ÇÖZÜMLER

Tam Sayılarda ve Rasyonel Sayılarda Karşılaştırma ve Sıralama

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge **CC BY-NC 4.0** lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabilir.

1. Bölüm Soru 1–5

1 Bir bilim müzesinde ziyaretçilere dağıtılan kartların üzerinde şu sayılar yazılıdır:

−7/2 · 0,8 · −0,25 · 9/4 · 1/2 · −5 · 3/8 · −1,5

Kartlar üç kutuya ayrılacaktır: **"0'dan küçük"**, **"0 ile 1 arasında"** ve **"1'den büyük"**.

a) Kartları üç kutuya ayırınız. Kararınızı verirken kullandığınız ondalık değerleri de yazınız.
b) Her kutudaki en büyük sayı hangisidir?
c) Sekiz sayının en küçüğü ve en büyüğü hangileridir?

- **a)** Önce hepsini ondalık gösterime çevirelim:

  −7/2 = **−3,5** · 0,8 · −0,25 · 9/4 = **2,25** · 1/2 = **0,5** · −5 · 3/8 = **0,375** · −1,5

  0'dan küçük: −7/2 (−3,5) · −0,25 · −5 · −1,5 → **4 kart**

  0 ile 1 arasında: 0,8 · 1/2 (0,5) · 3/8 (0,375) → **3 kart**

  1'den büyük: 9/4 (2,25) → **1 kart**

- **b) 0'dan küçük kutusu:** Negatiflerde sıfıra **en yakın** olan en büyüktür.

  −0,25 · −1,5 · −3,5 · −5 → en büyüğü **−0,25**

  0 ile 1 arası kutusu: 0,375 < 0,5 < 0,8 → en büyüğü **0,8**

  1'den büyük kutusu: Tek kart var → **9/4**

- **c)** Her negatif, her pozitiften küçüktür. O hâlde en küçük sayı negatifler arasından, en büyük sayı pozitifler arasından çıkar.

  En küçük: Sıfırdan en uzak negatif → **−5**

  En büyük: Pozitiflerin en büyüğü → **9/4 = 2,25**

  Tam sıralama: −5 < −7/2 < −1,5 < −0,25 < 3/8 < 1/2 < 0,8 < 9/4

✓ Doğru Sonuç: a) 0'dan küçük: −7/2, −0,25, −5, −1,5 — 0 ile 1 arası: 0,8, 1/2, 3/8 — 1'den büyük: 9/4 b) −0,25 · 0,8 · 9/4 c) En küçük −5, en büyük 9/4

2 Bir dalış ekibinin üyelerinin **deniz seviyesine göre** konumları şekildeki sayı doğrusunda işaretlenmiştir. Deniz seviyesi **0** kabul edilmiştir; **Derya** teknenin güvertesinde, diğerleri su altındadır. Birimler metredir.



a) Her ekip üyesinin konumunu bir tam sayı olarak yazınız.
b) Konumları küçükten büyüğe sıralayınız.
c) "En derinde olan kişi" ile "konumu sayı olarak en küçük olan kişi" aynı kişi midir? Mutlak değerlerle açıklayınız.
d) Bora ile Cem arasındaki dikey mesafe kaç metredir?

- **a)** İşaretlerin sayı doğrusundaki karşılıkları:

  Ada: −10 m (deniz seviyesinin 10 m altında)

  Bora: −6 m

  Cem: −3 m

  Derya: +2 m (deniz seviyesinin 2 m üstünde, güvertede)

- **b)** Sayı doğrusunda **soldan sağa** okuruz; soldan sağa gidildikçe sayılar büyür:

  −10 < −6 < −3 < +2

  Yani: **Ada < Bora < Cem < Derya**

- **c) Evet, aynı kişidir: Ada.**

  Mutlak değerler suyun yüzeyine olan **uzaklığı** verir:

  $|-10| = \mathbf{10}$ · $|-6| = \mathbf{6}$ · $|-3| = \mathbf{3}$ · $|+2| = \mathbf{2}$

  Ada'nın mutlak değeri **en büyük** (10), yani deniz seviyesinden en uzak olan odur. Negatif bölgede sıfırdan uzaklaşmak sayıyı **küçültür**; bu yüzden "en derin" ile "sayı olarak en küçük" burada aynı kişiye denk gelir.

  Dikkat: Bu, işaretlerin hepsi negatif olduğu için geçerlidir. Derya'nın $|+2| = 2$ değeri küçük ama konumu **en büyüktür** — mutlak değer sıralaması ile sayı sıralaması genel olarak aynı değildir.

- **d)** İki nokta arasındaki uzaklık, farkın mutlak değeridir:

  $|-6 - (-3)| = |-6 + 3| = |-3| =$ **3 metre**

  Kontrol: Sayı doğrusunda −6 ile −3 arasında 3 birim vardır ✓

✓ Doğru Sonuç: a) Ada −10, Bora −6, Cem −3, Derya +2 b) −10 < −6 < −3 < +2 c) Evet, Ada ($|-10| = 10$ en büyük) d) 3 metre

3 Bir kek tarifinde malzemeler su bardağı cinsinden şöyle verilmiştir:

Un: 5/6 · Şeker: 3/8 · Süt: 5/12 · Yağ: 1/4

a) Malzemeleri miktarına göre azdan çoğa sıralayınız.
b) Miktarları birbirine en yakın olan iki malzeme hangileridir? Aradaki fark kaç su bardağıdır?
c) Un miktarı, yağ miktarının kaç katıdır?

