

ÇÖZÜMLER

Rasyonel Sayıların Ondalık Gösterimi ve Devirli Ondalık Gösterimler

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge CC BY-NC 4.0 lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabılır.

1. Bölüm Soru 1-5

1

Bir kırtasiyede raf etiketleri kesirlerle numaralanmıştır:

$\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{25} \cdot \frac{9}{22} \cdot \frac{12}{30} \cdot \frac{11}{16} \cdot \frac{21}{35} \cdot \frac{5}{7}$

Görevli bu kesirleri, ondalık gösterimlerinin **sonlu** ya da **devirli** oluşuna göre iki kutuya ayıracaktır.

a) Kesirleri iki gruba ayırınız. Her biri için en sade hâlini ve paydanın asal çarpanlarını yazınız.

b) Hangi kesirlerde sadeleştirme kararı değiştirdi? Açıklayınız.

c) $\frac{3}{8}$ ve $\frac{7}{25}$ kesirlerinin ondalık gösterimlerini yazınız.

- a) Her kesir önce en sade hâline getirilir, sonra paydanın asal çarpanlarına bakılır:

SONLU (paydada 2 ve 5 dışında asal çarpan yok):

- $\frac{3}{8} \rightarrow$ sade; $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \checkmark$
- $\frac{7}{25} \rightarrow$ sade; $25 = 5 \cdot 5 \checkmark$
- $\frac{12}{30} \rightarrow \frac{2}{5}$; $5 \checkmark$
- $\frac{11}{16} \rightarrow$ sade; $16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \checkmark$
- $\frac{21}{35} \rightarrow \frac{3}{5}$; $5 \checkmark$

DEVİRLİ (paydada 2 ve 5 dışında asal çarpan var):

- $\frac{5}{12} \rightarrow$ sade; $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \times$
- $\frac{9}{22} \rightarrow$ sade; $22 = 2 \cdot 11 \times$
- $\frac{5}{7} \rightarrow$ sade; $7 \times$

- b) İki kesirde sadeleştirme kararı değiştirdi:

$\frac{12}{30}$: Sadeleştirmeden bakılırsa $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ görülür ve "devirli" denir. Oysa $\frac{12}{30}$ sadeleşerek $\frac{2}{5}$ olur; 3 kaybolur ve gösterim **sonludur** (0,4).

$\frac{21}{35}$: Sadeleştirmeden bakılırsa $35 = 5 \cdot 7$ görülür. Oysa $\frac{21}{35} = \frac{3}{5}$ 'tir ve gösterim **sonludur** (0,6).

Bu yüzden kural her zaman **en sade hâl** üzerinden işletilir.

- c) **$\frac{3}{8}$:** Paydayı 1000 yapmak için pay ve payda 125 ile çarpılır:

$$\frac{3}{8} = \frac{375}{1000} = \mathbf{0,375}$$

devamı →

1 (çözümün devamı)

7/25: Paydayı 100 yapmak için pay ve payda 4 ile çarpılır:

$$7/25 = 28/100 = \mathbf{0,28}$$

İkisi de sonlu çıktı ✓ (a) şıkkındaki sınıflandırmayla uyuyor.

✓ **Doğru Sonuç: a) Sonlu: 3/8, 7/25, 12/30, 11/16, 21/35 — Devirli: 5/12, 9/22, 5/7 b) 12/30 ve 21/35 c) 0,375 ve 0,28**

- 2** Bir parkta 3 kilometrelik bir koşu parkuru vardır. Parkur, şekildeki sayı doğrusuyla modellenmiştir; **her kilometre 4 eşit parçaya** bölünmüştür. Parkurda bir **su istasyonu** ve bir **dinlenme noktası** işaretlenmiştir.



- a) Su istasyonunun ve dinlenme noktasının kilometre cinsinden konumlarını hem kesir hem ondalık gösterimle yazınız.**
b) İki nokta arasındaki mesafe kaç kilometredir? Kesir ve ondalık olarak yazınız.
c) Bu konumların ondalık gösterimleri neden sonludur? Paydaya bakarak açıklayınız.

- a) Her kilometre 4 eşit parçaya bölünmüş;** demek ki bir parça **1/4 km**'dir ve **payda 4**'tür.

Su istasyonu: 0'dan itibaren **3** parça ilerdedir →

$$3/4 \text{ km} = 3 : 4 = \mathbf{0,75 \text{ km}}$$

Dinlenme noktası: 2'den itibaren **1** parça ilerdedir →

$$2 \text{ tam } 1/4 = \mathbf{9/4 \text{ km} = 2,25 \text{ km}}$$

- b) Ondalıkla:** $2,25 - 0,75 = \mathbf{1,5 \text{ km}}$

Kesirle: $9/4 - 3/4 = 6/4 = \mathbf{3/2 \text{ km}}$

Kontrol: $3/2 = 3 : 2 = 1,5$ ✓ İki yol aynı sonucu verdi.

- c) Kesirler 3/4 ve 9/4'tür;** ikisi de **en sade hâdedir** (3 ve 9, 4'ü bölmez).

Payda: $\mathbf{4 = 2 \cdot 2}$

Paydada yalnızca **2** var; 2 ve 5 dışında bir asal çarpan **yok**. Bu yüzden ondalık gösterimleri **sonludur**.

Not: Parkur her kilometreyi 3 eşit parçaya bölecek şekilde işaretlenseydi payda 3 olurdu ve $1/3 = 0,\bar{3}$ gibi **devirli** değerler ortaya çıkardı.

devamı →

2 (çözümün devamı)

✓ **Doğru Sonuç:** a) Su $3/4 = 0,75$ km; Dinlenme $9/4 = 2,25$ km b) $3/2 = 1,5$ km c)
Payda $4 = 2 \cdot 2$, 2 ve 5 dışında asal çarpan yok

3 Bir manavda tartılan ürünlerin kütleleri şöyledir:

Elma: 1,4 kg · Portakal: 3,25 kg · Üzüm: 0,875 kg

- a) Her ürünün kütlesini en sade rasyonel sayı olarak yazınız.
b) Toplam kütleyi önce kesirlerle, sonra ondalık gösterimle hesaplayınız ve iki sonucun aynı olduğunu gösteriniz.
c) Toplam kütlenin kesir hâlinin ondalık gösterimi sonlu mudur? Paydaya bakarak gerekçelendiriniz.

