ÇÖZÜMLER

Tam Sayılarla Toplama ve Çıkarma İşlemleri

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge **CC BY-NC 4.0** lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabilir.

1. Bölüm Soru 1–5

1 Bir sınıf etkinliğinde işlem kartları üç kutuya ayrılacaktır: **"Sonucu pozitif"**, **"Sonucu negatif"** ve **"Sonucu sıfır"**.

I. (−12) + (+5) **II.** (−8) + (+8) **III.** (+14) + (−6) **IV.** (−7) − (+9)
V. (−11) − (−11) **VI.** (+3) − (−10) **VII.** (−20) + (+13) **VIII.** (+6) − (+6)

a) Her işlemin sonucunu bulup kartları üç kutuya ayırınız.
b) Sonucu sıfır çıkan kartların ortak özelliği nedir? Açıklayınız.
c) Sonuçları birbirine eşit olan iki kart var mıdır? Varsa bunu nasıl yorumlarsınız?

- **a)** Önce bütün sonuçları bulalım:

  I. (−12) + (+5) → farklı işaret, 12 − 5 = 7, |−12| büyük → **−7**

  II. (−8) + (+8) → ters eleman → **0**

  III. (+14) + (−6) → 14 − 6 = 8, |+14| büyük → **+8**

  IV. (−7) − (+9) = (−7) + (−9) → aynı işaret → **−16**

  V. (−11) − (−11) = (−11) + (+11) → **0**

  VI. (+3) − (−10) = (+3) + (+10) → **+13**

  VII. (−20) + (+13) → 20 − 13 = 7, |−20| büyük → **−7**

  VIII. (+6) − (+6) = (+6) + (−6) → **0**

  Sonucu pozitif: III (+8) · VI (+13)

  Sonucu negatif: I (−7) · IV (−16) · VII (−7)

  Sonucu sıfır: II · V · VIII

- **b)** Üç kartta da işlem, **birbirinin tersi olan iki sayı** üzerinde yapılmıştır:
  - **II.** (−8) + (+8) → doğrudan **ters eleman özelliği**
  - **V.** (−11) − (−11) → bir sayıdan **kendisi** çıkarılmış; çıkarmayı çevirince (−11) + (+11) olur
  - **VIII.** (+6) − (+6) → yine bir sayıdan **kendisi** çıkarılmış

  Ortak özellik: Toplamaya çevrildiğinde iki sayı birbirinin tersi olur. Genel kurallar:

  a + (−a) = 0 ve **a − a = 0**

- **c) Evet: I. ve VII. kartların sonucu da −7'dir.**

devamı →

1 *(çözümün devamı)*

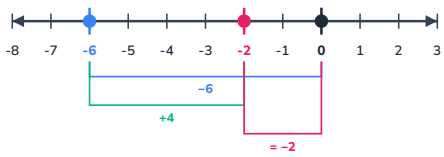
I. (−12) + (+5) = −7 · VII. (−20) + (+13) = −7

Yorum: Farklı sayılarla yapılan farklı işlemler **aynı sonuca** ulaşabilir. Her iki işlemde de mutlak değerlerin farkı 7'dir (12 − 5 = 7 ve 20 − 13 = 7) ve her ikisinde de mutlak değeri büyük olan sayı negatiftir.

Bu, bir sonuca ulaşmanın tek bir yolu olmadığını gösterir; sonsuz çoklukta işlem −7 verebilir (örneğin (−100) + (+93) de −7'dir).

✔ Doğru Sonuç: a) Pozitif: III, VI — Negatif: I, IV, VII — Sıfır: II, V, VIII b) Sayılar birbirinin tersi (a + (−a) = 0, a − a = 0) c) I ve VII → ikisi de −7

2 Bir dalgıç **deniz seviyesinden** (0 noktası) dalışa başlıyor. Şekildeki sayı doğrusu, dalgıcın hareketlerini metre cinsinden göstermektedir.



a) Şekilde modellenen işlemi yazıp sonucunu bulunuz.
b) Dalgıcın son konumu nedir? Sözel olarak açıklayınız.
c) Dalgıç toplam kaç metre yol kat etmiştir? Bu sayı neden (a) şıkkındaki sonuçtan farklıdır?
d) Aynı son konumu veren başka bir hareket çifti yazınız.