- **a)** Paydalar 6, 8, 12 ve 4'tür. Ortak katlarının en küçüğü:

  $6 = 2 \cdot 3$ · $8 = 2^3$ · $12 = 2^2 \cdot 3$ · $4 = 2^2$

  EKOK = $2^3 \cdot 3$ = **24**

  Her kesri 24 paydalı yazalım:

  Un: 5/6 → 4 ile genişletilir → **20/24**

  Şeker: 3/8 → 3 ile genişletilir → **9/24**

  Süt: 5/12 → 2 ile genişletilir → **10/24**

  Yağ: 1/4 → 6 ile genişletilir → **6/24**

  Paydalar eşit olduğuna göre payı küçük olan küçüktür:

  $6 < 9 < 10 < 20$

  Yağ (1/4) < Şeker (3/8) < Süt (5/12) < Un (5/6)

- **b)** 24 paydalı hâllerde paylar 6, 9, 10 ve 20'dir. Aralarındaki farklar:

  $9 - 6 = 3$ · **$10 - 9 = 1$** · $20 - 10 = 10$

  En küçük fark **1**'dir ve **şeker ile süt** arasındadır.

  Fark: 10/24 − 9/24 = **1/24 su bardağı**

- **c)** "Kaç katı" sorusu bölme ile çözülür:

  5/6 : 1/4

  24 paydalı hâllerini kullanalım — paydalar eşit olduğu için yalnızca payları bölmek yeterlidir:

  20/24 : 6/24 = 20 : 6 = **10/3**

  10/3 = 3 tam 1/3 ≈ **3,33 katı**

  Kontrol: 1/4 · 10/3 = 10/12 = 5/6 ✓

✓ Doğru Sonuç: a) Yağ < Şeker < Süt < Un b) Şeker ve süt, fark 1/24 su bardağı c) 10/3 = 3 tam 1/3 katı

4 Bir öğrenci şöyle bir kural ortaya atıyor:

"Paydası büyük olan kesir her zaman daha küçüktür. Örneğin 1/8 < 1/3'tür."

a) Öğrencinin verdiği örnek doğru mudur? Kontrol ediniz.
b) Öğrencinin kuralı genel olarak doğru mudur? Doğru değilse karşıt örnek veriniz.
c) Kuralı doğru olacak biçimde yeniden yazınız.
d) Aynı kural negatif sayılarda nasıl işler? Bir örnekle gösteriniz.

- **a)** Örnek **doğrudur**. 1/8 ve 1/3 kesirlerinin **payları eşittir** (ikisi de 1). Aynı bütün 8 parçaya bölündüğünde bir parça, 3 parçaya bölündüğünde bir parçadan küçük olur.

  Ondalıkla: 1/8 = 0,125 ve 1/3 = 0,333... → **1/8 < 1/3** ✓

- **b)** Kural genel olarak **YANLIŞTIR**. Öğrenci, örneğinde **payların eşit** olduğunu fark etmemiş ve kuralı bu koşul olmadan genellemiş.

  Karşıt örnek: 7/8 ile 1/3

  Paydalara bakarsak 8 > 3'tür; kurala göre 7/8 < 1/3 olmalıydı.

  Oysa: 7/8 = **0,875** ve 1/3 = **0,333...**

  0,875 > 0,333... → **7/8 > 1/3** × Kural çöktü.

  Başka karşıt örnekler: 9/10 > 1/2 · 5/6 > 1/4 · 11/12 > 2/5

- **c) Düzeltilmiş kural:**

  "**Payları eşit** olan iki **pozitif** rasyonel sayıdan paydası büyük olan daha küçüktür."

  İki koşul da gereklidir:

  - **Paylar eşit olmalı** — değilse paydaya bakmak yetmez.
  - **Pozitif olmalı** — negatiflerde ilişki tersine döner (d şıkkı).

- **d)** Negatiflerde önce işaretsiz karşılaştırılır, sonra yön ters çevrilir.

  Örnek: −1/8 ile −1/3

  İşaretsiz: 1/8 < 1/3

  Yön çevrilir: **−1/8 > −1/3**

  Kontrol: −0,125 > −0,333... ✓ (−0,125 sayı doğrusunda daha sağdadır)

  Yani **negatiflerde, payları eşitse paydası büyük olan daha BÜYÜKTÜR.** Pozitiflerdeki kuralın tam tersi.

✓ Doğru Sonuç: a) Örnek doğru b) Kural yanlış; karşıt örnek 7/8 > 1/3 c) "Payları eşit iki pozitif sayıdan paydası büyük olan küçüktür" d) Negatiflerde tersi: −1/8 > −1/3

5 **Soru:** −2/3, −5/6 ve −1/2 sayılarını küçükten büyüğe sıralayınız.

Bir öğrenci şöyle çözmüştür:
"Ortak payda 6'dır:
−2/3 = −4/6 · −5/6 = −5/6 · −1/2 = −3/6
Paylar 3, 4 ve 5'tir. 3 < 4 < 5 olduğundan sıralama
−1/2 < −2/3 < −5/6'dır."

a) Öğrencinin payda eşitlemesi doğru mu? Kontrol ediniz.
b) Hatası nedir? Açıklayınız.
c) Doğru sıralamayı yazınız ve ondalık gösterimle doğrulayınız.
d) Öğrencinin bulduğu sıralama hangi sayılar için doğru olurdu?

- **a)** Payda eşitlemesi **doğrudur**:

  −2/3 → pay ve payda 2 ile çarpılır → **−4/6** ✓

  −1/2 → pay ve payda 3 ile çarpılır → **−3/6** ✓

  −5/6 zaten 6 paydalı ✓

  Buraya kadar hata yok.

