

KONU ANLATIMLI SORU ÇÖZÜMLERİ

Tam Sayılar, Rasyonel Sayılar ve Mutlak Değer

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge CC BY-NC 4.0 lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabılır.

ÇÖZÜMLÜ SORU 1 Gerçek yaşam durumlarını tam sayıyla ifade etme ve referans seçme

Bir apartmanın zemin katında buluşan üç arkadaşın Kübra 3 kat yukarı, Önder 2 kat aşağı, Recep de 3 kat aşağı gitmek üzere asansöre binmişlerdir.

a) Kat düğmeleri numaralandırılırken hangi kat referans noktası kabul edilmelidir? b) Üçünün basacağı düğmeleri tam sayılarla yazınız. c) Gidilecek katların zemin kata uzaklıklarını bulup, farklı katlara gitmelerine rağmen zemin kata uzaklıkları eşit olan kişileri belirleyiniz.

1 Referans noktasını seç

Zemin kat (0. kat) referans kabul edilmelidir. Çünkü üçü de şu an zemin kattadır; ortak başlangıç noktası burasıdır.

Zemin kat 0 seçilince **yukarı çıkmak "+"**, **aşağı inmek "-"** olur ve bütün katlar tek bir sayı doğrusu üzerinde gösterilebilir.

Kat numaralarının **doğal bir başlangıç noktası yoktur**; zemin katın 0 olması seçilmiş bir referanstır — bu yüzden negatif kat numarası anlamlıdır.

2 Katları tam sayılarla yaz

Kübra 3 kat **yukarı** → **+3** (ya da kısaca 3)

Önder 2 kat **aşağı** → **-2**

Recep 3 kat **aşağı** → **-3**

3 Uzaklıkları mutlak değerle bul

"Zemin kata uzaklık" demek, **sıfıra uzaklık** demektir; bu da **mutlak değer**dir:

$|+3| = 3$ → Kübra zemin kata **3 kat** uzaklıktadır

$|-2| = 2$ → Önder zemin kata **2 kat** uzaklıktadır

$|-3| = 3$ → Recep zemin kata **3 kat** uzaklıktadır

4 Karşılaştır ve yorumla

$|+3| = |-3| = 3$ olduğundan **Kübra ile Recep'in** gidecekleri katların zemin kata uzaklıkları **birbirine eşittir**.

Ama aynı kata gitmiyorlar: Kübra 3. kata, Recep -3. kata (3 kat aşağı) gidiyor. Mutlak değer **yönü siler, yalnızca uzaklığı bırakır**; bu yüzden iki farklı kat aynı uzaklığı verebilir.

Kontrol: $3 \neq -3$ ama $|3| = |-3|$ ✓

Sonuç: a) Zemin kat (0) referans alınmalıdır. b) Kübra: +3, Önder: -2, Recep: -3. c) Uzaklıklar 3, 2 ve 3'tür; Kübra ile Recep'in uzaklıkları eşittir.

Dikkat: "Uzaklık" kelimesini gördüğünüzde **mutlak değer** düşünün. Uzaklık yön taşımaz, bu yüzden hep pozitiftir; oysa katın kendisi yön taşır ve negatif olabilir.

ÇÖZÜMLÜ SORU 2 Bir sayının rasyonel olup olmadığına karar verme

Aşağıdaki sayıların rasyonel olup olmadığına karar veriniz; rasyonel olanları **a/b** biçiminde yazınız.

$$-5 \cdot 0 \cdot 4,6 \cdot \%25 \cdot 0/7 \cdot 7/0$$

1 Ölçütü yaz

Bir sayının rasyonel olması için **a/b** biçiminde yazılabilmesi gerekir; burada **a ve b birer tam sayı** ve **b ≠ 0** olmalıdır.

Demek ki her seferinde iki soru soracağız: "Payı ve paydası tam sayı mı?" ve "Payda sıfırdan farklı mı?"

