KONU ANLATIMI · CEVAPLI

Tam Sayılarda ve Rasyonel Sayılarda Karşılaştırma ve Sıralama

Kazanımlar: MAT.7.1.4. Tam sayıları ve rasyonel sayıları karşılaştırabilme, sıralayabilme ve iki rasyonel sayı arasında farklı rasyonel sayılar belirleyebilme

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge **CC BY-NC 4.0** lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabilir.

Tam Sayılarda Karşılaştırma ve Sıralama

Tam sayıları karşılaştırmanın dört temel kuralı vardır:

1. **0**, bütün negatif tam sayılardan **büyük**, bütün pozitif tam sayılardan **küçüktür**.
2. Her pozitif tam sayı, her negatif tam sayıdan **büyüktür**.
3. **Pozitif** tam sayılar sıfırdan uzaklaştıkça **büyür**.
4. **Negatif** tam sayılar sıfırdan uzaklaştıkça **küçülür**.

ÖRNEK

1. kural: $-2 < 0$ · $0 < +3$ · $-2 < 0 < +3$

2. kural: $+9 > -7$ · $-4 < +5$ (sayıların büyüklüğüne bakmaya gerek yok, işaret yeter)

3. kural: $+3 < +5$ · $+2 > +1$

4. kural: $-9 < -2$ · $-5 > -8$ ($9 > 2$ olmasına rağmen -9 daha küçüktür)

Bütün bu kurallar tek bir cümlede toplanabilir:

Yatay sayı doğrusu üzerindeki herhangi bir tam sayı, solundaki tam sayılardan büyük; sağındaki tam sayılardan küçüktür.

Yani sayı doğrusunda **soldan sağa** gidildikçe sayılar **büyür**. Karşılaştırmada tereddüde düşersen iki sayıyı sayı doğrusuna yerleştir; hangisi sağdaysa o büyüktür.



-9 ile $+3$ arasındaki sayı doğrusunda -8, -5, 0 ve $+2$ sayıları işaretlenmiştir. Soldan sağa gidildikçe sayılar büyür; bu yüzden sıralama $-8 < -5 < 0 < +2$ biçimindedir.

ÖRNEK Yukarıdaki doğruda işaretli sayılar **−8, −5, 0 ve +2**'dir. Soldan sağa okuyunca sıralama doğrudan çıkar:
−8 < −5 < 0 < +2

Dikkat: 8 > 5 olmasına rağmen −8 < −5'tir. Negatiflerde **sayı büyüdükçe değer küçülür**.

NOT **Sık yapılan hata — mutlak değerle sayıyı karıştırmak.**
|−6|, |+5| ve |−2| sayılarını sıralayalım. Önce mutlak değerler hesaplanır:
|−6| = **6** |+5| = **5** |−2| = **2**
2 < 5 < 6 olduğundan **|−2| < |+5| < |−6|**'dır.

Ama **sayıların kendileri** sıralansaydı −6 < −2 < +5 olurdu. İki sıralama **birbirinin tersi bile olabilir**; soruda mutlak değer mi sayı mı istendiğine dikkat et.

Rasyonel Sayılarda Karşılaştırma — Payı ya da Paydayı Eşitleme

Paydaları eşit pozitif iki rasyonel sayıdan **payı büyük** olan daha büyüktür.

Payları eşit pozitif iki rasyonel sayıdan **paydası büyük** olan daha **küçüktür**. (Aynı bütün daha çok parçaya bölünürse bir parça küçülür.)

ÖRNEK **Paydalar eşit:** 7/6 > 5/6 · 8/11 > 6/11
Paylar eşit: 1/2 > 1/3 · 3/7 > 3/10

İkinci satırdaki ters ilişkiyi somutlaştıralım: bir pastayı 2 kişiye bölersen herkese **yarım**, 3 kişiye bölersen **üçte bir** düşer. Payda büyüdükçe pay sabitken **dilim küçülür**.

Payları da paydaları da eşit olmayan sayılarda, önce **sadeleştirme** ya da **genişletme** ile biri eşitlenir. Hangisini eşitleyeceğin sana kalmıştır; genellikle **daha kolay olanı** seçilir.