- **b)** Hata, **payları karşılaştırırken işaretleri düşürmesindedir**. Paylar 3, 4, 5 değil **−3, −4, −5**'tir.

  Negatif sayılarda büyüklük ilişkisi terstir:

  −5 < −4 < −3

  Öğrenci 3 < 4 < 5 diye sıralayıp bunu doğrudan kesirlere taşımış, yani **yönü ters çevirmeyi unutmuştur**. Doğru düşünce şöyle olmalıydı: işaretsiz hâlde 3/6 < 4/6 < 5/6, sonra yön çevrilir.

- **c)** Doğru sıralama:

  −5/6 < −4/6 < −3/6

  Yani **−5/6 < −2/3 < −1/2**

  Ondalıkla doğrulama:

  −5/6 = **−0,833...** · −2/3 = **−0,666...** · −1/2 = **−0,5**

  −0,833... < −0,666... < −0,5 ✓

  Sayı doğrusunda −5/6 en solda, −1/2 en sağdadır.

  Öğrencinin cevabı doğrunun **tam tersidir**; bu, yön çevirmeyi unutmanın tipik sonucudur.

- **d)** Öğrencinin sıralaması, aynı sayıların **pozitif** hâlleri için doğru olurdu:

  1/2 < 2/3 < 5/6

devamı →

5 *(çözümün devamı)*

Kontrol: 3/6 < 4/6 < 5/6 ✓ (0,5 < 0,666... < 0,833...)

Yani öğrenci aslında **pozitiflerin** sıralamasını bulmuş, eksi işaretlerini yazmayı unutmamış ama **etkisini hesaba katmamıştır**.

✓ Doğru Sonuç: a) Payda eşitlemesi doğru b) Payların negatif olduğunu göz ardı etmiş, yönü çevirmemiş c) −5/6 < −2/3 < −1/2 d) Pozitif hâlleri için: 1/2 < 2/3 < 5/6

2. Bölüm Soru 6–10

6 Bir kış gecesi dört ilde ölçülen en düşük sıcaklıklar şöyledir:

Ankara: −7/2 °C · Erzurum: −4,25 °C · Kars: −17/4 °C · Sivas: −3,5 °C

a) Bütün sıcaklıkları ondalık gösterimle yazınız.
b) İlleri en soğuktan en sıcağa sıralayınız.
c) Hangi illerde sıcaklık birbirine eşittir? Kaç çift bulunuyor?
d) En soğuk il ile en sıcak il arasındaki sıcaklık farkı kaç derecedir?

- **a)** Kesirleri ondalık gösterime çevirelim:

  Ankara: −7/2 = −7 : 2 = **−3,5 °C**

  Erzurum: −4,25 °C (zaten ondalık)

  Kars: −17/4 = −17 : 4 = **−4,25 °C**

  Sivas: −3,5 °C (zaten ondalık)

- **b)** Negatiflerde sıfırdan uzak olan küçüktür, yani daha soğuktur.

  İşaretsiz hâlleri: 4,25 > 3,5

  Yön çevrilir: **−4,25 < −3,5**

  En soğuktan en sıcağa:

  Erzurum = Kars (−4,25 °C) < Ankara = Sivas (−3,5 °C)

  Yani Erzurum ve Kars en soğuk, Ankara ve Sivas en sıcak illerdir.

- **c)** (a) şıkkındaki değerlerden görülüyor:

  • **Erzurum ve Kars** → ikisi de −4,25 °C ✓

  • **Ankara ve Sivas** → ikisi de −3,5 °C ✓

  2 çift bulunmaktadır.

devamı →

6 *(çözümün devamı)*

Bu sorunun asıl dersi şudur: aynı rasyonel sayı **farklı gösterimlerle** yazılabilir. −17/4 ile −4,25 görünüşte farklıdır ama **aynı sayıdır**; karşılaştırmadan önce hepsini tek bir gösterime çevirmek bu tuzağı ortadan kaldırır.

- **d)** En soğuk: −4,25 °C | En sıcak: −3,5 °C

  Fark = (−3,5) − (−4,25) = −3,5 + 4,25 = **0,75 °C**

  Kesirle de yapılabilir: −7/2 − (−17/4) = −14/4 + 17/4 = 3/4 = 0,75 ✓

  Dikkat: Fark hesaplanırken **büyükten küçük** çıkarılır; sonuç her zaman pozitiftir çünkü bir uzaklık ölçülmektedir.

✓ Doğru Sonuç: a) −3,5 · −4,25 · −4,25 · −3,5 b) Erzurum = Kars < Ankara = Sivas c) 2 çift (Erzurum–Kars ve Ankara–Sivas) d) 0,75 °C

7 Bir sınıfta yürütülen bütçe etkinliğinde beş öğrencinin haftalık harçlık bakiyesindeki **değişim** kaydedilmiştir. Pozitif değer artışı, negatif değer azalışı gösterir (birim: yüz TL).

Öğrenci	Ela	Mert	Sude	Kaan	Deniz
Değişim	+5/4	−1,5	−7/8	+0,25	−5/4

a) Değişimleri küçükten büyüğe sıralayıp öğrencileri bu sıraya göre yazınız.
b) Bakiyesi en çok değişen öğrenci hangisidir? Kararınızı mutlak değerlerle gerekçelendiriniz.
c) Ela ile Deniz'in değişimleri arasında nasıl bir ilişki vardır?
d) Sıralamada tam ortada yer alan öğrenci kimdir?

