

KONU ANLATIMI · CEVAPLI

Tam Sayılar, Rasyonel Sayılar ve Mutlak Değer

Kazanımlar: MAT.7.1.1. Tam sayıları ve sıfırın farklı anlamlarını gerçek yaşam durumlarıyla ilişkilendirebilme · MAT.7.1.2. Rasyonel sayıları tanıyabilme, farklı temsillerini belirleyebilme ve sayı doğrusunda gösterebilme · MAT.7.1.3. Bir sayının mutlak değerini belirleyebilme ve referans noktası kavramıyla ilişkilendirebilme

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge **CC BY-NC 4.0** lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabılır.

Tam Sayılar

Sayı doğrusunda **0 (sıfır)** noktasına **başlangıç noktası** ya da **referans noktası** denir. Sayıların başlangıç noktasına göre **yönünü** belirtmek için önlerine "+" veya "-" işareti yazılır.

- Önüne "+" işareti yazılan sayılara **pozitif tam sayılar** denir; bunlar sayı doğrusunda **0'ın sağında** yer alır: +1, +2, +3, ...
- Önüne "-" işareti yazılan sayılara **negatif tam sayılar** denir; bunlar sayı doğrusunda **0'ın solunda** yer alır: -1, -2, -3, ...

Tam sayılar, pozitif tam sayılar, **sıfır** ve negatif tam sayıların birleşmesiyle oluşur.



Sayı doğrusunda tam sayılar. 0 başlangıç noktasıdır; sağında pozitif, solunda negatif tam sayılar yer alır.

NOT

Üç önemli ayrıntı:

- **Pozitif tam sayıların önüne "+" yazılmayabilir.** +4 ile 4 aynı sayıdır.
- **Sıfırın işareti yoktur.** Sıfır ne pozitif ne negatif tam sayı olarak kabul edilir; o başlangıç noktasının kendisidir.
- **Tam sayılar doğal sayıları kapsar.** Doğal sayılar sıfır ve pozitif tam sayılardan oluşur; yani her doğal sayı bir tam sayıdır ama her tam sayı doğal sayı değildir (-3 gibi).

Gerçek yaşamda birbirinin **zıttı** olan durumlar tam sayılarla ifade edilir. Bir yön "+" seçilirse, karşıt yön zorunlu olarak "-" olur:

- Alışverişten **kâr** edilmesi "+", **zarar** edilmesi "-"
- 0'ın **üstündeki** sıcaklıklar "+", **altındaki** sıcaklıklar "-"
- Zemin katın **üstündeki** katlar "+", **altındaki** katlar "-"
- Deniz seviyesinin **üstü** "+", **altı** "-"

Durum	Tam Sayı ile Gösterimi
100 TL kâr edilmesi	+100
50 TL zarar edilmesi	-50
Deniz seviyesinin 10 m altı	-10
Uçurtmanın yerden 45 m yükseğe çıkması	+45
Su borusu için yerin 2 m altına kazılması	-2
Asansörle giriş katın 3 kat aşağısına inilmesi	-3
Asansörle giriş katın 7 kat yukarısına çıkılması	+7
Termometrenin 4 °C göstermesi	+4
Termometrenin sıfırın 1 derece altını göstermesi	-1

NOT

Sık yapılan hata: Bir durumun işaretini, o durumu **anlatan cümleye** bakarak değil, **kelimeye** bakarak seçmek. "Serhat'ın tatil **giderleri** 3800 TL tutmuştur" cümlesinde "gider" harcamadır → **-3800**. Oysa "Ceren'in bu ayki **geliri** 5400 TL'dir" cümlesinde kazanç vardır → **+5400**. İşareti belirleyen, seçtiğiniz **referansa göre yöndür**; sayının büyüklüğü değildir.

Sıfırın Farklı Anlamları ve Referans Noktası

"0" her büyüklükte aynı anlama gelmez. Bazı niceliklerde 0 gerçek bir **yokluğu** gösterir ve doğal bir başlangıçtır; bazılarında ise 0 yalnızca **seçilmiş bir referans noktasıdır**.

Doğal başlangıç noktası OLANLAR: 0 değeri fiziksel olarak anlamlıdır, "hiç yok" demektir.