2 Tam sayıları incele

-5: Her tam sayı, paydası 1 olan bir rasyonel sayıdır → $-5 = -5/1$ ✓ rasyonel

0: Aynı biçimde → $0 = 0/1$ ✓ rasyonel

(Sıfırın **pay** olmasında hiçbir sakınca yoktur.)

3 Ondalık ve yüzde gösterimleri çevir

4,6: Virgülden sonra bir basamak var → paydaya 10 yazılır → $4,6 = 46/10$ ✓ rasyonel
(Sadeleştirilirse $23/5$ olur; ikisi de doğrudur.)

%25: Yüzde, paydası 100 olan kesir demektir → $\%25 = 25/100$ ✓ rasyonel
(Sadeleştirilirse $1/4$ olur.)

4 Sıfırın pay ve paydadaki farkını göster

0/7: Payda 7'dir, sıfırdan farklıdır ✓ Öyleyse bu bir rasyonel sayıdır ve değeri **0**'dir. ($0 \div 7 = 0$)

7/0: Payda **sıfırdır** × Bölme kuralına göre $7 = 0 \times \blacksquare$ eşitliği yazılır; **■** yerine ne konursa konsun sıfırla çarpım **hiçbir zaman 7 olamaz**. İşlem **tanımsızdır** → **rasyonel sayı değildir**.

5 Sonucu topla

Rasyonel olanlar: $-5 = -5/1 \cdot 0 = 0/1 \cdot 4,6 = 46/10 \cdot \%25 = 25/100 \cdot 0/7 = 0/1$

Rasyonel olmayan: $7/0$ (tanımsız)

Ders: Sıfır **payda** olamaz ama **pay** olabilir. $0/7$ ile $7/0$ arasındaki fark tam da budur.

Sonuç: 7/0 dışındakilerin hepsi rasyoneldir: $-5/1, 0/1, 46/10, 25/100$ ve $0/7 = 0/1$. 7/0 tanımsızdır.

Dikkat: Paydada sıfır gördüğünüzde hemen "tanımsız" deyin; payda sıfır görünce panik yapmayın. Ayırt etmek için **hangisi altta** diye bakın: alttaki sıfırsa iş biter.

ÇÖZÜMLÜ SORU 3 Negatif rasyonel sayıyı sayı doğrusunda gösterme

$-7/3$ rasyonel sayısını sayı doğrusunda gösteriniz. Bu sayı hangi ardışık iki tam sayı arasındadır? Aynı doğrudaki $-7/3$ ile -2 sayılarından hangisi daha küçüktür?

1. adım — işareti belirle

Sayı **negatiftir**. Öyleyse sayı doğrusundaki yeri **0'ın solunda** olacaktır. Bu adım, yanlış tarafa gitmeyi baştan engeller.

2. adım — hangi tam sayılar arasında?

Bileşik kesri tam sayılı kesre çevirelim: $7 \div 3$ işleminde bölüm 2, kalan 1'dir.

$$-7/3 = -2 \frac{1}{3}$$

Tam kısım 2 olduğuna göre sayı **-2 ile -3 arasındadır**. (Negatif olduğu için -2 'nin **solunda**, -3 'ün **sağındadır**.)

3. adım — eş parçalara böl

Paydada **3** olduğundan ardışık tam sayılar arası **3 eş parçaya** ayrılır. Yani -2 ile -3 arasında 3 eşit aralık oluşur.

4. adım — say ve işaretle

Tam kısma karşılık gelen **-2** noktasından başlanır. Sayı **negatif** olduğu için paydaki **1** kadar **sola** gidilir → ilk bölme çizgisi işaretlenir.

İşaretlenen nokta **$-2 \frac{1}{3}$** , yani **$-7/3$** 'tür.