- **a)** Hepsini ondalık gösterime çevirelim:

  Ela: +5/4 = **+1,25** · Mert: **−1,5** · Sude: −7/8 = **−0,875** · Kaan: **+0,25** · Deniz: −5/4 = **−1,25**

  Önce işarete göre ayıralım:

  Negatifler: −1,5 · −0,875 · −1,25 → sıfırdan uzak olan küçük: −1,5 < −1,25 < −0,875

  Pozitifler: +0,25 < +1,25

  Birleştirelim:

  −1,5 < −1,25 < −0,875 < +0,25 < +1,25

devamı →

7 *(çözümün devamı)*

Mert < Deniz < Sude < Kaan < Ela

- **b)** "En çok değişen", değişimin **yönünden bağımsız** olarak büyüklüğünü sorar; bu da **mutlak değerdir**.

  $|+1{,}25| = 1{,}25$ · $\mathbf{|-1{,}5| = 1{,}5}$ · $|-0{,}875| = 0{,}875$ · $|+0{,}25| = 0{,}25$ · $|-1{,}25| = 1{,}25$

  En büyük mutlak değer **1,5** → **Mert**

  Dikkat: Mert aynı zamanda sıralamanın **en küçüğüdür**; çünkü değişimi hem büyük hem negatiftir. "En çok değişen" ile "en çok artan" aynı şey değildir — en çok artan Ela'dır.

- **c)** Ela: +5/4 · Deniz: −5/4

  Bu iki sayı **ters işaretlidir** ve **mutlak değerleri eşittir**:

  $|+5/4| = |-5/4| = \mathbf{5/4 = 1{,}25}$

  Sayı doğrusunda ikisi de sıfıra **aynı uzaklıktadır**, ama zıt yönlerdedir. Toplamları sıfırdır: 5/4 + (−5/4) = 0. Yani Ela'nın kazandığı kadar Deniz kaybetmiştir.

- **d)** (a) şıkkındaki sıralamada beş öğrenci vardır:

  1. Mert 2. Deniz **3. Sude** 4. Kaan 5. Ela

  Tam ortadaki (3. sıradaki) öğrenci **Sude**'dir.

✔ Doğru Sonuç: a) Mert < Deniz < Sude < Kaan < Ela b) Mert ($|-1{,}5| = 1{,}5$ en büyük) c) Ters işaretli, mutlak değerleri eşit; toplamları 0 d) Sude

8 **Soru:** −6, +5, −2 ve +3 sayılarını küçükten büyüğe sıralayınız.

Bir öğrenci şöyle çözmüştür:
"Sayıların mutlak değerleri 6, 5, 2 ve 3'tür.
2 < 3 < 5 < 6 olduğundan sıralama
−2 < +3 < +5 < −6'dır."

a) Öğrencinin hatası nedir?
b) Doğru sıralamayı yazınız.
c) Öğrencinin sonucunun imkânsız olduğunu, tek bir kuralla gösteriniz.
d) Soruda mutlak değerlerin sıralanması istenseydi cevap ne olurdu?

- **a)** Öğrenci, istenen şeyi **değiştirmiştir**. Soru **sayıların kendilerinin** sıralanmasını istiyor; öğrenci ise **mutlak değerlerini** sıralayıp bulduğu sırayı doğrudan sayılara uygulamış.

  Mutlak değer, sayının **sıfıra uzaklığıdır** ve **işareti siler**. Bu yüzden mutlak değer sıralaması, sayı sıralamasıyla aynı olmak zorunda değildir — hatta negatifler varken çoğu zaman **farklıdır**.

- **b)** Doğru sıralama için önce işarete bakılır: her negatif, her pozitiften küçüktür.

  Negatifler: −6 ve −2 → sıfırdan uzak olan küçük → −6 < −2

  Pozitifler: +3 < +5

  −6 < −2 < +3 < +5

  Sayı doğrusunda soldan sağa okununca da aynı sıra çıkar ✓

- **c)** Öğrenci **−6** sayısını en sona, yani **en büyük** konuma koymuştur. Oysa:

  Her negatif tam sayı, her pozitif tam sayıdan küçüktür.

  −6 negatif, +5 ise pozitiftir. Bu kurala göre −6 < +5 olmalıdır; öğrencinin sıralamasında ise −6 > +5 görünmektedir. Tek bu karşılaştırma bile sonucu **imkânsız** kılar.

  Bu, cevabı hesaplamadan denetlemenin hızlı bir yoludur: negatifler her zaman listenin **başında**, pozitifler **sonunda** olmalıdır.

- **d)** Mutlak değerler istenseydi öğrencinin bulduğu sıra **doğru** olurdu — yalnızca doğru biçimde yazılması gerekirdi:

  $|-2| = 2 \cdot |+3| = 3 \cdot |+5| = 5 \cdot |-6| = 6$

  $|-2| < |+3| < |+5| < |-6|$

  Karşılaştıralım: sayı sıralamasında −6 **en küçük**, mutlak değer sıralamasında **en büyüktür**. Sorunun hangisini istediğini okurken mutlaka işaretle.

✓ Doğru Sonuç: a) Sayıları değil mutlak değerleri sıralamış b) −6 < −2 < +3 < +5 c) Her negatif her pozitiften küçüktür; −6 > +5 olamaz d) |−2| < |+3| < |+5| < |−6|

9 Aşağıdaki sayı çiftleri veriliyor:

I. 2/7 ile 3/7 **II.** −1/5 ile −1/6 **III.** 1,7 ile 1,8

a) I. çift arasında bulunan bir rasyonel sayı yazınız.
b) II. çift arasında bulunan bir rasyonel sayı yazınız. (Dikkat: ilk denemede arada tam sayı paylı bir sayı çıkmayabilir.)
c) III. çift arasında bulunan iki farklı rasyonel sayı yazınız.
d) Bu üç madde birlikte hangi genel sonucu gösteriyor?