- a) Virgülden sonraki basamak sayısı kadar sıfır paydaya yazılır, sonra sadeleştirilir:

1,4 → 1 basamak → $14/10$ → ikisi de 2'ye bölünür → $7/5$

3,25 → 2 basamak → $325/100$ → ikisi de 25'e bölünür → $13/4$

0,875 → 3 basamak → $875/1000$ → ikisi de 125'e bölünür → $7/8$

- b) **Kesirlerle:** Paydalar 5, 4 ve 8'dir. Ortak payda **40** alınır:

$7/5 = 56/40$ $13/4 = 130/40$ $7/8 = 35/40$

Toplam = $(56 + 130 + 35)/40 = 221/40$

Ondalıkla:

$1,400 + 3,250 + 0,875 = 5,525$ kg

Karşılaştırma: $221 : 40 = 5,525$ ✓ İki yol da aynı sonucu verdi.

- c) $221/40$ en sade hâldedir ($221 = 13 \cdot 17$, 40'la ortak çarpanı yok).

Payda: $40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$

Paydada yalnızca 2 ve 5 var → ondalık gösterim **SONLUDUR** ✓

Nitekim 5,525 sonlu bir gösterimdir; üç ürünün kütlesi de sonlu olduğu için toplamlarının da sonlu çıkması beklenen bir sonuçtur.

✓ **Doğru Sonuç:** a) $7/5, 13/4, 7/8$ b) $221/40 = 5,525$ kg c) Evet sonlu; $40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$

4 Arda, $0,4\overline{7}$ devirli ondalık gösterimini rasyonel sayıya çevirmek için defterine şunu yazmıştır:

"Virgülden sonrası 47, devretmeyen kısım 4'tür. O hâlde
 $0,4\overline{7} = (47 - 4)/99 = 43/99$ 'dur."

a) Arda'nın hangi adımda hata yaptığını açıklayınız.

b) Doğru sonucu bulunuz.

c) Arda'nın bulduğu $43/99$ sayısı aslında hangi devirli gösterime karşılık gelir? Bölme yaparak gösteriniz.

- **a) Arda'nın pay işlemi doğrudur:** virgülden sonraki sayı 47, devretmeyen kısım 4, pay = $47 - 4 = 43$ ✓

Hata **paydadadır**. Kural şudur:

- Paydaya **devreden** basamak sayısı kadar **9** yazılır.
- Ardından **devretmeyen** basamak sayısı kadar **0** yazılır.

$0,4\overline{7}$ gösteriminde devreden yalnızca **7** (1 basamak), devretmeyen ise **4** (1 basamak) tır. Yani payda **bir 9 ve bir 0** içermelidir: **90**.

Arda ise iki tane 9 yazarak **99** bulmuştur; bu, ondalık kısmın **tamamının** devrettiği durumun paydasıdır.

- **b) Doğru hesap:**

$$0,4\overline{7} = (47 - 4)/90 = \mathbf{43/90}$$

43 ve 90'ın ortak böleni yoktur (43 asaldır), kesir en sade hâldedir.

$$\text{Kontrol: } 43 : 90 = 0,4777... = 0,4\overline{7} \checkmark$$

- **c) Arda'nın bulduğu sayıyı bölelim:**

$$43 : 99 = 0,434343...$$

Yani $43/99 = 0,4\overline{3}$ 'tür; ondalık kısmın **tamamı** devreder.

Karşılaştıralım:

$$\text{Doğru sayı: } 0,4\overline{7} = 0,4\overline{777}...$$

$$\text{Arda'nın sayısı: } 0,4\overline{3} = 0,4\overline{343}...$$

Bunlar **tamamen farklı iki sayıdır**; paydadaki tek bir hane farkı sonucu değiştirmiştir.

✓ Doğru Sonuç: a) Payda 99 değil 90 olmalıydı b) $43/90$ c) $43/99 = 0,4\overline{3}$ ($0,434343...$), farklı bir sayı

5 Bir matematik dersinde üç öğrenci şu iddiaları ortaya atmıştır:

- I. Ela:** "Her rasyonel sayının bir ondalık gösterimi vardır."
II. Mert: "Ondalık gösterimi devirli olan her sayı bir rasyonel sayıdır."
III. Sude: "Paydasında 3 bulunan her kesrin ondalık gösterimi devirlidir."

a) Ela'nın iddiası doğru mudur? Gerekçelendiriniz.

b) Mert'in iddiası doğru mudur? Bir örnekle açıklayınız.

c) Sude'nin iddiası doğru mudur? Doğru değilse karşıt örnek veriniz ve iddiayı doğru olacak biçimde düzeltiniz.

• **a) Ela haklıdır.**

Bir rasyonel sayı a/b biçimindedir ve $b \neq 0$ 'dır. Payı paydaya bölme işlemi **her zaman** yapılabilir. Bu bölmede iki şey olabilir: kalan bir yerde sıfır olur (sonlu gösterim) ya da kalanlar tekrar etmeye başlar (devirli gösterim). Üçüncü bir ihtimal yoktur; çünkü b'ye bölmede kalan en fazla $b - 1$ farklı değer alabilir, bu kadar adımda mutlaka bir kalan tekrar eder.

Demek ki **her rasyonel sayının** mutlaka bir ondalık gösterimi vardır.

• **b) Mert haklıdır.**

Devirli bir ondalık gösterim her zaman kesre çevrilebilir; bunun kuralı vardır (paydaya devreden basamak kadar 9, devretmeyen basamak kadar 0). Kural bir kesir ürettiğine göre sayı rasyoneldir.