- **a)** Şekilde iki hareket var:
  - 0 noktasından **6 birim sola** → aşağı doğru hareket → **−6**
  - Oradan **4 birim sağa** → yukarı doğru hareket → **+4**

  İşlem: **(−6) + (+4)**

  İşaretler farklı → mutlak değerlerin farkı: 6 − 4 = 2

  |−6| > |+4| olduğundan işaret **"−"**

  Sonuç = **−2**
- **b)** Dalgıç önce deniz seviyesinin **6 metre altına** inmiş, sonra **4 metre yükselmiştir**.

  Son konumu: **deniz seviyesinin 2 metre altı** (−2 m)

  Sayı doğrusunda son işaret gerçekten −2'dedir ✓
- **c) Kat edilen yol**, hareketlerin **mutlak değerlerinin toplamıdır**; yön bilgisi kullanılmaz:

  |−6| + |+4| = 6 + 4 = **10 metre**

devamı →

2 *(çözümün devamı)*

Neden farklı: (a) şıkkında bulduğumuz −2, dalgıcın **konum değişimidir**; nereden başlayıp nerede bittiğini söyler. 10 metre ise gerçekten **ne kadar yüzdüğüdür**.

Dalgıç 6 metre inip 4 metre çıktığında, çıktığı 4 metre inişin bir kısmını **geri alır**; ama yorgunluk açısından o 4 metre de yüzülmüştür. Bu yüzden kat edilen yol her zaman konum değişiminden **büyük ya da eşittir**.

- **d)** Son konumun −2 olması için hareketlerin toplamı −2 olmalıdır. Örnekler:
  - **(−10) + (+8) = −2** → 10 m inip 8 m çıkmak
  - **(−5) + (+3) = −2** → 5 m inip 3 m çıkmak
  - **(+3) + (−5) = −2** → önce 3 m çıkıp sonra 5 m inmek

  Bu üç harekette de son konum aynıdır (−2 m) ama kat edilen yollar farklıdır: 18 m, 8 m ve 8 m.

✔ Doğru Sonuç: a) (−6) + (+4) = −2 b) Deniz seviyesinin 2 m altı c) 10 metre; kat edilen yol mutlak değerlerin toplamıdır d) Örneğin (−10) + (+8)

3 Bir banka hesabında başlangıç bakiyesi **−250 TL**'dir (yani 250 TL borç vardır). Ardından sırasıyla şu işlemler yapılır:

1. Hesaba **400 TL yatırılır.**
2. Hesaptan **180 TL çekilir.**
3. Hesaptan **95 TL daha çekilir.**

a) Her işlemden sonraki bakiyeyi sırayla hesaplayınız.
b) Son bakiye nedir? Hesap borçta mıdır?
c) Başlangıçtan sona kadar bakiye ne kadar değişmiştir?
d) Hesabın borçtan kurtulması için son durumda en az kaç TL yatırılmalıdır?

- **a)** Para yatırmak **toplama**, para çekmek **çıkarma** ile gösterilir.

  1. işlemden sonra:

  (−250) + (+400) → farklı işaret, 400 − 250 = 150, |+400| büyük → **+150 TL**

  2. işlemden sonra:

  (+150) − (+180) = (+150) + (−180) → 180 − 150 = 30, |−180| büyük → **−30 TL**

  3. işlemden sonra:

  (−30) − (+95) = (−30) + (−95) → aynı işaret → **−125 TL**

devamı →

3 *(çözümün devamı)*

- **b)** Son bakiye **−125 TL**'dir.

  Bakiye negatif olduğuna göre hesap **borçtadır**; 125 TL borç bulunmaktadır.

  Dikkat: Hesap 1. işlemden sonra artıya geçmiş (+150 TL), ama sonraki iki çekimle tekrar borca düşmüştür.