Kontrol: Nokta gerçekten -3 ile -2 arasında mı? Evet ✓ Ve -2 'ye, -3 'ten daha yakın mı? Evet ($1/3$ birim uzakta) ✓

5. Karşılaştırmayı yap

Sayı doğrusunda **solda olan sayı daha küçüktür**. $-7/3$ sayısı -2 'nin solunda olduğuna göre:

$$-7/3 < -2$$

Sağlama: $-7/3 = -2,333...$ ve $-2 = -2,000...$ Negatif sayılarda mutlak değer büyüdükçe sayı küçülür; $|-7/3| = 7/3 \approx 2,33 > |-2| = 2$ olduğundan $-7/3$ daha küçüktür ✓

Sonuç: $-7/3 = -2 \frac{1}{3}$ olduğundan -3 ile -2 arasındadır ve -2 'den küçüktür.

Dikkat: Bileşik kesri **önce** tam sayılı kesre çevirin; hangi iki tam sayı arasında olduğu böylece kendiliğinden ortaya çıkar. Negatif sayılarda tam kısım bulunduktan sonra **sola** sayıldığını unutmayın.

ÇÖZÜMLÜ SORU 4 Mutlak değeri verilen sayıyı bulma ve sıralama

a) $|a| = 7$ ise a kaçtır? b) $|b| = 0$ ise b kaçtır? c) $|c| = -3$ eşitliğini sağlayan bir c sayısı var mıdır? d) $|-9|$, $|+4|$, $|-15|$, $|0|$ sayılarını küçükten büyüğe sıralayınız.

1 a) İki çözümü de bul

$|a| = 7$, "a sayısının sıfıra uzaklığı 7 birimdir" demektir. Sayı doğrusunda sıfıra 7 birim uzaklıkta **iki** nokta vardır: biri sağda, biri solda.

$$a = 7 \text{ veya } a = -7$$

Sağlama: $|7| = 7 \checkmark$ ve $|-7| = 7 \checkmark$ İki cevap da geçerlidir.

2 b) Sıfır istisnasını fark et

$|b| = 0$, "b sayısının sıfıra uzaklığı 0 birimdir" demektir. Sıfıra uzaklığı sıfır olan **tek** nokta sıfırın kendisidir.

$$b = 0 \text{ (tek çözüm)}$$

Burada iki çözüm çıkmaz, çünkü "+0" ile "-0" aynı sayıdır.

3 c) Çözumsuzlüğü gerekçelendir

$|c| = -3$ eşitliğini sağlayan **hiçbir sayı yoktur**.

Gerekçe: Mutlak değer bir **uzaklıktır**; uzaklık negatif olamaz. Sol taraf her zaman 0 veya pozitif çıkarken sağ taraf -3'tür; iki taraf hiçbir c değeri için eşitlenemez.

Karıştırmayın: $|-3| = 3$ ifadesi doğrudur — orada negatif olan mutlak değer **içidir**, sonucu değil.

4 d) Önce hesapla, sonra sırala

Sıralamadan **önce** her mutlak değer hesaplanır:

$$|-9| = 9 \cdot |+4| = 4 \cdot |-15| = 15 \cdot |0| = 0$$

Elde edilen sayılar küçükten büyüğe: $0 < 4 < 9 < 15$

Öyleyse sıralama: $|0| < |+4| < |-9| < |-15|$

5 İki sıralamayı karşılaştır

Sayıların **kendileri** sıralansaydı: $-15 < -9 < 0 < +4$

Mutlak değerleri sıralandığında: $0 < 4 < 9 < 15$

İki sıra **birbirinin neredeyse tersi** çıktı. Mutlak değer yönü sildiği için en küçük sayı (-15) mutlak değerde **en büyük** oldu. Soruda "sayıları mı, mutlak değerlerini mi" sıralayacağınıza her zaman dikkat ediniz.

Sonuç: a) $a = 7$ veya $a = -7$ b) $b = 0$ (tek çözüm) c) Çözüm yoktur; mutlak değer negatif olamaz d) $|0| < |+4| < |-9| < |-15|$

Dikkat: Mutlak değerli bir denklemde **daima iki olasılık arayın**; tek istisna sonucun sıfır olduğu durumdur. Sıralama sorularında ise mutlak değerleri **önce sayıya çevirip** öyle sıralayın.