Örnek: $0,\overline{27} = 27/99 = 3/11 \rightarrow$ pay ve payda tam sayı, payda sıfır değil $\rightarrow$ rasyonel ✓

Bir başka örnek: $1,\overline{83} = (183 - 18)/90 = 165/90 = 11/6 \checkmark$

• **c) Sude haksızdır.**

Karşıt örnek: $9/12$ kesrinin paydasında 3 vardır ($12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$). Ama $9/12$ sadeleşerek **$3/4$** olur ve $3/4 = 0,75$, yani **sonlu** bir gösterimdir.

Başka karşıt örnekler: $12/30 = 2/5 = 0,4$ | $6/3 = 2$ | $15/6 = 5/2 = 2,5$

Düzeltilmiş iddia: "**En sade hâlinde** paydasında 3 bulunan her kesrin ondalık gösterimi devirlidir."

Bu hâliyle iddia doğrudur; çünkü 3, sadeleşmeden kurtulamadığında paydada kalır ve 2 ile 5 dışında bir asal çarpan olarak gösterimi devirli yapar.

✓ **Doğru Sonuç: a) Ela doğru b) Mert doğru ($0,\overline{27} = 3/11$) c) Sude yanlış; $9/12 = 3/4 = 0,75$. "En sade hâlinde" eklenmelidir.**

2. Bölüm Soru 6–10

6 Bir sitenin **240 litrelik** su deposunun **5/6'sı** doludur.

a) **5/6 kesrinin ondalık gösterimini yazınız. Gösterim sonlu mu devirli midir?**

Gerekçelendiriniz.

b) **Depodaki su miktarını kesirle hesaplayınız.**

c) **Bir öğrenci 5/6 yerine 0,83 kullanarak hesap yapıyor. Bulduğu sonuç nedir ve kaç litre sapma oluşur?**

d) **Bu durum, devirli gösterimli kesirlerle çalışırken neye dikkat etmemiz gerektiğini gösterir?**

- a) **5/6 en sade hâldedir (5 asal, 6'yı bölmez).**

Payda: **6 = 2 · 3** → paydada **3** var, yani 2 ve 5 dışında bir asal çarpan var → gösterim **DEVİRLİDİR.**

Bölelim: **5 : 6 = 0,8333...** → tekrar eden rakam 3 →

$$5/6 = 0,8\overline{3}$$

- b) **Kesirle hesap:**

$$240 \cdot 5/6 = (240 : 6) \cdot 5 = 40 \cdot 5 = \mathbf{200 \text{ litre}}$$

Bu **tam** sonuçtur; hiçbir yuvarlama yapılmamıştır.

- c) **Öğrencinin hesabı:**

$$240 \cdot 0,83 = \mathbf{199,2 \text{ litre}}$$

$$\text{Sapma: } 200 - 199,2 = \mathbf{0,8 \text{ litre}}$$

Öğrenci 0,833 kullansaydı $240 \cdot 0,833 = 199,92$ litre bulurdu; sapma 0,08 litreye düşerdi ama **yine sıfır olmazdı**. Kaç basamak alırsa alsın, devirli gösterimi kestiği sürece sonuç tam olmaz.

- d) **Ondalık gösterimi devirli olan bir kesirle işlem yaparken, gösterimi belirli bir basamakta kesip kullanmak her zaman bir sapma yaratır. Bu yüzden:**

- Hesap **kesirle** yapılmalı, ondalığa çevirme **en sona** bırakılmalıdır.
- 5/6 gibi bir kesirde 240 sayısı paydaya tam bölündüğü için kesirle işlem hem **daha kolay** hem **tam doğrudur**.

Kontrol: 200/240 sadeleştirilirse (ikisi de 40'a bölünür) **5/6** ✓ çıkar.

✓ **Doğru Sonuç: a) $5/6 = 0,8\overline{3}$, devirli (payda $6 = 2 \cdot 3$) b) 200 litre c) 199,2 litre, 0,8 litre sapma d) Devirli gösterimi kesmek sapma yaratır; kesirle hesapla**

- 7** Bir yüzme yarışmasında dört sporcunun 50 metre serbest stil dereceleri kronometreyle saniye cinsinden ölçülmüştür:

Ece: 28,5 sn · Mert: 28,75 sn · Sude: 28,4 sn · Kaan: 28,625 sn

- a) Sporcuları dereceye göre sıralayınız (en hızlıdan en yavaşa).
 b) Her derecenin ondalık kısmını en sade rasyonel sayı olarak yazınız.
 c) Bu derecelerin ondalık gösterimleri neden hiçbiri devirli değildir? Kronometrenin ölçüm biçimiyle ilişkilendirerek açıklayınız.

- a) Yüzmede **küçük derece** daha iyidir. Dereceleri basamak basamak karşılaştıralım; tam kısımları eşit (28), onda birlere bakalım:

$$28,4 < 28,5 < 28,625 < 28,75$$

1. Sude (28,4) → 2. Ece (28,5) → 3. Kaan (28,625) → 4. Mert (28,75)

- b) Ondalık kısımlar kesre çevrilir ve sadeleştirilir:

- Ece: $0,5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

- Mert: $0,75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

- Sude: $0,4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

- Kaan: $0,625 = \frac{625}{1000} = \frac{5}{8}$

Paydalara dikkat: 2, 4, 5, 8 — hepsi yalnızca 2 ve 5'in çarpanlarından oluşuyor.

- c) Kronometre, süreyi **onda bir, yüzde bir ya da binde bir saniye** cinsinden ölçer. Yani okuduğumuz her değer daima

(bir tam sayı) / **10, 100 veya 1000**

biçimindedir.

10'un kuvvetlerinin asal çarpanları **yalnızca 2 ve 5'tir**:

$$10 = 2 \cdot 5 \quad | \quad 100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \quad | \quad 1000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

Sadeleştirme paydayı ancak **küçültür**, yeni asal çarpan **ekleyemez**. Bu yüzden bir kronometre değerinin paydasında hiçbir zaman 3, 7, 11 gibi bir asal çarpan bulunmaz ve ölçülen hiçbir derece **devirli** olamaz.