- **a)** 2/7 ile 3/7'nin paydaları zaten eşit ama paylar **ardışıktır** (2 ve 3); arada tam sayı yok. Paydayı genişletelim — 2 ile çarpalım:

  2/7 = **4/14** ve 3/7 = **6/14**

  Artık paylar 4 ile 6 arasında; arada **5** var:

  5/14

  Kontrol: 4/14 < 5/14 < 6/14 ✓

  Ortalama yöntemiyle de aynı sonuç çıkar: (2/7 + 3/7) : 2 = (5/7) : 2 = 5/14 ✓
- **b)** Önce paydaları eşitleyelim. 5 ile 6'nın ortak katlarının en küçüğü **30**'dur:

  −1/5 = **−6/30** ve −1/6 = **−5/30**

  Paylar −6 ile −5 arasında; arada **tam sayı yok**. Paydayı bir kat daha genişletelim — 2 ile çarpalım (payda 60):

  −1/5 = **−12/60** ve −1/6 = **−10/60**

  Artık arada **−11** var:

  −11/60

  Kontrol: −12/60 < −11/60 < −10/60 ✓ (ondalıkla −0,2 < −0,1833... < −0,1666...)
- **c)** Ondalık gösterimde ara sayı bulmak en kolayıdır; bir basamak daha ekleyeriz:

  1,7 = **1,70** ve 1,8 = **1,80**

  Arada 1,71 ; 1,72 ; ... ; 1,79 sayılarının hepsi bulunur. İkisini seçelim:

  1,71 = 171/100 ve **1,75 = 7/4**

  Kontrol: 1,70 < 1,71 < 1,75 < 1,80 ✓
- **d)** Üç madde de şunu gösteriyor:

  Farklı iki rasyonel sayı ne kadar yakın olursa olsun, aralarında her zaman başka rasyonel sayılar bulunur.

devamı →

9 *(çözümün devamı)*

Hatta arada **sonsuz** tane vardır; çünkü bulunan her yeni sayı komşularıyla yeni aralıklar oluşturur ve aynı işlem tekrarlanabilir.

Yöntem olarak: paydaları eşitle, arada tam sayı paylı bir sayı çıkmıyorsa **paydayı daha da genişlet**. Ya da doğrudan **ortalama al** — bu yöntem her zaman sonuç verir.

✔ Doğru Sonuç: a) 5/14 b) −11/60 c) Örneğin 1,71 ve 1,75 d) Farklı iki rasyonel sayı arasında sonsuz rasyonel sayı vardır

10 Aşağıda altı karşılaştırma çifti verilmiştir:

I. 11/17 ile 9/17 **II.** 5/9 ile 5/13 **III.** 3/7 ile 0,43
IV. 2/25 ile 14/15 **V.** −3/8 ile −5/8 **VI.** 7/12 ile 5/8

a) Her çifti, kullanılacak en uygun yönteme göre gruplayınız: "paydalar eşit", "paylar eşit", "ondalığa çevir", "0 · 1/2 · 1 referansı", "ortak payda bul".
b) Her çift için uygun sembolü (< ya da >) yazınız.
c) V. çiftte fazladan yapılması gereken adım nedir?

- **a)** Yöntem eşleştirmesi:

  Paydalar eşit: I (11/17, 9/17) · V (−3/8, −5/8)

  Paylar eşit: II (5/9, 5/13)

  Ondalığa çevir: III (3/7, 0,43) — biri zaten ondalık gösterimde

  0 · 1/2 · 1 referansı: IV (2/25, 14/15) — biri sıfıra, diğeri bire çok yakın

  Ortak payda bul: VI (7/12, 5/8)

- **b)** Uygulamalar:

  I. Paydalar eşit (17) → payı büyük olan büyük: 11 > 9 → **11/17 > 9/17**

  II. Paylar eşit (5) → paydası büyük olan küçük: 13 > 9 → **5/9 > 5/13**

  III. 3/7 = 3 : 7 = 0,4285... ve 0,43 = 0,4300

  Yüzde birlere bakalım: 2 < 3 → **3/7 < 0,43**

  IV. 2/25 → paydanın yarısı 12,5; pay 2, ondan çok küçük → **0'a yakın**

  14/15 → pay 14, payda 15'e çok yakın → **1'e yakın**

  Hiç hesap yapmadan: **2/25 < 14/15**

devamı →

10 *(çözümün devamı)*

V. Paydalar eşit (8), ama sayılar negatif. İşaretsiz: 3/8 < 5/8 → yön çevrilir → **−3/8 > −5/8**

VI. Ortak payda 24: 7/12 = 14/24 ve 5/8 = 15/24

14 < 15 → **7/12 < 5/8**

- **c)** V. çiftte sayılar **negatiftir**. Paydalar eşit olduğu için payları karşılaştırmak yetmez; **fazladan bir adım** gerekir:

  Yönü ters çevirmek.

  İşaretsiz hâlde 3/8 < 5/8'dir; negatif hâle geçince ilişki tersine döner ve −3/8 > −5/8 olur.