ÖRNEK **3/4 ile 6/5:** Payları eşitleyelim. 3/4'ü 2 ile genişletelim → 6/8.
Artık paylar eşit (6); paydası büyük olan küçüktür: 8 > 5 → 6/8 < 6/5
Yani **3/4 < 6/5**

7/15 ile 2/5: Paydaları eşitleyelim. 2/5'i 3 ile genişletelim → 6/15.
Paydalar eşit (15); payı büyük olan büyüktür: 7 > 6 → 7/15 > 6/15
Yani **7/15 > 2/5**

−4/15 ile −2/11: Payları eşitleyelim. −2/11'i 2 ile genişletelim → −4/22.
Negatiflerde paydası büyük olan **daha büyüktür**: −4/22 > −4/15
Yani **−2/11 > −4/15**

NOT **Sık yapılan hata:** Genişletirken **yalnızca birini** çarpmak. 2/5'i 3 ile genişletirken **hem payı hem paydayı** çarpmalısın → 6/15. Yalnızca paydayı çarpıp 2/15 yazarsan bambaşka bir sayı elde edersin ve karşılaştırma yanlış çıkar.

Diğer İki Yol: Ondalık Gösterim ve Referans Noktaları

1. yol — Ondalık gösterime çevirme. İki sayı da ondalık gösterime çevrilir ve basamak basamak karşılaştırılır. Paydalar birbirinden çok uzaksa en pratik yoldur.

ÖRNEK **4/11 ile 3/8:**
4/11 = 0,$\overline{36}$ = 0,3636...
3/8 = 0,375

Onda birler eşit (3), **yüzde birlere** bakalım: 7 > 6
0,375 > 0,3636... → **3/8 > 4/11**

Bu iki sayıyı ortak paydaya (88) getirmek çok daha uzun sürerdi.

2. yol — 0, 1/2 ve 1'e yakınlık. Her sayının bu üç **referans noktasından** hangisine yakın olduğu belirlenir. Sayılar farklı bölgelere düşüyorsa sıralama **hiç hesap yapmadan** çıkar.

Ölçüt basittir: pay, paydanın **yarısından çok küçükse** sayı 0'a; **yarısına yakınsa** 1/2'ye; **paydaya yakınsa** 1'e yakındır.

ÖRNEK **5/9, 3/20 ve 12/13** sayılarını sıralayalım.

- **3/20** → paydanın yarısı 10; pay 3, ondan çok küçük → **0'a yakın**
- **5/9** → paydanın yarısı 4,5; pay 5, ona çok yakın → **1/2'ye yakın**
- **12/13** → pay 12, payda 13'e çok yakın → **1'e yakın**

0 < 1/2 < 1 olduğuna göre sıralama:
12/13 > 5/9 > 3/20

Kontrol (ondalıkla): 12/13 ≈ 0,92 · 5/9 ≈ 0,56 · 3/20 = 0,15 ✓

Durum	En Uygun Yöntem	Örnek
Paydalar zaten eşit	Payları karşılaştır	7/6 > 5/6
Paylar zaten eşit	Paydası büyük olan küçüktür	3/7 > 3/10
Bir payda diğerinin katı	Küçük paydayı genişlet	7/15 ile 2/5 → 6/15
Bir pay diğerinin katı	Küçük payı genişlet	3/4 ile 6/5 → 6/8
Paydalar birbirinden çok uzak	Ondalık gösterime çevir	4/11 ile 3/8
Sayılar belirgin biçimde farklı bölgelerde	0 · 1/2 · 1 referansı	3/20, 5/9, 12/13

Negatif Rasyonel Sayılarda Sıralama

Negatif rasyonel sayılar karşılaştırılırken **iki adım** izlenir:

1. Önce **işaretler dikkate alınmadan** karşılaştırma yapılır.
2. Sonra karşılaştırma sembolünün **yönü ters çevrilir**.

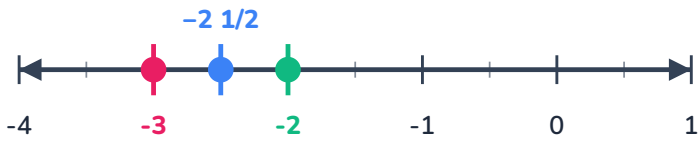
Nedeni basittir: sıfırdan uzaklaşan bir negatif sayı **küçülür**. İşaretsiz hâlde büyük olan, işaretli hâlde küçük olur.