Örnek: 0 kg kütle, 0 m uzunluk, 0 cm² alan, 0 cm³ hacim → hepsi **"yok"** anlamına gelir. Bu niceliklerde negatif değer **olamaz**; -3 kg kütle diye bir şey yoktur.

Doğal başlangıç noktası OLMAYANLAR: 0 değeri ölçekte seçilmiştir; yokluk anlamına gelmez.

Örnek: 0 °C "sıcaklık yok" demek **değildir**; sadece suyun donma noktasına göre seçilmiş bir referanstır. Zamanı ölçerken de her zaman bir başlangıç seçeriz (saat 00.00, milat, bir yarışın başlangıç saati gibi).

Nicelik	0 Ne Anlama Gelir?	Doğal Başlangıç Noktası Var mı?
Kütle	Hiç kütle yok	Evet ✓
Uzunluk	Hiç uzunluk yok	Evet ✓
Alan	Hiç alan yok	Evet ✓
Hacim	Hiç hacim yok	Evet ✓
Sıcaklık	Suyun donma noktası (seçilmiş)	Hayır ×
Zaman	Seçilen başlangıç anı (saat 00.00, milat)	Hayır ×
Deniz seviyesine göre yükseklik	Deniz seviyesi (seçilmiş)	Hayır ×
Bir binanın katları	Zemin kat (seçilmiş)	Hayır ×

Başlangıç noktası **amaca göre değişebilir** ya da herkesçe kabul edilen **sabit bir değer** olabilir. Örneğin bir fabrikada paketlerin hedef kütlesi 500 g seçildiğinde ürünler bu değere göre değerlendirilir: 3 g fazla gelen paket **+3**, 3 g eksik gelen paket **-3** ile gösterilir. Deniz seviyesinin 0 kabul edilip rakımların buna göre belirlenmesi de **sabit bir başlangıç noktasına** örnektir. Bu tür başlangıçlara **referans noktası** denir.

NOT

Sık yapılan hata: Negatif değeri "sıfırdan az, yani yokluktan da az" diye anlamsız bulmak. Negatif sayı, **seçilen referansın öbür tarafı** demektir. Paketin kütlesi asla negatif olamaz (kütlenin doğal başlangıcı var), ama paketin **hedeften sapması** pekâlâ -3 g olabilir. Ölçülen şeyin ne olduğuna dikkat ediniz: **kütle** mi, **kütle farkı** mı?

Rasyonel Sayılar

Bir bütünün eş parçalarından birini veya birkaçını belirten sayıya **kesir** denir. Kesir çizgisinin üstündeki sayı **pay**, altındaki sayı **paydadır**.

Denk kesirlerin hepsi sayı doğrusunda **tek bir noktayı** gösterir: $4/16 = 2/8 = 1/4$. Bu ortak değer, pay ve payda **aralarında asal** olana kadar sadeleştirilerek elde edilir.

a ve **b** birer tam sayı ve **b ≠ 0** olmak üzere **a/b** biçiminde yazılabilen sayılara **rasyonel sayılar** denir.

- Sıfırdan büyük olan rasyonel sayılara **pozitif rasyonel sayı** denir: $+2/5$, $+1\ 4/5$, $11/6$
- Sıfırdan küçük olan rasyonel sayılara **negatif rasyonel sayı** denir: $-1/6$, $-1\ 4/5$, $-9/2$
- Ondalık gösterimi **a/b** biçiminde yazılabilen her sayı rasyoneldir: $0,4$ · $-1,23$ · $2,6^-$
- Her tam sayı, paydası 1 olan bir rasyonel sayıdır: $2 = 2/1$ ve $-3 = -3/1$

Negatif rasyonel sayılarda **eksi işaretinin yeri** sayının değerini değiştirmez. İşaret payın önüne, kesir çizgisinin önüne ya da paydanın önüne yazılabilir; üçü de aynı sayıdır:
 $-8/3 = 8/(-3) = (-8)/3$

NOT

Rasyonel sayıların paydası sıfır olamaz. Nedenini $5/0$ örneğiyle görelim. Bölme işleminin temel kuralına göre $5 = 0 \times \blacksquare$ eşitliği yazılır. Bu eşitlikte $\blacksquare$ yerine hangi sayıyı yazarsak yazalım, sıfır ile çarpım **hiçbir zaman 5 olamaz**. Bu yüzden işlemin sonucu **tanımsız** kabul edilir ve **$5/0$ bir rasyonel sayı değildir**.