Not: Buna karşılık "bir işi 3 kişiyle paylaşmak" gibi bir durumda payda 3 olur ve $\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$ gibi devirli değerler ortaya çıkar.

✓ **Doğru Sonuç: a) Sude, Ece, Kaan, Mert b) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{8}$ c) Kronometre paydası 10'un kuvveti olan değer üretir; 10'un kuvvetlerinin asal çarpanları yalnızca 2 ve 5'tir**

8 Tahtaya üç devirli ondalık gösterim yazılmıştır:

I. $-6,85555... = -6,\overline{85}$

II. $0,58333... = 0,\overline{583}$

III. $3,142142142... = 3,\overline{142}$

a) Hangi gösterimler yanlıştır? Her biri için doğrusunu yazınız.

b) Yanlış yazılan gösterimler aslında hangi sayıları ifade eder? Açık biçimde yazınız.

c) I ve II'nin doğru hâllerini rasyonel sayıya çeviriniz.

- a) Devir çizgisi **yalnızca tekrar eden blok** üzerine konur.

I. YANLIŞ. $-6,85555...$ sayısında 8 **bir kez** yazılır, tekrar eden yalnızca **5**'tir.

Doğrusu: $-6,\overline{85}$

II. YANLIŞ. $0,58333...$ sayısında 5 ve 8 birer kez yazılır, tekrar eden yalnızca **3**'tür.

Doğrusu: $0,\overline{583}$

III. DOĞRU. $3,142142142...$ sayısında **142** bloğu bütün hâlinde tekrar eder, çizgi üçünün üzerindedir ✓

- b) Yanlış yazılan gösterimlerin gerçek anlamı:

$-6,\overline{85} \rightarrow 85$ bloğu tekrar eder $\rightarrow -6,\overline{858585}...$

$0,\overline{583} \rightarrow 583$ bloğu tekrar eder $\rightarrow 0,\overline{583583583}...$

Bunlar tahtaya yazılmak istenen sayılardan **tamamen farklıdır**. Devir çizgisinin nerede başladığı, sayının kendisini değiştirir.

- c) **I. $-6,\overline{85}$** (ondalık kısmın tamamı devretmiyor)

Tam kısım 6, virgülden sonrası 85, devretmeyen kısım 8, devreden 5.

Pay: $85 - 8 = 77$ | Payda: devreden 1 basamak $\rightarrow$ bir 9; devretmeyen 1 basamak $\rightarrow$ bir 0 $\rightarrow 90$

$$-6,\overline{85} = -6 \text{ tam } 77/90 = -(6 \cdot 90 + 77)/90 = -617/90$$

Kontrol: $617 : 90 = 6,8555... \checkmark$

II. $0,\overline{583}$

Virgülden sonrası 583, devretmeyen kısım 58, devreden 3.

Pay: $583 - 58 = 525$ | Payda: bir 9, iki 0 $\rightarrow 900$

$$0,\overline{583} = 525/900 \rightarrow \text{ikisi de } 75\text{'e bölünür} \rightarrow 7/12$$

Kontrol: $7 : 12 = 0,58333... \checkmark$

devamı $\rightarrow$

8 (çözümün devamı)

✓ **Doğru Sonuç: a) I ve II yanlış → $-6,8\overline{5}$ ve $0,58\overline{3}$; III doğru b) $-6,858585\dots$ ve $0,583583\dots$ c) $-617/90$ ve $7/12$**

9 A ve B birer rakam olmak üzere aşağıdaki eşitlikler veriliyor:

$$0, A\overline{6} = 7/15 \quad \text{ve} \quad 1, \overline{B} = 14/9$$

a) A rakamını bulunuz.

b) B rakamını bulunuz.

c) A/B kesrinin ondalık gösterimini yazınız. Gösterim sonlu mudur?

d) $0, A\overline{6} + 1, \overline{B}$ toplamının kesir ve devirli ondalık karşılıklarını bulunuz.

- a) $0, A\overline{6}$ gösteriminde virgülden sonrası **A6** (onlar basamağı A, birler basamağı 6 olan iki basamaklı bir sayı), devretmeyen kısım **A**, devreden **6**'dır.

$$\text{Pay: } A6 - A \mid \text{Payda: bir 9, bir 0} \rightarrow \mathbf{90}$$

$$\text{Eşitliği kuralım. Sağ tarafın paydasını 90 yapalım: } 7/15 = \mathbf{42/90}$$

$$(A6 - A)/90 = 42/90 \rightarrow A6 - A = 42$$

$$\text{Deneyelim: } A = 4 \text{ ise "A6" sayısı } \mathbf{46} \text{ 'dır ve } 46 - 4 = \mathbf{42} \checkmark$$

$$\mathbf{A = 4}$$

$$\text{Kontrol: } 0,4\overline{6} = 0,4666\dots \text{ ve } 7 : 15 = 0,4666\dots \checkmark$$

- b) $1, \overline{B}$ gösteriminde ondalık kısmın **tamamı** devreder, tam kısım 1'dir:

$$1, \overline{B} = 1 \text{ tam } B/9 = (9 + B)/9$$

$$(9 + B)/9 = 14/9 \rightarrow 9 + B = 14 \rightarrow \mathbf{B = 5}$$

$$\text{Kontrol: } 1, \overline{5} = 1,5555\dots \text{ ve } 14 : 9 = 1,5555\dots \checkmark$$

- c) $A = 4$ ve $B = 5 \rightarrow A/B = \mathbf{4/5}$

$$\text{Paydayı 10 yapalım: pay ve payda 2 ile çarpılır} \rightarrow 8/10 = \mathbf{0,8}$$

4/5 en sade hâldedir ve payda **5**'tir; 2 ve 5 dışında asal çarpan yok $\rightarrow$ gösterim **SONLUDUR** ✓