ÖRNEK

−7/6 ile −1/6:
İşaretsiz: 7/6 > 1/6
Yön çevrilir: **−7/6 < −1/6**

−1/2 ile −1/4:
İşaretsiz: 1/2 > 1/4 (paylar eşit, paydası küçük olan büyük)
Yön çevrilir: **−1/2 < −1/4**

−6/20 ile −6/5:
İşaretsiz: 6/20 < 6/5
Yön çevrilir: **−6/20 > −6/5**



−4 ile +1 arasındaki sayı doğrusu, her birim 2 eş parçaya bölünmüştür. İşaretli sayılar soldan sağa −3, −2 tam 1/2 ve −2'dir. Soldan sağa gidildikçe değer büyüdüğü için sıralama −3 < −2 tam 1/2 < −2 biçimindedir.

Sayı doğrusu, negatiflerdeki bütün tereddütleri ortadan kaldırır:

Yatay sayı doğrusunda **soldan sağa** gidildikçe sayılar **büyür**, sağdan sola gidildikçe **küçülür**. **Dikey** sayı doğrusunda ise **aşağıdan yukarıya** gidildikçe büyür, yukarıdan aşağıya gidildikçe küçülür.

Yukarıdaki doğruda −3, −2,5 ve −2 sayıları bu sırayla soldan sağa dizilmiştir:
−3/1 < −2 tam 1/2 < −2/1

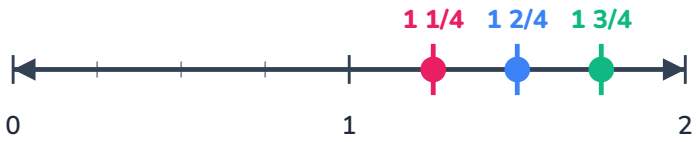
NOT

Sık yapılan hata: İşaretsiz karşılaştırmayı yapıp **yönü çevirmeyi unutmak**. "7/6 > 1/6, o hâlde −7/6 > −1/6" demek en sık görülen yanlıştır.
Kontrol yöntemi: iki sayıyı da sayı doğrusuna yerleştir. −7/6 ≈ −1,17 ve −1/6 ≈ −0,17; −1,17 daha **solda**dır, yani daha küçüktür ✓

İki Rasyonel Sayı Arasında Rasyonel Sayı Belirleme

Herhangi **farklı iki rasyonel sayı arasında her zaman en az bir rasyonel sayı bulunur.** Dahası, arada **istediğin kadar çok** rasyonel sayı bulabilirsin; çünkü bulduğun her yeni sayı, komşularıyla yeni aralıklar oluşturur.

Yöntem: iki sayının **paydaları eşitlenir**; paylar arasında tam sayı kalmıyorsa **daha da genişletilir**.



0 ile 2 arasındaki sayı doğrusu, her birim 4 eş parçaya bölünmüştür. 1 ile 2 tam sayıları arasına 1 tam 1/4, 1 tam 2/4 ve 1 tam 3/4 olmak üzere üç farklı rasyonel sayı yerleştirilmiştir.

ÖRNEK **1 ile 2 arasında üç rasyonel sayı:** Sayı doğrusunda 1 ile 2 arası **4 eş parçaya** bölünür. Bölme noktaları:
1¼ · 1½ · 1¾
Daha çok sayı istenirse aralık 10, 100 eş parçaya da bölünebilir.

ÖRNEK **−5/6 ile −1/2 arasında bir rasyonel sayı:**
Paydaları eşitleyelim; 6 ile 2'nin ortak katlarından en küçüğü **6**'dır:
−5/6 ve −1/2 = **−3/6**

Paylar −5 ile −3 arasındadır; arada **−4** vardır:
−4/6 = −2/3
Kontrol: −5/6 < −4/6 < −3/6 ✓

ÖRNEK **−1/3 ile −1/4 arasında bir rasyonel sayı:**
Ortak paydaların en küçüğü 12'dir:
−1/3 = **−4/12** ve −1/4 = **−3/12**

Paylar −4 ile −3 arasında; arada **tam sayı yok**. Bu durumda paydayı **bir kat daha** genişletiriz — örneğin 24:
−1/3 = **−8/24** ve −1/4 = **−6/24**

Artık arada **−7** var:
−7/24
Kontrol: −8/24 < −7/24 < −6/24 ✓

Bazen paydaları ortak katların **en küçüğüne** değil, **bir sonrakine** eşitlemek işi kolaylaştırır.

Kestirme yol — ortalama alma. İki sayının **toplamının yarısı** her zaman ikisinin tam ortasındadır ve dolayısıyla aralarındadır:

−1/3 ile −1/4 için: (−1/3 + (−1/4)) : 2 = (−4/12 − 3/12) : 2 = (−7/12) : 2 = **−7/24**

Aynı sonuç ✓ Bu yöntem her zaman işe yarar ve paydayı ne kadar genişleteceğini düşünmeni gerektirmez.