Dikkat: $0/5$ ise tanımsız değildir; $0/5 = 0$ 'dır ve rasyonel bir sayıdır. Sıfır **payda** olamaz, ama **pay** olabilir.

Sayı kümeleri birbirini **kapsar**: doğal sayılar tam sayıların içindedir, tam sayılar da rasyonel sayıların içindedir.

Doğal sayılar $\subset$ Tam sayılar $\subset$ Rasyonel sayılar

Bu yüzden 5 sayısı hem doğal, hem tam, hem rasyoneldir; -3 tam ve rasyoneldir ama doğal değildir; $2/5$ yalnızca rasyoneldir.

Sayı	Doğal mı?	Tam mı?	Rasyonel mi?	a/b Biçimi
7	Evet	Evet	Evet	$7/1$
0	Evet	Evet	Evet	$0/1$
-5	Hayır	Evet	Evet	$-5/1$
$2/5$	Hayır	Hayır	Evet	$2/5$
$-1\frac{4}{5}$	Hayır	Hayır	Evet	$-9/5$
4,6	Hayır	Hayır	Evet	$46/10$
%25	Hayır	Hayır	Evet	$25/100$
$5/0$	Hayır	Hayır	Hayır (tanımsız)	—

Rasyonel Sayıların Sayı Doğrusunda Gösterimi

Bir rasyonel sayı sayı doğrusunda gösterilirken **dört adım** izlenir:

- 1. adım:** Sayının **işareti** belirlenir (0'ın sağında mı solunda mı olacak?).
- 2. adım:** Sayının **hangi ardışık iki tam sayı arasında** olduğu belirlenir.
- 3. adım:** Belirlenen ardışık tam sayılar arası, rasyonel sayının **paydasındaki sayı kadar** eş parçaya bölünür.
- 4. adım:** Tam kısma karşılık gelen noktadan başlanarak, sayı **pozitifse payı kadar sağa**, **negatifse payı kadar sola** ilerlenir ve ulaşılan nokta işaretlenir.

ÖRNEK

$-11/4$ rasyonel sayısını sayı doğrusunda gösterelim.

1. adım: Sayı negatiftir $\rightarrow$ 0'ın **solunda** olacaktır.

2. adım: $-11/4 = -2 \frac{3}{4}$ olduğundan bu sayı **-2 ile -3 arasındadır**.

3. adım: Paydada 4 olduğundan ardışık tam sayılar arası **4 eş parçaya** ayrılır.

4. adım: Tam kısım -2'dir; paydaki 3 kadar **sola** gidilerek yer işaretlenir.



$-11/4$ rasyonel sayısının sayı doğrusundaki yeri. Paydası 4 olduğu için ardışık tam sayılar arası 4 eş parçaya bölünmüş, -2 noktasından 3 parça sola gidilmiştir.

ÖRNEK

$-5/3$ sayısı $-1 \frac{2}{3}$ olduğu için **-2 ile -1 arasında**, $7/3$ sayısı $2 \frac{1}{3}$ olduğu için **2 ile 3 arasında** bulunur.

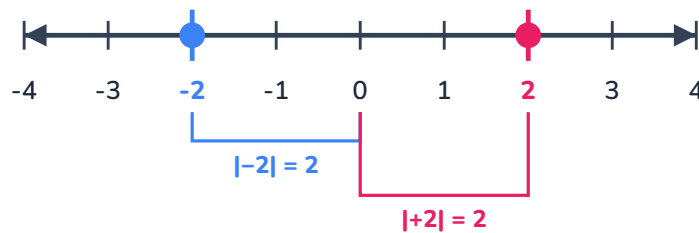
Tam sayılı kesre çevirmek, sayının hangi iki tam sayı arasında olduğunu **tek bakışta** söyler: tam kısım hangi sayıysa, negatif sayılarda o sayı ile **bir soldaki**, pozitif sayılarda o sayı ile **bir sağdaki** tam sayı arasındadır.