- d) Toplamı kesirlerle hesaplayalım:

$$7/15 + 14/9$$

$$15 = 3 \cdot 5 \text{ ve } 9 = 3 \cdot 3 \rightarrow \text{ortak payda } \mathbf{45}$$

$$7/15 = 21/45 \quad 14/9 = 70/45$$

devamı $\rightarrow$

9 (çözümün devamı)

$$\text{Toplam} = (21 + 70)/45 = \mathbf{91/45}$$

$$\text{Ondalık gösterimi için bölme: } 91 : 45 = 2,0222...$$

$$\text{Tekrar eden rakam } 2 \rightarrow \mathbf{2,0\overline{2}}$$

$$\text{Kontrol (kuralla geri çevirelim): } 2,0\overline{2} = 2 \text{ tam } (02 - 0)/90 = 2 \text{ tam } 2/90 = 2 \text{ tam } 1/45 = (90 + 1)/45 = 91/45 \checkmark$$

✓ Doğru Sonuç: a) $A = 4$ b) $B = 5$ c) $4/5 = 0,8$, sonlu d) $91/45 = 2,0\overline{2}$

10 Bir kart oyununda aşağıdaki devirli ondalık gösterimler yazılı kartlar vardır:

$$0,\overline{7} \cdot 0,\overline{25} \cdot 1,\overline{34} \cdot 0,\overline{083} \cdot 2,\overline{6} \cdot 0,\overline{125} \cdot 3,\overline{102} \cdot 0,\overline{456}$$

- a) Kartları "ondalık kısmın tamamı devrediyor" ve "ondalık kısmın bir bölümü devrediyor" biçiminde iki gruba ayırınız.
- b) Her kartın kesre çevrildiğinde paydası ne olur? Yazınız.
- c) $0,\overline{456}$ ve $1,\overline{34}$ kartlarının en sade kesir karşılıklarını bulunuz.

- a) Devir çizgisi virgülden hemen sonra başlıyorsa **tamamı** devrediyordur; arada çizgisiz rakam varsa **bir bölümü** devrediyordur.

$$\text{Tamamı devrediyor: } 0,\overline{7} \cdot 1,\overline{34} \cdot 2,\overline{6} \cdot 3,\overline{102}$$

$$\text{Bir bölümü devrediyor: } 0,\overline{25} \cdot 0,\overline{083} \cdot 0,\overline{125} \cdot 0,\overline{456}$$

- b) Payda = (devreden basamak sayısı kadar 9) + (devretmeyen basamak sayısı kadar 0):
 - $0,\overline{7} \rightarrow$ devreden 1 $\rightarrow$ **9**
 - $1,\overline{34} \rightarrow$ devreden 2 $\rightarrow$ **99**
 - $2,\overline{6} \rightarrow$ devreden 1 $\rightarrow$ **9**
 - $3,\overline{102} \rightarrow$ devreden 3 $\rightarrow$ **999**
 - $0,\overline{25} \rightarrow$ devreden 1, devretmeyen 1 $\rightarrow$ **90**
 - $0,\overline{083} \rightarrow$ devreden 1, devretmeyen 2 $\rightarrow$ **900**
 - $0,\overline{125} \rightarrow$ devreden 2, devretmeyen 1 $\rightarrow$ **990**
 - $0,\overline{456} \rightarrow$ devreden 1, devretmeyen 2 $\rightarrow$ **900**

Dikkat: $0,\overline{125}$ ile $0,\overline{456}$ aynı sayıda basamağa sahip ama **paydaları farklıdır** (990 ve 900); çünkü kaç basamağın devrettiği farklıdır.

- c) $0,\overline{456} \rightarrow$ virgülden sonrası 456, devretmeyen kısım 45:

devamı $\rightarrow$

10 (çözümün devamı)

Pay: $456 - 45 = 411$ | Payda: **900**

$411/900 \rightarrow$ ikisi de 3'e bölünür $\rightarrow$ **137/300**

Kontrol: $137 : 300 = 0,45666... \checkmark$

$1,\overline{34} \rightarrow$ tam kısım 1, devreden blok 34 (2 basamak):

$1,\overline{34} = 1 \text{ tam } 34/99 = (99 + 34)/99 = \mathbf{133/99}$

$133 = 7 \cdot 19$ ve $99 = 9 \cdot 11 \rightarrow$ ortak çarpan yok, en sade hâl $\checkmark$

Kontrol: $133 : 99 = 1,3434... \checkmark$

✓ Doğru Sonuç: a) Tamamı: $0,\overline{7} \cdot 1,\overline{34} \cdot 2,\overline{6} \cdot 3,\overline{102}$ — Bir bölümü: $0,\overline{25} \cdot 0,\overline{083} \cdot 0,\overline{125} \cdot 0,\overline{456}$ b) 9, 99, 9, 999, 90, 900, 990, 900 c) $137/300$ ve $133/99$

3. Bölüm Soru 11–15**11** Bir sınıfta $0,\overline{9}$ sayısı üzerine tartışma çıkmıştır:

I. Ela: " $0,\overline{9}$ sayısı 1'den biraz küçüktür. Ne kadar 9 yazarsak yazalım 1'e asla ulaşamayız."

II. Mert: " $0,\overline{9} = 1$ 'dir. Kuralı uygularsak $9/9 = 1$ çıkar."

III. Sude: " $0,\overline{9}$ ile 1 arasında başka bir rasyonel sayı yazabilirim."

a) Hangi öğrenci haklıdır? Kuralı uygulayarak gösteriniz.

b) Sude'nin iddiasını, "iki farklı sayı arasında her zaman başka bir sayı vardır" bilgisini kullanarak değerlendiriniz.

c) Aynı mantıkla $2,\overline{9}$ ve $0,\overline{49}$ hangi sayılara eşittir? Bulunuz.