NOT **Sık yapılan hata:** "Paylar arasında tam sayı yoksa arada rasyonel sayı yoktur" sanmak. Bu **kesinlikle yanlıştır**. Farklı iki rasyonel sayı arasında **sonsuz** sayıda rasyonel sayı vardır; yalnızca paydayı yeterince genişletmen gerekir.
Tek istisna: iki sayı **eşitse** aralarında hiçbir sayı yoktur.

Etkinlikler

ETKİNLİK 1 **Aşağıdaki ifadelerden doğru olanların yanına "D", yanlış olanların yanına "Y" yazınız.**

a) D Her pozitif tam sayı, her negatif tam sayıdan büyüktür.

b) Y Negatif tam sayılar sıfırdan uzaklaştıkça büyür.

c) D −9 < −2'dir.

d) Y Payları eşit iki pozitif rasyonel sayıdan paydası büyük olan daha büyüktür.

e) D Paydaları eşit iki pozitif rasyonel sayıdan payı büyük olan daha büyüktür.

f) Y −1/2 > −1/4'tür.

g) D Yatay sayı doğrusunda soldan sağa gidildikçe sayılar büyür.

h) D Farklı iki rasyonel sayı arasında sonsuz sayıda rasyonel sayı vardır.

ı) Y Sayıların sıralaması ile mutlak değerlerinin sıralaması her zaman aynıdır.

i) D Negatif rasyonel sayılar karşılaştırılırken önce işaretsiz karşılaştırılır, sonra yön ters çevrilir.

j) Y Paydaları eşitlendiğinde paylar arasında tam sayı kalmıyorsa arada rasyonel sayı yoktur.

k) D İki rasyonel sayının ortalaması her zaman o iki sayının arasındadır.

ETKİNLİK 2 **Aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri doldurunuz. "Yöntem" sütununa kullandığınız karşılaştırma yolunu yazınız.**

1. Sayı	2. Sayı	Yöntem	Sembol (<, > ya da =)
7/9	5/9	Paydalar eşit → payı büyük olan büyük	>
4/7	4/11	Paylar eşit → paydası küçük olan büyük	>
3/5	7/10	Paydayı eşitle: 3/5 = 6/10	<
−2/3	−3/4	Paydayı eşitle: −8/12 ve −9/12, sonra yön çevir	>
0,45	9/20	Ondalığa çevir: 9/20 = 0,45	=
2/13	11/12	Referans: 2/13 sıfıra, 11/12 bire yakın	<
−5/8	−0,6	Ondalığa çevir: −5/8 = −0,625	<

ETKİNLİK 3 **Aşağıdaki noktalı yerlere "<", ">" ya da "=" sembollerinden uygun olanı yazınız.**

a) −15 ..... −8 **< (negatiflerde sıfırdan uzak olan küçüktür)**

b) |−15| ..... |−8| **> (15 > 8; mutlak değer işareti siler)**

c) −7/10 ..... −7/15 **< (paylar eşit; işaretsiz 7/10 > 7/15, yön çevrilir)**

d) 3/8 ..... 0,375 **= (3/8 = 375/1000 = 0,375)**

e) −1,2 ..... −6/5 **= (−6/5 = −1,2)**

f) 5/9 ..... $0,\overline{5}$ **= ($0,\overline{5}$ = 5/9)**

g) −0,3 ..... −1/3 **> (−1/3 = −0,333...; −0,3 sıfıra daha yakın)**

h) 11/13 ..... 4/9 **> (11/13 bire yakın, 4/9 yarıma yakın)**

ı) −9/4 ..... −2,3 **> (−9/4 = −2,25; −2,25 > −2,3)**

i) |−4/5| ..... 0,8 **= (|−4/5| = 4/5 = 0,8)**

ETKİNLİK 4 **Aşağıdaki sayıları küçükten büyüğe doğru sıralayınız. Hangi yöntemi kullandığınızı da yazınız.**

a) 1/3 , 1/5 , 1/4 **Paylar eşit → paydası büyük olan küçük: 1/5 < 1/4 < 1/3**

b) 7/8 , 3/8 , 15/8 **Paydalar eşit → payı küçük olan küçük: 3/8 < 7/8 < 15/8**

c) 5/6 , 3/8 , 5/12 **Ortak payda 24 → 20/24, 9/24, 10/24 → 3/8 < 5/12 < 5/6**

d) −4/9 , 2/3 , −1 tam 1/6 **Ortak payda 18 → −8/18, 12/18, −21/18 → −1 tam 1/6 < −4/9 < 2/3**