  Kontrol: −3/8 = −0,375 ve −5/8 = −0,625. Sayı doğrusunda −0,375 daha sağdadır, yani daha büyüktür ✓

✓ Doğru Sonuç: b) I: > · II: > · III: < · IV: < · V: > · VI: < c) Negatif oldukları için yönü ters çevirmek gerekir

3. Bölüm Soru 11–15

11 Bir sınıfta üç iddia ortaya atılmıştır:

I. Ela: "Farklı iki rasyonel sayı arasında her zaman **en az bir rasyonel sayı** vardır."
II. Mert: "Farklı iki rasyonel sayı arasında her zaman **en az bir tam sayı** vardır."
III. Sude: "İki rasyonel sayının **ortalaması** her zaman o iki sayının arasındadır."

a) Ela'nın iddiası doğru mudur? Gerekçelendiriniz.
b) Mert'in iddiası doğru mudur? Doğru değilse karşıt örnek veriniz.
c) Sude'nin iddiası doğru mudur? Bir örnekle gösteriniz ve hangi durumda işe yaramadığını belirtiniz.

- **a) Ela haklıdır.**

  Verilen iki rasyonel sayının paydaları eşitlenir. Paylar arasında tam sayı kalmıyorsa payda **daha da genişletilir**; her genişletmede paylar arasındaki boşluk büyür ve bir noktada mutlaka tam sayı belirir.

  Örnek: 1/4 ile 1/3 → ortak payda 12: 3/12 ve 4/12 → arada yok.

  24'e genişlet: 6/24 ve 8/24 → arada **7/24** ✓

  Dahası arada **sonsuz** sayıda rasyonel sayı vardır; her yeni sayı yeni aralıklar oluşturur ve işlem hiç bitmez.

devamı →

11 *(çözümün devamı)*

- **b) Mert haksızdır.**

  İki rasyonel sayı birbirine çok yakın olabilir; arada tam sayı bulunması hiç de zorunlu değildir.

  Karşıt örnek: 1/5 ile 2/5

  Ondalıkla: 0,2 ile 0,4. Bu aralıkta **hiçbir tam sayı yoktur** (0 küçük, 1 büyük kalır).

  Oysa arada rasyonel sayı vardır: 3/10 = 0,3 ✓

  Başka karşıt örnekler: 1,7 ile 1,8 · −1/3 ile −1/4 · 5/8 ile 3/4

  Genel kural: İki sayı arasındaki **uzaklık 1'den küçükse** arada tam sayı bulunmayabilir. Rasyonel sayı ise her durumda bulunur.

- **c) Sude haklıdır.**

  İki sayının ortalaması, sayı doğrusunda ikisinin **tam ortasındadır**; dolayısıyla ikisinden de farklıdır ve aralarındadır.

  Örnek: −1/3 ile −1/4

  Ortalama = (−1/3 + (−1/4)) : 2 = (−4/12 − 3/12) : 2 = (−7/12) : 2 = **−7/24**

  Kontrol: −1/3 = −8/24 ve −1/4 = −6/24 → −8/24 < −7/24 < −6/24 ✓

  İşe yaramadığı durum: İki sayı **birbirine eşitse**. O zaman ortalama da aynı sayıya eşit çıkar ve "aralarında" bir sayı elde edilmez — zaten eşit iki sayı arasında hiçbir sayı yoktur.

  Örnek: 1/2 ile 0,5'in ortalaması yine 0,5'tir.

✔ Doğru Sonuç: a) Ela doğru (payda genişletilerek her zaman bulunur) b) Mert yanlış; 1/5 ile 2/5 arasında tam sayı yok c) Sude doğru; yalnızca iki sayı eşitse işe yaramaz

12 a bir tam sayı olmak üzere

−19/4 < a ≤ 7/3

eşitsizliği veriliyor.

a) a'nın alabileceği bütün değerleri yazınız. Kaç tanedir?
b) Bu değerlerin toplamı kaçtır?
c) Bu değerlerden mutlak değeri 3'ten küçük olmayanlar hangileridir?
d) a'nın alabileceği en büyük ve en küçük değerin farkı kaçtır?

- **a)** Sınırları ondalık gösterime çevirelim:

  −19/4 = −19 : 4 = **−4,75**

  7/3 = 7 : 3 = **2,333...**

  Eşitsizlik: **−4,75 < a ≤ 2,333...**

  Sol uç "<" olduğu için −4,75 dâhil değildir; ama −4,75'ten büyük ilk tam sayı **−4**'tür ve o dâhildir.

  Sağ uç "≤" olduğu için 2,333... dâhildir; ondan küçük ya da eşit en büyük tam sayı **2**'dir.

  Değerler: **−4, −3, −2, −1, 0, 1, 2** → **7 tane**

  Uç kontrolü: −5 < −4,75 olduğu için dışarıda ✓ 3 > 2,333... olduğu için dışarıda ✓

- **b)** Toplam:

  (−4) + (−3) + (−2) + (−1) + 0 + 1 + 2

  Kısa yol: −2 ile +2, −1 ile +1 birbirini götürür; 0 toplamı değiştirmez. Geriye **−4 ve −3** kalır:

  −4 + (−3) = **−7**

- **c)** Mutlak değerleri hesaplayalım:

  |−4| = **4** · |−3| = **3** · |−2| = 2 · |−1| = 1 · |0| = 0 · |1| = 1 · |2| = 2

  "3'ten küçük olmayan" demek **3'e eşit ya da 3'ten büyük** demektir:

  4 ≥ 3 ✓ ve 3 ≥ 3 ✓

  Koşulu sağlayanlar: **−4 ve −3** → **2 tane**

  Dikkat: "küçük olmayan" ifadesi eşitliği de kapsar; |−3| = 3 bu yüzden listeye girer.

- **d)** En büyük değer: **2** | En küçük değer: **−4**

  Fark = 2 − (−4) = 2 + 4 = **6**

devamı →

12 *(çözümün devamı)*

Kontrol: Sayı doğrusunda −4 ile 2 arasında 6 birim vardır ✓ Ayrıca (a) şıkkındaki listede 7 sayı vardır; bu da aralarındaki 6 birimlik açıklıkla tutarlıdır (uçlar dâhil 6 + 1 = 7 sayı).