NOT

Sık yapılan hata: Negatif rasyonel sayılarda **yanlış yöne** saymak. $-11/4$ için "-2'den 3 birim **sağa**" gidilirse $-1 \frac{1}{4}$ 'e varılır ki bu yanlıştır. Negatif sayılarda payda büyüdükçe sayı **küçülür**, yani **sola** gidilir. Kontrol yolu: bulduğunuz nokta, sayının tam sayılı hâlindeki iki tam sayı arasında mı? $-11/4 = -2 \frac{3}{4}$ ise nokta mutlaka **-3 ile -2** arasında olmalıdır.

Mutlak Değer

Bir sayının sayı doğrusunda **sıfıra olan uzaklığı**, o sayının **mutlak değeridir**. Mutlak değer **|** sembolü ile gösterilir.



-2 ve +2 sayılarının sıfıra uzaklıkları eşittir; bu yüzden mutlak değerleri de eşittir: $|-2| = |+2| = 2$.

Ters işaretli sayıların mutlak değerleri birbirine eşittir, çünkü sıfıra uzaklıkları eşittir:

$$|-2| = |+2| = 2 \cdot |-1/2| = |+1/2| = 1/2$$

Sıfırın mutlak değeri sıfırdır: $|0| = 0$

NOT

Mutlak değer hiçbir zaman negatif olamaz. Uzaklık negatif olamayacağı için $|a|$ her zaman **0 veya pozitif**dir. Bu yüzden " $|x| = -4$ " gibi bir eşitliğin çözümü **yoktur**.

Dikkat: Bu, "mutlak değerın içi negatif olamaz" demek **değildir**. İçi pekâlâ negatif olur; sonuç negatif olamaz: $|-5| = 5$.

ÖRNEK

$$|-5| = 5 \cdot |+1400| = 1400 \cdot |-62| = 62 \cdot |-5/9| = 5/9$$

Sıralama örneği: $|-2|$, $|+41|$, $|-56|$ sayılarını büyükten küçüğe sıralayalım.

Önce mutlak değerler hesaplanır: $|-2| = 2$, $|+41| = 41$, $|-56| = 56$

$56 > 41 > 2$ olduğundan sıralama **$|-56| > |+41| > |-2|$** biçimindedir.

Fark ediniz: Sayıların kendisi sıralansaydı $-56 < -2 < +41$ olurdu; mutlak değerleri sıralamak **bambaşka bir sıra** verir.

Mutlak değeri verilen sayının kendisi iki farklı değer olabilir. Çünkü sıfıra eşit uzaklıkta **iki** nokta vardır: biri sağda, biri solda.

$|*| = 4$ ise $* = 4$ veya $* = -4$ 'tür.

NOT

Sık yapılan hata: $|x| = 4$ denkleminde yalnızca **$x = 4$** cevabını verip negatif çözümü atlamak. Mutlak değer "işareti silen" bir işlem olduğu için geri dönüşte **iki olasılık** doğar. Sıfır tek istisnadır: $|x| = 0$ ise x yalnızca **0**'dır, çünkü sıfıra uzaklığı 0 olan tek nokta sıfırın kendisidir.

Etkinlikler

ETKİNLİK 1

Aşağıdaki ifadelerden doğru olanların yanına "D", yanlış olanların yanına "Y" yazınız.

- a) ☒ **D** Sıfır ne pozitif ne de negatif bir tam sayıdır.
- b) ☒ **D** Her doğal sayı aynı zamanda bir tam sayıdır.
- c) ☒ **Y** Her tam sayı aynı zamanda bir doğal sayıdır.
- d) ☒ **D** Her tam sayı, paydası 1 olan bir rasyonel sayıdır.
- e) ☒ **Y** Paydası sıfır olan bir kesir de rasyonel sayıdır.

devamı →

ETKİNLİK 1

Aşağıdaki ifadelerden doğru olanların yanına "D", yanlış olanların yanına "Y" yazınız.

(devam)

- f) **Y** $0/9$ ifadesi tanımsızdır.
- g) **D** Kütle, uzunluk ve hacim doğal başlangıç noktası olan niceliklerdir.
- h) **Y** $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, "sıcaklık yok" anlamına gelir.
- ı) **D** $-8/3$, $8/(-3)$ ve $(-8)/3$ aynı rasyonel sayıyı gösterir.
- i) **Y** Bir sayının mutlak değeri negatif olabilir.
- j) **D** Ters işaretli iki sayının mutlak değerleri birbirine eşittir.
- k) **Y** $|x| = 6$ denkleminin yalnızca bir çözümü vardır.
- l) **D** $|x| = 0$ denkleminin yalnızca bir çözümü vardır.