- **c)** Değişim = son değer − ilk değer

  = (−125) − (−250)

  = (−125) + (+250) (çıkarma toplamaya çevrildi)

  → farklı işaret, 250 − 125 = 125, |+250| büyük → **+125 TL**

  Bakiye **125 TL artmıştır**.

  İkinci yol (hareketleri toplayarak):

  (+400) + (−180) + (−95) = (+400) + (−275) = **+125** ✓ Aynı sonuç.

  Not: Bakiye hâlâ negatif olsa da **değişim pozitiftir**; borç azalmıştır.

- **d)** Hesabın borçtan kurtulması, bakiyenin **0 ya da daha büyük** olması demektir.

  (−125) + ? ≥ 0

  Toplamı sıfır yapan sayı, (−125)'in tersi olan **+125**'tir (ters eleman özelliği).

  En az **125 TL** yatırılmalıdır. 125 TL yatırılırsa bakiye tam 0 olur; daha fazlası artıya geçirir.

✓ Doğru Sonuç: a) +150, −30, −125 TL b) −125 TL, hesap borçta c) +125 TL artmış d) En az 125 TL

4 Bir sınıfta üç iddia ortaya atılmıştır:

I. Ela: "Bir sayıdan başka bir sayı çıkarıldığında sonuç **her zaman küçülür**."
II. Mert: "Her çıkarma işlemi **a − b = a + (−b)** biçiminde bir toplamaya çevrilebilir."
III. Sude: "İki **negatif** sayının farkı **her zaman negatiftir**."

a) Ela'nın iddiası doğru mudur? Doğru değilse karşıt örnek veriniz ve iddiayı düzeltiniz.
b) Mert'in iddiası doğru mudur? Bir örnekle gösteriniz.
c) Sude'nin iddiası doğru mudur? Doğru değilse karşıt örnek veriniz.

- **a) Ela haksızdır.**

  Bu kural doğal sayılarda işe yarar ama tam sayılarda **çıkanın işaretine** bağlıdır.

devamı →

4 *(çözümün devamı)*

Karşıt örnek: 5 − (−3)

= 5 + (+3) = **+8**

8 > 5 → sonuç **büyüdü** × İddia bozuldu.

Başka karşıt örnekler: (−4) − (−9) = +5 (−4'ten büyük) · 0 − (−7) = +7

Düzeltilmiş iddia:

"Bir sayıdan **pozitif** bir sayı çıkarıldığında sonuç küçülür; **negatif** bir sayı çıkarıldığında sonuç büyür. Sıfır çıkarıldığında değişmez."

Nedeni kuralda saklıdır: a − b = a + (−b). b negatifse eklenen sayı pozitif olur ve toplam büyür.

- **b) Mert haklıdır.**

  Bu, tam sayılarda çıkarmanın **tanımıdır**: çıkarma, çıkanın ters işaretlisini eklemektir.

  Örnek: (−11) − (−4)

  Çıkan (−4), tersi (+4) → (−11) + (+4) = **−7**

  Kontrol edelim: −7'ye çıkan sayıyı geri eklersek başlangıca dönmeliyiz:

  (−7) + (−4) = −11 ✓

  Bir örnek daha: (−8) − (+5) = (−8) + (−5) = −13 | Kontrol: (−13) + (+5) = −8 ✓

  Bu kural sayesinde **ayrı bir çıkarma kuralı ezberlemeye gerek yoktur**; her şey toplamaya indirgenir.

- **c) Sude haksızdır.**

  İki negatif sayının farkı, hangisinin mutlak değerinin büyük olduğuna göre pozitif de olabilir.

  Karşıt örnek: (−3) − (−8)

  = (−3) + (+8) → farklı işaret, 8 − 3 = 5, |+8| büyük → **+5**

  Sonuç **pozitif** çıktı ×

  Başka karşıt örnekler: (−2) − (−10) = +8 · (−15) − (−15) = 0 (ne pozitif ne negatif)

  Doğrusu: İki negatif sayının farkının işareti, **çıkanın mutlak değeri daha büyükse pozitif**, daha küçükse negatif, eşitse sıfırdır.