e) −8/15 , −2/5 , −7/10 **Ortak payda 30 → −16/30, −12/30, −21/30 → −7/10 < −8/15 < −2/5**

f) 0,4 , 2/5 , 0,45 , 9/25 **Hepsini ondalığa çevir: 0,4 ; 0,4 ; 0,45 ; 0,36 → 9/25 < 0,4 = 2/5 < 0,45**

devamı →

ETKİNLİK 4 **Aşağıdaki sayıları küçükten büyüğe doğru sıralayınız. Hangi yöntemi kullandığınızı da yazınız.** (devam)

g) −3 , −2,5 , −18/5 , −11/4 **Ondalığa çevir: −3 ; −2,5 ; −3,6 ; −2,75 → −18/5 < −3 < −11/4 < −2,5**

ETKİNLİK 5 **Aşağıdaki koşulları sağlayan sayıları bulunuz ve seçiminizi gerekçelendiriniz. Çoğu maddede birden çok doğru cevap vardır.**

a) 1/4 ile 1/3 arasında bulunan bir rasyonel sayı. **Ortak payda 12 → 3/12 ve 4/12, arada tam sayı yok. 24'e genişlet → 6/24 ve 8/24 → arada 7/24 ✓ (Ortalama da aynı sonucu verir: (1/4 + 1/3) : 2 = (7/12) : 2 = 7/24)**

b) −2/5 ile −1/5 arasında bulunan iki farklı rasyonel sayı. **Paydayı 10'a genişlet → −4/10 ve −2/10 → arada −3/10 ✓. 20'ye genişlet → −8/20 ve −4/20 → −7/20, −6/20, −5/20 da olur.**

c) x bir tam sayı olmak üzere −11/3 < x < 5/2 koşulunu sağlayan bütün x değerleri. **−11/3 = −3,666... ve 5/2 = 2,5 → x ∈ {−3, −2, −1, 0, 1, 2} → 6 tane. Toplamları −3'tür.**

d) Mutlak değeri 3/4'ten küçük olan iki farklı negatif rasyonel sayı. **|x| < 3/4 = 0,75 ve x negatif → −0,75 < x < 0. Örneğin −1/2 = −0,5 ✓ ve −0,7 ✓ (−1/4, −2/3 de olur; −0,8 olmaz çünkü |−0,8| = 0,8 > 0,75)**

e) Sayı sıralamasında en küçük olduğu hâlde mutlak değeri en büyük olan bir sayı içeren üçlü. **Örneğin −5, 1, 3 → sıralama −5 < 1 < 3 (en küçük −5); mutlak değerler 5, 1, 3 (en büyük 5 yine −5'e ait) ✓ Bu, listedeki tek negatif sayı sıfırdan en uzak olduğunda hep gerçekleşir.**

f) İki rasyonel sayı yazıp aralarındaki sayıyı ORTALAMA yöntemiyle bulunuz ve sonucun gerçekten arada olduğunu gösteriniz. **Örneğin 2/7 ile 3/7: ortalama = (2/7 + 3/7) : 2 = (5/7) : 2 = 5/14. Kontrol: 2/7 = 4/14 ve 3/7 = 6/14 → 4/14 < 5/14 < 6/14 ✓**

Konu Özeti

ÖZET **Tam sayılarda** her pozitif her negatiften büyüktür; pozitifler sıfırdan uzaklaştıkça **büyür**, negatifler sıfırdan uzaklaştıkça **küçülür**. Tek cümlelik kural: sayı doğrusunda **soldan sağa** gidildikçe sayılar büyür. **Rasyonel sayılarda** paydalar eşitse payı büyük olan, paylar eşitse paydası **küçük** olan büyüktür; eşit değilse genişletme/sadeleştirme ile biri eşitlenir. Paydalar birbirinden çok uzaksa **ondalık gösterime** çevirmek, sayılar belirgin biçimde farklı bölgelerdeyse **0 · 1/2 · 1 referansı** daha hızlıdır. **Negatiflerde** önce işaretsiz karşılaştır, sonra **yönü ters çevir**. Son olarak farklı iki rasyonel sayı arasında **sonsuz** rasyonel sayı vardır; paydayı genişleterek ya da **ortalama alarak** istediğin kadarını bulabilirsin. Sayı sıralaması ile **mutlak değer sıralaması** aynı şey değildir — soruda hangisinin istendiğini her zaman işaretle.