✓ Doğru Sonuç: a) −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2 → 7 tane b) −7 c) −4 ve −3 d) 6

13 Bir okul takımında dört koşucunun dereceleri, antrenörün belirlediği **hedef süreyle** karşılaştırılmıştır. Değerler hedeften **sapmayı** gösterir: negatif değer hedeften **hızlı**, pozitif değer hedeften **yavaş** koşulduğu anlamına gelir (birim: dakika).

Ela: −3/4 · Mert: +2/5 · Sude: −0,8 · Kaan: +1/4

a) Sapmaları küçükten büyüğe sıralayınız.
b) En hızlı koşan kimdir? Gerekçelendiriniz.
c) Derecesi hedef süreye en yakın olan kimdir? Kararınızı mutlak değerlerle açıklayınız.
d) Ela ile Mert'in dereceleri arasındaki fark kaç dakikadır?

- **a)** Hepsini ondalık gösterime çevirelim:

  Ela: −3/4 = **−0,75** · Mert: +2/5 = **+0,4** · Sude: **−0,8** · Kaan: +1/4 = **+0,25**

  Negatifler: −0,8 ve −0,75 → işaretsiz 0,8 > 0,75, yön çevrilir → −0,8 < −0,75

  Pozitifler: +0,25 < +0,4

  Birleştirelim:

  −0,8 < −0,75 < +0,25 < +0,4

  Sude < Ela < Kaan < Mert

- **b)** Negatif sapma, hedeften **hızlı** koşmak demektir. Sapma ne kadar **küçükse** (sıfırdan negatif yönde uzaksa) koşucu o kadar hızlıdır.

  Sıralamada en küçük değer **−0,8**'dir → **Sude** en hızlı koşmuştur.

  Sude hedefin **0,8 dakika** altında; Ela ise **0,75 dakika** altında kalmıştır. 0,8 > 0,75 olduğu için Sude daha çok kazanmıştır ✓

- **c)** "Hedefe en yakın" olmak, sapmanın **yönünden bağımsız** olarak sıfıra en yakın olması demektir → **mutlak değer**.

  |−0,75| = 0,75 · |+0,4| = 0,4 · |−0,8| = 0,8 · **|+0,25| = 0,25**

  En küçük mutlak değer **0,25** → **Kaan**

devamı →

13 *(çözümün devamı)*

Dikkat: Kaan sıralamada üçüncü sırada, yani ne en hızlı ne en yavaştır. "En hızlı" (en küçük sayı) ile "hedefe en yakın" (mutlak değeri en küçük) **farklı sorular**dır ve burada farklı kişilere çıkmıştır.

- **d)** Fark, büyükten küçük çıkarılarak bulunur:

  Mert (+0,4) − Ela (−0,75) = 0,4 + 0,75 = **1,15 dakika**

  Kesirle de yapılabilir:

  2/5 − (−3/4) = 2/5 + 3/4

  Ortak payda 20: 8/20 + 15/20 = **23/20**

  23/20 = 1,15 ✓ İki yol aynı sonucu verdi.

  Yorum: Ela, Mert'ten 1,15 dakika (yaklaşık 1 dakika 9 saniye) daha hızlı koşmuştur.

✓ Doğru Sonuç: a) Sude < Ela < Kaan < Mert b) Sude (−0,8 en küçük sapma) c) Kaan (|+0,25| = 0,25 en küçük) d) 23/20 = 1,15 dakika

14 a ve b birer rasyonel sayı olmak üzere üç iddia ortaya atılmıştır:

I. "Bir **negatif** rasyonel sayının mutlak değeri, her zaman kendisinden büyüktür."
II. "İki **negatif** rasyonel sayıdan mutlak değeri büyük olan, sayı olarak küçüktür."
III. "a < b ise |a| < |b|'dir."

a) I. iddia doğru mudur? Gerekçelendiriniz.
b) II. iddia doğru mudur? Bir örnekle gösteriniz.
c) III. iddia doğru mudur? Doğru değilse karşıt örnek veriniz ve iddiayı düzeltiniz.

- **a) I. iddia DOĞRUDUR.**

  Mutlak değer **hiçbir zaman negatif olamaz**; bir uzaklığı ölçer. Negatif bir sayının mutlak değeri ise o sayının **pozitif karşılığıdır**.

  Pozitif bir sayı her zaman negatif bir sayıdan büyük olduğuna göre:

  |a| > a (a negatifken her zaman)

  Örnekler: |−3| = 3 > −3 ✓ · |−1/2| = 1/2 > −1/2 ✓ · |−0,1| = 0,1 > −0,1 ✓

  Not: Sıfır ve pozitif sayılarda |a| = a'dır; iddia yalnızca **negatifler** için "büyüktür" der ve bu hâliyle doğrudur.

- **b) II. iddia DOĞRUDUR.**

devamı →

14 *(çözümün devamı)*

Mutlak değer, sayının **sıfıra uzaklığıdır**. Negatif bölgede sıfırdan uzaklaşmak sayı doğrusunda **sola** gitmek, yani **küçülmek** demektir.

Örnek: −7/2 ile −5/4

|−7/2| = 3,5 ve |−5/4| = 1,25

3,5 > 1,25 olduğuna göre iddiaya göre −7/2 < −5/4 olmalı.

Kontrol: −3,5 < −1,25 ✓ Doğru.