ETKİNLİK 2

Aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri doldurunuz.

Sayı	a/b Biçimi	Hangi İki Tam Sayı Arasında?	Mutlak Değeri
$-7/2$	$-7/2$	-4 ile -3	$7/2$
$9/4$	$9/4$	2 ile 3	$9/4$
-6	$-6/1$	Tam sayıdır, arada değildir	6
$1,5$	$15/10$	1 ile 2	$1,5$
$-0,4$	$-4/10$	-1 ile 0	$0,4$
$\%75$	$75/100$	0 ile 1	$0,75$
$-11/5$	$-11/5$	-3 ile -2	$11/5$
0	$0/1$	Tam sayıdır, arada değildir	0

ETKİNLİK 3 Aşağıdaki durumları pozitif veya negatif tam sayı kullanarak ifade ediniz.

- a) Asiye'nin uçurtması yerden 45 m yükseğe çıkmıştır. **+45 m**
- b) Patlak su borusunu bulmak için yerin 2 m altına kadar kazıldı. **-2 m**
- c) Serhat'ın tatil giderleri 3800 TL tutmuştur. **-3800 TL (gider, yani harcama)**
- d) Ceren'in bu ayki geliri 5400 TL'dir. **+5400 TL**
- e) Efe bir günde 900 TL kâr etti. **+900 TL**
- f) Ebru asansörle giriş katın 3 kat aşağısına indi. **-3. kat**
- g) Özge asansörle giriş katın 7 kat yukarısına çıktı. **+7. kat**
- h) Bir dalgıç deniz seviyesinin 18 m altında yüzmektedir. **-18 m**
- ı) Hedef kütlesi 500 g olan bir paket 6 g eksik gelmiştir. **-6 g (hedeften sapma)**
- i) Bir şehrin rakımı deniz seviyesinden 950 m yüksektir. **+950 m**

ETKİNLİK 4 Aşağıdaki soruları çözünüz.

- a) -5, 0, 4,6 ve %25 sayılarını a/b biçiminde yazınız. **$-5 = -5/1$, $0 = 0/1$, $4,6 = 46/10 (= 23/5)$, $\%25 = 25/100 (= 1/4)$**
- b) 5/0 neden rasyonel sayı değildir? Kısaca açıklayınız. **Bölmenin temel kuralına göre $5 = 0 \times \blacksquare$ yazılır. Sıfırla çarpım hiçbir zaman 5 olamayacağı için işlem tanımsızdır; paydası sıfır olan ifade rasyonel sayı değildir.**
- c) Kütle, alan, sıcaklık, uzunluk, zaman ve hacim niceliklerinden hangileri doğal başlangıç noktasına sahiptir? **Kütle ✓, alan ✓, uzunluk ✓, hacim ✓ (0 = yokluk). Sıcaklık × ve zaman × (0 seçilmiş bir referanstır).**
- d) $-11/4$ sayısı hangi ardışık iki tam sayı arasındadır? Tam sayılı kesir olarak yazarak gösteriniz. **$-11/4 = -2 \frac{3}{4} \rightarrow -3$ ile -2 arasındadır.**
- e) $|-2|$, $|+41|$ ve $|-56|$ sayılarını büyükten küçüğe sıralayınız. **$|-2| = 2$, $|+41| = 41$, $|-56| = 56 \rightarrow |-56| > |+41| > |-2|$**
- f) $|x| = 12$ ise x kaç olabilir? **$x = 12$ veya $x = -12$ (sıfıra uzaklığı 12 olan iki nokta vardır).**
- g) $|y| = -5$ eşitliğini sağlayan bir y sayısı var mıdır? Gerekçelendiriniz. **Yoktur. Mutlak değer bir uzaklıktır, uzaklık negatif olamaz; sol taraf hiçbir zaman -5 olamaz.**
- h) Bir dalgıç -24 m derinlikte, bir kuş +24 m yükseklikte bulunmaktadır. Deniz seviyesine uzaklıkları arasında nasıl bir ilişki vardır? **$|-24| = |+24| = 24$ olduğundan deniz seviyesine uzaklıkları eşittir (24 m). Ama konumları zıt yönlerdedir.**
- ı) Sayı doğrusunda $-7/3$ ile -2 sayılarından hangisi daha küçüktür? **$-7/3 = -2 \frac{1}{3}$ olduğundan -2 'nin solundadır $\rightarrow -7/3 < -2$**
- i) Bir fabrikada paketlerin hedef kütlesi 500 g'dır. 494 g gelen paketi hedefe göre tam sayıyla ifade ediniz. Paketin kütlesi negatif olabilir mi? **Hedeften sapma -6 g'dır. Paketin kütlesi (494 g) negatif olamaz; çünkü kütlenin doğal başlangıç noktası vardır. Negatif olan, kütlenin kendisi değil hedeften sapmadır.**

