevaptır; yalnızca gösterim farklıdır.)

- c) Örnek: $-7/3$

Denetim: Rasyoneldir ✓ · 7 sayısı 3'e tam bölünmediği için tam sayı değildir ✓ · $|-7/3| = 7/3 \approx 2,33 > 2$ ✓

Nasil kurulur: Mutlak değeri 2'den büyük olacaksa sayı ya 2'den büyük ya da -2 'den küçük olmalıdır. Sonra tam sayı olmaması için payı paydaya bölünmeyen bir kesir seçilir.

(Başka doğru cevaplar: $5/2$ · $-11/4$ · $3,5$ · $-9/4$ · $7/2$)

- d) Örnek metin:

"Bir sayının **küçük olması** ile **sıfıra yakın olması** aynı şey değildir. Küçüklük sayı doğrusunda **solda olmak** demektir; sıfıra yakınlık ise **sıfırdan az adım uzakta** olmak demektir. Bu ikisini ayırt etmek için **mutlak değeri** kullanırız: mutlak değer, sayının sıfıra uzaklığını verir ve yönü siler.

devamı →

15 (çözümün devamı)

Birinci örnek — -100 ve 3. -100 sayısı 3'ten çok daha küçüktür ($-100 < 3$). Ama sıfıra uzaklıklarına bakalım: $|-100| = 100$, $|3| = 3$. Demek ki sıfıra **yakın olan 3'tür**; -100 ise tam 100 birim uzaktadır. Senin kuralınla gitseydik -100'ü daha yakın sayacaktık, oysa tam tersi doğru.

İkinci örnek — -6 ve +6. Bu ikisinden -6 daha küçüktür. Ama $|-6| = |+6| = 6$ olduğu için ikisi de sıfıra **tam olarak aynı uzaklıktadır**. Yani bir sayı diğerinden küçük olduğu hâlde sıfıra daha uzak olmayabilir.

Kısacası: **hangisi daha küçük** diye soruluyorsa sayılara, **hangisi sıfıra daha yakın** diye soruluyorsa mutlak değerlere bakılır."

✓ **Doğru Sonuç: a) örn. $-3/2 = -1\frac{1}{2}$ b) $3/4$ ve $-3/4$ c) örn. $-7/3$ d) Küçüklük $\neq$ sıfıra yakınlık; ölçüt mutlak değerdir (-100 ve 3; -6 ve +6)**