Başka örnek: |−9| = 9 > |−2| = 2 ve gerçekten −9 < −2 ✓

Bu, negatifler arasında sıralama yapmanın pratik bir yoludur: mutlak değerleri karşılaştır, sonra yönü ters çevir.

- **c) III. iddia YANLIŞTIR.**

  İddia, işaretleri hesaba katmadan kurulmuştur. Mutlak değer işareti sildiği için sıralama korunmak zorunda değildir.

  Karşıt örnek: a = −5 ve b = 2

  a < b ✓ (−5 < 2)

  Ama |a| = 5 ve |b| = 2 → **|a| > |b|** × İddia bozuldu.

  Başka karşıt örnekler: (−3, 1) · (−7/2, 1/2) · (−4, −1) → |−4| = 4 > |−1| = 1 iken −4 < −1

  Düzeltilmiş iddia:

  "**0 ≤ a < b** ise |a| < |b|'dir."

  Yani iddia yalnızca **iki sayı da negatif değilse** geçerlidir. İki sayı da negatifse ilişki **tersine döner**: a < b < 0 ise |a| > |b| olur.

✓ Doğru Sonuç: a) I doğru (|a| pozitif, a negatif) b) II doğru (−3,5 < −1,25 iken 3,5 > 1,25) c) III yanlış; a = −5, b = 2. Doğrusu: "0 ≤ a < b ise |a| < |b|"

15 Bir "sayı atölyesi" etkinliğinde öğrencilerden, verilen koşulları sağlayan rasyonel sayılar **üretmeleri** ve seçimlerini gerekçelendirmeleri isteniyor. Her maddede birden çok doğru cevap olabilir.

Aşağıdaki koşulların her biri için istenen sayıları yazınız ve seçiminizi gerekçelendiriniz.
a) −1/2 ile −1/3 arasında bulunan bir rasyonel sayı.
b) Mutlak değeri 2/3'ten küçük olan, biri pozitif biri negatif iki rasyonel sayı.
c) Küçükten büyüğe sıralandığında ortadaki sayı 0 olan üç rasyonel sayı.
d) Sayı sıralaması ile mutlak değer sıralaması tamamen ters olan üç sayı.
e) 0,3 ile 1/3 arasında bulunan bir rasyonel sayı.

- **a)** Ortak payda 6: −1/2 = **−3/6** ve −1/3 = **−2/6**

  Paylar −3 ile −2 arasında; arada tam sayı yok. Paydayı 12'ye genişletelim:

  −1/2 = **−6/12** ve −1/3 = **−4/12** → arada **−5/12** ✓

  Cevap: −5/12

  Kontrol: −0,5 < −0,4166... < −0,333... ✓

  Ortalama yöntemiyle de aynı: (−1/2 + (−1/3)) : 2 = (−5/6) : 2 = −5/12 ✓

- **b)** |x| < 2/3 koşulu, x'in **−2/3 ile 2/3 arasında** olması demektir (2/3 ≈ 0,667).

  Pozitif: 1/2 = 0,5 → |1/2| = 0,5 < 0,667 ✓

  Negatif: −0,6 → |−0,6| = 0,6 < 0,667 ✓

  Cevap: 1/2 ve −0,6 (1/4 ve −1/3 de olur)

  Dikkat: −0,8 **olmaz**; |−0,8| = 0,8 > 0,667'dir. Mutlak değer koşulu, sayının **işaretine değil sıfıra uzaklığına** sınır koyar.

- **c)** Ortadaki sayının 0 olması için, üç sayıdan biri **negatif**, biri **0**, biri **pozitif** olmalıdır.

  Cevap: −3/4, 0, 5/8

  Sıralama: −3/4 = −0,75 < 0 < 0,625 = 5/8 ✓ Ortadaki 0 ✓

  Başka cevaplar: (−2, 0, 1/2) · (−0,1, 0, 7) · (−5/3, 0, 1/100)

  Negatifin ve pozitifin büyüklüğü önemli değildir; işaretleri yeterlidir.

- **d)** "Tamamen ters" olması için sayılar sıralandıkça mutlak değerlerinin **küçülmesi** gerekir. Bu, üç sayının da **negatif** olmasıyla sağlanır; çünkü negatiflerde sıfırdan uzaklaşmak sayıyı küçültür.

  Cevap: −5, −2, −1

  Sayı sıralaması: **−5 < −2 < −1**

  Mutlak değerler: |−5| = 5, |−2| = 2, |−1| = 1 → **5 > 2 > 1** ✓ Tam ters.

devamı →

15 *(çözümün devamı)*

Başka cevaplar: (−3/2, −1, −1/4) · (−10, −4, −0,5)

Listeye bir pozitif sayı girerse ilişki bozulur; örneğin (−5, −2, 3) için mutlak değerler 5, 2, 3 olur ve ters sıra bozulur.

- **e)** Önce iki sayıyı da ondalık gösterime çevirelim:

  0,3 = **0,300** ve 1/3 = **0,333...**

  Aralık: 0,300 < x < 0,333...

  Bu aralıkta 0,31 ; 0,32 ; 0,33 sayılarının hepsi bulunur.

  Cevap: 0,32 = 32/100 = 8/25

  Kontrol: 0,3 < 0,32 < 0,3333... ✓

  Not: 0,3 ile 1/3 birbirine çok yakın iki sayıdır ama **eşit değildir**; aralarında yine sonsuz rasyonel sayı bulunur.

✔ Doğru Sonuç: a) −5/12 b) Örneğin 1/2 ve −0,6 c) Örneğin −3/4, 0, 5/8 d) Örneğin −5, −2, −1 (hepsi negatif) e) 0,32 = 8/25