  Karşılaştırma: (−8) − (−3) = −5 (negatif) ama (−3) − (−8) = +5 (pozitif)

devamı →

4 *(çözümün devamı)*

✔ Doğru Sonuç: a) Yanlış; 5 – (−3) = 8. Negatif çıkarınca sonuç büyür b) Doğru; çıkarmanın tanımı c) Yanlış; (−3) – (−8) = +5

5 Bir öğrenci defterine şunu yazmıştır:

"(−14) + (+9) işleminde 14 ile 9 toplanır: 14 + 9 = 23.
Büyük sayı negatif olduğu için sonuç −23'tür."

a) Öğrencinin hatası nedir?
b) Doğru sonucu bulunuz.
c) Öğrencinin cevabının imkânsız olduğunu, hesap yapmadan gösteren bir ölçüt yazınız.
d) Öğrencinin yaptığı işlem hangi soruda doğru olurdu?

- **a)** Öğrenci, işaretlerin **farklı** olduğunu fark etmemiş ve **aynı işaretli** sayılar için geçerli olan kuralı uygulamıştır.

  Kurallar şöyledir:

  - İşaretler **aynı** ise → mutlak değerler **toplanır**
  - İşaretler **farklı** ise → mutlak değerlerin **farkı** alınır

  (−14) ve (+9) sayılarının işaretleri farklıdır; bu yüzden 14 + 9 değil **14 − 9** yapılmalıydı. İşaret kararı (mutlak değeri büyük olanın işareti) doğruydu, ama işlem yanlıştı.

- **b)** Doğru çözüm:

  İşaretler farklı → mutlak değerlerin farkı: $|-14| - |+9| = 14 - 9 = \mathbf{5}$

  $|-14| > |+9|$ olduğundan sonucun işareti **"−"**

  (−14) + (+9) = −5

  Kontrol (sayı doğrusu): −14'ten 9 birim sağa gidilirse −5'e ulaşılır ✓

- **c) Ölçüt:** Farklı işaretli iki sayının toplamının mutlak değeri, toplananların mutlak değerlerinin **en büyüğünü geçemez**.

  Burada mutlak değerler 14 ve 9'dur; en büyüğü **14**'tür. Öğrencinin bulduğu −23 sayısının mutlak değeri **23** ve 23 > 14'tür → **imkânsız** ×

  Sezgisel açıklama: farklı işaretli sayılar birbirini **kısmen götürür**; sonuç ikisinden de uzağa gidemez, aralarında bir yere düşer. Bu ölçüt, işaret hatalarını saniyeler içinde yakalar.

- **d)** Öğrencinin yaptığı işlem, **işaretler aynı** olsaydı doğru olurdu:

devamı →

5 *(çözümün devamı)*

(−14) + (−9) = −23 ✓

İşaretler aynı → 14 + 9 = 23, ortak işaret "−" → −23

Yani öğrenci aslında **bu sorunun** çözümünü yazmış; yalnızca ikinci sayının işaretini yanlış okumuştur.

Ayrıca (−14) − (+9) işlemi de = (−14) + (−9) = −23 verir. Öğrencinin gördüğü "+" işaretini "−" olarak okumuş olması muhtemeldir.

✓ Doğru Sonuç: a) Farklı işaretlide fark yerine toplam almış b) −5 c) Sonucun mutlak değeri 14'ü geçemez; 23 > 14 × d) (−14) + (−9) = −23

2. Bölüm Soru 6–10

6 Bir bilgi yarışmasında bir takımın altı turdaki puanları şöyledir:

+18 · −25 · +7 · +25 · −12 · −7

(Pozitif puan kazanç, negatif puan kayıp anlamına gelir.)

a) Takımın toplam puanını, toplama işleminin özelliklerinden yararlanarak hesaplayınız.
b) Hangi özellikleri hangi adımda kullandığınızı yazınız.
c) Takım yarışmayı kazançla mı kayıpla mı bitirmiştir?
d) Takımın toplam puanının 0 olması için son turda kaç puan alması gerekirdi?