- a) Mert haklıdır.**

$0,\overline{9}$ gösteriminde ondalık kısmın **tamamı** devreder; devreden blok 9, bir basamaklıdır. Kurala göre:

$$0,\overline{9} = \mathbf{9/9 = 1}$$

Ela'nın düşüncesindeki yanılğı şudur: $0,9$; $0,99$; $0,999$ gibi **sonlu** sayıların her biri gerçekten 1'den küçüktür. Ama $0,\overline{9}$ bunlardan biri değildir; **sonsuz** sayıda 9'un bulunduğu tek bir sayıdır ve o sayı tam olarak 1'e eşittir.

İkinci bir gösterim: $1/3 = 0,\overline{3}$ olduğunu biliyoruz. Her iki tarafı 3 ile çarpalım:

$$3 \cdot (1/3) = 3 \cdot 0,\overline{3} \rightarrow \mathbf{1 = 0,\overline{9} \checkmark}$$

- b) Sude haksızdır.**

Bilgi şudur: **birbirinden farklı** iki rasyonel sayı arasında her zaman başka bir rasyonel sayı vardır (örneğin ortalamaları).

devamı $\rightarrow$

11 (çözümün devamı)

Sude'nin iddiasını sınavalım: $0,\overline{9}$ ile 1'in ortalamasını alalım.

$$(0,\overline{9} + 1) : 2 = (1 + 1) : 2 = 2 : 2 = 1$$

Ortalama, iki sayıdan biriyle aynı çıktı. Oysa **farklı** iki sayının ortalaması ikisinin de tam ortasında, ikisinden de farklı olurdu. Demek ki $0,\overline{9}$ ile 1 **farklı iki sayı değildir**; aynı sayıdır.

Aralarına yazılacak bir sayı yoktur, çünkü **arada bir aralık yoktur**.

- **c) $2,\overline{9}$:** Tam kısım 2'dir, ondalık kısmın tamamı devreder:

$$2,\overline{9} = 2 \text{ tam } 9/9 = 2 + 1 = 3$$

$0,\overline{49}$: Ondalık kısmın tamamı devretmiyor. Virgülden sonrası 49, devretmeyen kısım 4, devreden 9.

Pay: $49 - 4 = 45$ | Payda: bir 9, bir 0 $\rightarrow 90$

$$0,\overline{49} = 45/90 = 1/2 = 0,5$$

Yani $0,\overline{49}$ sayısı tam olarak **$0,5$** 'tir. Genel kural: bir ondalık gösterimin sonunda sonsuz 9 varsa, ondan önceki basamak **1 artırılıp** 9'lar atılır.

✓ **Doğru Sonuç: a) Mert haklı; $0,\overline{9} = 9/9 = 1$ b) Sude haksız; ortalamaları yine 1 çıkar, aralarında sayı yoktur c) $2,\overline{9} = 3$ ve $0,\overline{49} = 0,5$**

12 Aşağıdaki iki gösterim birbirine çok benzemektedir ama **devir çizgisinin yeri** farklıdır:

$$x = 0,\overline{36} \text{ ve } y = 0,\overline{3\overline{6}}$$

- x ve y sayılarını en sade kesir olarak yazınız.
- Hangisi daha büyüktür? İki farklı yoldan gösteriniz.
- $x - y$ farkını en sade kesir olarak bulunuz.
- Her iki kesir için pay + payda toplamalarını bulup karşılaştırınız.

- **a) $x = 0,\overline{36}$** $\rightarrow$ ondalık kısmın **bir bölümü** devrediyor. Virgülden sonrası 36, devretmeyen kısım 3, devreden 6.

Pay: $36 - 3 = 33$ | Payda: bir 9, bir 0 $\rightarrow 90$

$$x = 33/90 \rightarrow \text{ikisi de 3'e bölünür} \rightarrow x = 11/30$$

Kontrol: $11 : 30 = 0,3666... \checkmark$

$y = 0,\overline{3\overline{6}}$ $\rightarrow$ ondalık kısmın **tamamı** devrediyor, blok 36 (2 basamak).

Pay: **36** | Payda: iki 9 $\rightarrow 99$

devamı $\rightarrow$

12 (çözümün devamı)

$$y = 36/99 \rightarrow \text{ikisi de 9'a bölünür} \rightarrow y = 4/11$$

$$\text{Kontrol: } 4 : 11 = 0,3636... \checkmark$$

- b) 1. yol — ondalık gösterimlerle:**

$$x = 0,3\mathbf{6}66...$$

$$y = 0,3\mathbf{6}36...$$

Tam kısımlar ve onda birler eşit (3), yüzde birler eşit (6). **Binde birlere** bakalım:

$$x\text{'te } \mathbf{6}, y\text{'de } \mathbf{3} \rightarrow 6 > 3 \rightarrow x > y$$

- 2. yol — kesirlerle (paydaları eşitleyerek):**

11/30 ile 4/11 karşılaştırılacak. Ortak payda $30 \cdot 11 = \mathbf{330}$:

$$11/30 = (11 \cdot 11)/330 = \mathbf{121/330}$$

$$4/11 = (4 \cdot 30)/330 = \mathbf{120/330}$$

$$\text{Paydalar eşit} \rightarrow \text{payı büyük olan büyüktür: } 121 > 120 \rightarrow x > y \checkmark$$

İki yol da aynı sonucu verdi.

- c) (b) şıkkındaki eşit paydalı hâlleri kullanalım:**

$$x - y = 121/330 - 120/330 = \mathbf{1/330}$$

$$330 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \text{ ve pay } 1 \rightarrow \text{kesir en sade hâldedir.}$$

$$\text{Kontrol (ondalıkla): } 0,36666... - 0,36363... = 0,00303... \text{ ve } 1 : 330 = 0,00303... \checkmark$$

İki sayı birbirine çok yakın ama **eşit değildir**; devir çizgisinin tek bir rakam kayması farklı bir sayı üretir.

- d) $x = 11/30 \rightarrow \text{pay} + \text{payda} = 11 + 30 = \mathbf{41}$**

$$y = 4/11 \rightarrow \text{pay} + \text{payda} = 4 + 11 = \mathbf{15}$$

Toplamlar çok farklı (41 ile 15) olmasına rağmen sayılar birbirine oldukça yakındır. Bu, "pay + payda büyükse sayı da büyüktür" gibi bir kuralın **doğru olmadığını** gösterir.