ETKİNLİK 5

Aşağıdaki koşulları sağlayan birer sayı yazıp seçiminizi gerekçelendiriniz. Her maddede birden çok doğru cevap vardır.

- a) Tam sayı olmayan, -1 ile 0 arasında bulunan bir rasyonel sayı. **Örneğin $-1/2$. Negatiftir ve mutlak değeri 1 'den küçük olduğu için -1 ile 0 arasındadır. ($-1/4$, $-2/3$, $-0,3$ de olur.)**
- b) Mutlak değeri 5 olan iki farklı sayı. **5 ve -5 . Sıfıra uzaklığı 5 birim olan tam olarak iki nokta vardır; biri sağda biri soldadır.**
- c) Rasyonel olan ama tam sayı olmayan, mutlak değeri 2 'den büyük bir sayı. **Örneğin $-7/3$. Tam sayı değildir (7 , 3 'e bölünmez) ve $|-7/3| = 7/3 \approx 2,33 > 2$ 'dir. ($5/2$, $-11/4$, $3,5$ de olur.)**
- d) Doğal başlangıç noktası olmayan, günlük hayatta kullandığınız bir nicelik ve o nicelikte negatif bir değer. **Örneğin sıcaklık: -7 °C. Sıfır derece yokluk değil, suyun donma noktasıdır; bu yüzden negatif sıcaklık anlamlıdır. (Kat numarası -2 , hedeften sapma -6 g da olur.)**
- e) "Mutlak değeri eşit olan iki sayı birbirine eşittir." ifadesini çürüten bir karşı örnek. **Örneğin 4 ve -4 . $|4| = |-4| = 4$ 'tür ama $4 \neq -4$ 'tür. Mutlak değer yönü sildiği için farklı sayılar aynı mutlak değeri verebilir.**
- f) "Payda sıfır olamayacağına göre pay da sıfır olamaz." ifadesini çürüten bir örnek. **Örneğin $0/7$. Paydası 7 'dir (sıfırdan farklı ✓), payı sıfırdır ve değeri 0 'dır. Kural yalnızca paydayı bağlar; pay sıfır olabilir.**

Konu Özeti

ÖZET

Sayı doğrusunda **0** başlangıç (referans) noktasıdır; sağında **pozitif**, solunda **negatif** tam sayılar bulunur ve **sıfırın işareti yoktur**. Kütle, uzunluk, alan ve hacimde **0 yokluk** demektir (doğal başlangıç); sıcaklık, zaman ve kat numarasında **0 seçilmiş bir referanstır**, bu yüzden negatif değer anlamlıdır. **a ve b tam sayı, $b \neq 0$** olmak üzere **a/b** biçiminde yazılabilen sayılara **rasyonel sayı** denir; **payda sıfır olamaz** ($5/0$ tanımsız) ama **pay sıfır olabilir** ($0/5 = 0$). Her tam sayı paydası 1 olan bir rasyoneldir ve **doğal $\subset$ tam $\subset$ rasyonel** kapsaması geçerlidir. Negatif rasyonellerde eksi işareti payın, kesir çizgisinin ya da paydanın önünde olabilir; değer değişmez. Sayı doğrusunda gösterim **dört adımdır**: işaret $\rightarrow$ hangi iki tam sayı arası $\rightarrow$ paydaya göre eş parçalara bölme $\rightarrow$ pay kadar ilerleme (negatifte **sola**). **Mutlak değer**, bir sayının **sıfıra uzaklığıdır**; hiçbir zaman negatif olamaz, ters işaretlilerin mutlak değerleri eşittir ve **$|x| = a$** denkleminin ($a > 0$ iken) **iki** çözümü vardır.