✓ Doğru Sonuç: a) $x = 11/30$, $y = 4/11$ b) $x > y$ ($0,3666... > 0,3636...$; $121/330 > 120/330$) c) $1/330$ d) 41 ve 15

13 Bir boya karışımı üç bileşenden oluşur:

- **A boyası:** karışımın $7/12$ 'si
- **B boyası:** karışımın $0,25$ 'i
- **Su:** geri kalanı

a) $7/12$ kesrinin ondalık gösterimini yazınız. Sonlu mudur devirli midir? Gerekçelendiriniz.

b) $0,25$ oranını en sade kesir olarak yazınız.

c) Suyun oranını kesir ve ondalık gösterim olarak bulunuz.

d) 60 litrelik bir karışımda her bileşenden kaç litre vardır?

e) Bu hesapta neden ondalık gösterimle değil kesirle çalışmak gerekir?

- **a)** $7/12$ en sade hâdedir (7 asal, 12'yi bölmez).

Payda: $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \rightarrow$ paydada **3** var $\rightarrow$ gösterim **DEVİRLİDİR**.

Bölelim: $7 : 12 = 0,58333... \rightarrow$ tekrar eden rakam 3 $\rightarrow$

$$7/12 = 0,58\overline{3}$$

- **b)** $0,25 \rightarrow 2$ basamak $\rightarrow 25/100 \rightarrow$ ikisi de 25'e bölünür $\rightarrow 1/4$

(Payda 4 = $2 \cdot 2 \rightarrow$ bu oranın gösterimi sonludur $\checkmark$)

- **c)** Karışımın tamamı **1** birimdir:

$$Su = 1 - 7/12 - 1/4$$

$$\text{Ortak payda 12: } 1 = 12/12 \text{ ve } 1/4 = 3/12$$

$$Su = 12/12 - 7/12 - 3/12 = (12 - 7 - 3)/12 = 2/12 = 1/6$$

Ondalık gösterimi: $1 : 6 = 0,1666... \rightarrow 0,1\overline{6}$ (payda 6 = $2 \cdot 3 \rightarrow$ devirli $\checkmark$)

- **d)** 60 litre üzerinden hesaplayalım:

$$\text{A boyası: } 60 \cdot 7/12 = (60 : 12) \cdot 7 = 5 \cdot 7 = 35 \text{ litre}$$

$$\text{B boyası: } 60 \cdot 1/4 = 15 \text{ litre}$$

$$\text{Su: } 60 \cdot 1/6 = 10 \text{ litre}$$

Kontrol: $35 + 15 + 10 = 60 \text{ litre } \checkmark$ Tamamı kullanıldı.

- **e)** A boyasının ve suyun oranlarının ondalık gösterimleri **devirlidir** ($0,58\overline{3}$ ve $0,1\overline{6}$). Devirli bir gösterimi belirli bir basamakta kesip kullanmak sonucu bozar:

- $60 \cdot 0,58 = 34,8 \text{ litre}$ (doğrusu 35)

- $60 \cdot 0,17 = 10,2 \text{ litre}$ (doğrusu 10)

Toplamları $34,8 + 15 + 10,2 = 60 \text{ litre}$ çıksa bile **bileşenler yanlış** olur.

Kesirle çalışıldığında 60 sayısı 12, 4 ve 6'ya **tam bölündüğü** için sonuçlar hem tam sayı hem kesin çıkar. Kural: **işlemi kesirle yap, ondalığa çevirmeyi en sona bırak.**

devamı $\rightarrow$

13 (çözümün devamı)

✓ Doğru Sonuç: a) $7/12 = 0,58\bar{3}$, devirli b) $1/4$ c) $1/6 = 0,1\bar{6}$ d) A: 35 L, B: 15 L, su: 10 L
e) Devirli gösterimi kesmek sapma yaratır

14 "Paydaya bakma kuralı" hakkında üç iddia ortaya atılmıştır:

- I. "Paydası 2'nin bir kuvveti olan her kesrin ondalık gösterimi sonludur."
II. "Ondalık gösterimi sonlu olan bir kesrin paydası mutlaka yalnızca 2 ve 5'in çarpanlarından oluşur."
III. "Bir kesrin ondalık gösterimi devirliyse hem payı hem paydası tek sayıdır."

a) I. iddia doğru mudur? Gerekçelendiriniz.

b) II. iddia doğru mudur? Doğru değilse karşıt örnek veriniz ve iddiayı düzeltiniz.

c) III. iddia doğru mudur? Doğru değilse iki farklı karşıt örnek veriniz.

• a) I. iddia DOĞRUDUR.

Payda 2'nin bir kuvveti ise (2, 4, 8, 16, ...) asal çarpanları yalnızca 2'dir. Sadeleştirme paydayı ancak küçültür, yeni bir asal çarpan **ekleyemez**; en sade hâlde de payda 2'nin bir kuvveti olarak kalır.

Paydada 2 ve 5 dışında asal çarpan bulunmadığı için gösterim **sonludur**.

Örnekler: $1/2 = 0,5$ | $3/4 = 0,75$ | $5/8 = 0,625$ | $11/16 = 0,6875$ ✓

• b) II. iddia YANLIŞTIR — çünkü "en sade hâlinde" kaydı eksiktir.

Karşıt örnek: $3/6$ kesrinin paydası $6 = 2 \cdot 3$ 'tür, yani yalnızca 2 ve 5'in çarpanlarından oluşmaz. Buna rağmen $3/6 = 1/2 = 0,5$, yani gösterimi **sonludur**.

Başka karşıt örnekler: $9/12 = 3/4 = 0,75$ | $14/35 = 2/5 = 0,4$ | $21/42 = 1/2 = 0,5$

Düzeltilmiş iddia: "Ondalık gösterimi sonlu olan bir kesrin **en sade hâlindeki** paydası, yalnızca 2 ve 5'in çarpanlarından oluşur."

Bu hâliyle iddia doğrudur.

• c) III. iddia YANLIŞTIR. Gösterimin devirli olması, paydada 2 ve 5 **dışında** bir asal çarpan bulunmasıyla ilgilidir; paydanın ya da payın tek/çift oluşuyla değil. Paydada 2 ve 3 birlikte bulunabilir.

1. karşıt örnek: $7/30 \rightarrow 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, payda **çifttir**. Buna rağmen 3 bulunduğu için gösterim devirlidir: $7/30 = 0,2\bar{3}$

2. karşıt örnek: $4/15 \rightarrow$ pay **çifttir** (4). Payda $15 = 3 \cdot 5$ içinde 3 bulunduğu için gösterim devirlidir: $4/15 = 0,2\bar{6}$

devamı →

14 (çözümün devamı)

Bir örnek daha: $5/6 = 0,8\overline{3}$ (payda 6 çift) ✓ Karar yalnızca **en sade paydanın asal çarpanlarına** bakılarak verilir.

✓ **Doğru Sonuç: a) I doğru b) II yanlış ($3/6 = 0,5$); "en sade hâlindeki" eklenmeli c) III yanlış ($7/30 = 0,2\overline{3}$ ve $4/15 = 0,2\overline{6}$)**

- 15** Bir "sayı atölyesi" etkinliğinde öğrencilerden, verilen koşulları sağlayan rasyonel sayılar üretmeleri ve seçimlerini gerekçelendirmeleri isteniyor. Her maddede birden çok doğru cevap olabilir.

Aşağıdaki koşulların her biri için birer sayı yazınız ve seçiminizi gerekçelendiriniz.

- a) Ondalık gösteriminde devreden bloğu 3 basamaklı olan bir rasyonel sayı.
b) Paydası 3'e bölünen ama ondalık gösterimi sonlu olan bir kesir.
c) Payı ile paydasının toplamı 20 olan ve ondalık gösterimi sonlu olan bir kesir.
d) Ondalık gösterimi $0,8\overline{3}$ olan kesri bulup 2 katının ondalık gösterimini yazınız.
e) Devirli görünen ama bir tam sayıya eşit olan bir gösterim ($0,9$ dışında).

- **a)** Devreden blok 3 basamaklıysa payda **999** (ya da 999'un bölenlerinden biri) olmalıdır. $999 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37$ 'dir.

Cevap: $1/27 \rightarrow 1 : 27 = 0,037037... = 0,0\overline{37}$ ✓ (devreden blok 037, üç basamak)

Kontrol: $0,0\overline{37} = 37/999 \rightarrow$ ikisi de 37'ye bölünür $\rightarrow 1/27$ ✓

Başka cevaplar: $5/37 = 0,1\overline{35}$ | $2/27 = 0,0\overline{74}$ | $100/999 = 0,1\overline{00}$

- **b)** Buradaki püf nokta, paydadaki 3'ün **sadeleşerek kaybolmasıdır**.

Cevap: $9/12 \rightarrow$ payda 12, 3'e bölünür ✓. Ama $9/12$ sadeleşerek $3/4$ olur; payda $4 = 2 \cdot 2 \rightarrow$ gösterim **sonludur: $0,75$ ✓**

Başka cevaplar: $3/6 = 1/2 = 0,5$ | $6/15 = 2/5 = 0,4$ | $15/24 = 5/8 = 0,625$

Kural: 3, kesir sadeleştikten sonra paydada **kalmamalıdır**.

- **c)** Pay + payda = 20 olan kesirleri deneyelim ve en sade hâllerine bakalım:

- $4/16 = 1/4 \rightarrow 0,25$ ✓ **sonlu**

- $12/8 = 3/2 \rightarrow 1,5$ ✓ sonlu

- $15/5 = 3$ ✓ sonlu (tam sayı)

- $5/15 = 1/3 \rightarrow 0,3$ × devirli

- $8/12 = 2/3 \rightarrow 0,6$ × devirli

- $2/18 = 1/9 \rightarrow 0,1$ × devirli

devamı →

15 (çözümün devamı)

Cevap: 4/16 (12/8, 15/5, 10/10, 16/4, 18/2 de olur). Ölçüt, sade hâlde paydanın yalnızca 2 ve 5 içermesidir.

- **d)** Önce kesri bulalım. $0,8\overline{3}$ gösteriminde virgülden sonrası 83, devretmeyen kısım 8, devreden 3:

Pay: $83 - 8 = 75$ | Payda: bir 9, bir 0 $\rightarrow 90$

$0,8\overline{3} = 75/90 \rightarrow$ ikisi de 15'e bölünür $\rightarrow 5/6$

2 katı: $2 \cdot 5/6 = 10/6 = 5/3$

Ondalık gösterimi: $5 : 3 = 1,666... \rightarrow 1,6$

Kontrol: $2 \cdot 0,8333... = 1,6666... \checkmark$ Payda 3 sadeleşmeden kaldığı için sonuç yine **devirlidir**.

- **e)** Devreden blok **9** olduğunda gösterim bir tam sayıya eşit olur; çünkü $9/9 = 1$ 'dir.

Cevap: $1,9 = 1$ tam $9/9 = 1 + 1 = 2$ $\checkmark$

Başka cevaplar: $2,9 = 3$ | $4,9 = 5$ | $7,9 = 8$

Ayrıca $0,4\overline{9} = 45/90 = 0,5$ gibi gösterimler tam sayı olmasa da "beklenmedik" bir sonuç verir: sondaki sonsuz 9'lar, bir önceki basamağı **1 artırıp** kaybolur.

✓ Doğru Sonuç: a) $1/27 = 0,0\overline{37}$ b) $9/12 = 3/4 = 0,75$ c) $4/16 = 1/4 = 0,25$ d) $5/6$, 2 katı $5/3 = 1,6$ e) $1,9 = 2$