- **a)** Önce birbirinin **tersi** olan puanları arayalım:
  - **−25** ile **+25** → birbirinin tersi
  - **+7** ile **−7** → birbirinin tersi
  - Geriye **+18** ve **−12** kalıyor

  Sayıları yeniden dizelim ve gruplayalım:

  = [(−25) + (+25)] + [(+7) + (−7)] + (+18) + (−12)

  = 0 + 0 + (+18) + (−12)

  = (+18) + (−12)

  → farklı işaret, 18 − 12 = 6, |+18| büyük → **+6**

  Toplam puan = +6
- **b)** Kullanılan özellikler:

  1. Değişme özelliği: Puanların sırasını değiştirip eşleri yan yana getirdik.

devamı →

6 *(çözümün devamı)*

2. Birleşme özelliği: Hangi ikilinin önce toplanacağını seçip köşeli parantezle grupladık.

3. Ters eleman özelliği: (−25) + (+25) = 0 ve (+7) + (−7) = 0.

4. Etkisiz eleman özelliği: Sıfırlar kalan toplamı değiştirmedi.

Kontrol (sırayla hesaplayarak): 18 − 25 = −7; −7 + 7 = 0; 0 + 25 = 25; 25 − 12 = 13; 13 − 7 = **+6** ✓

- **c)** Toplam puan **+6**, yani **pozitiftir**.

  Takım yarışmayı **kazançla** bitirmiştir; başladığı yerden 6 puan öndedir.

  Dikkat: Takım altı turun **üçünde** puan kaybetmiş (−25, −12, −7 → toplam −44) ama üçünde kazanmıştır (+18, +7, +25 → toplam +50). Kazanç kaybı 6 puan geçmiştir: (+50) + (−44) = +6 ✓

- **d)** Toplamın 0 olması için son turdaki −7 yerine başka bir x puanı alınmalıydı.

  İlk beş turun toplamı:

  (+18) + (−25) + (+7) + (+25) + (−12)

  = [(−25) + (+25)] + (+18) + (+7) + (−12)

  = 0 + (+25) + (−12) = **+13**

  Toplamın sıfır olması için: (+13) + x = 0 → x = **−13**

  Yani son turda **13 puan kaybetmesi** gerekirdi. Kontrol: (+13) + (−13) = 0 ✓ (ters eleman özelliği)

✓ Doğru Sonuç: a) +6 b) Değişme → birleşme → ters eleman → etkisiz eleman c) Kazançla (+6) d) −13 puan

7 Bir esnafın bir haftalık günlük **kâr-zarar** tablosu aşağıda verilmiştir. Pozitif değer kârı, negatif değer zararı gösterir (birim: TL).

Gün	Pazartesi	Salı	Çarşamba	Perşembe	Cuma
Kâr / Zarar	+120	−85	−40	+65	−30

a) Haftanın net sonucu kaç TL'dir? Kâr mı zarar mı edilmiştir?
b) En çok zarar edilen gün hangisidir?
c) Her günün sonundaki birikimli (o güne kadarki toplam) tutarı hesaplayınız. Esnaf hangi günün sonunda zarara düşmüştür?
d) Cuma günü −30 yerine +30 olsaydı haftanın net sonucu ne olurdu?

- **a)** Pozitifleri ve negatifleri ayrı toplayalım:

  Kârlar: (+120) + (+65) = **+185**

  Zararlar: (−85) + (−40) + (−30) = **−155**

  Net sonuç: (+185) + (−155)

  → farklı işaret, 185 − 155 = 30, |+185| büyük → **+30 TL**

  Esnaf haftayı **30 TL kârla** kapatmıştır.

- **b)** Zarar günleri: Salı (−85), Çarşamba (−40), Cuma (−30)

  "En çok zarar" demek, zararın **mutlak değerinin en büyük** olması demektir:

  |−85| = 85 · |−40| = 40 · |−30| = 30

  En büyüğü 85 → **Salı**

  Not: Salı aynı zamanda **sayı olarak en küçük** değerdir (−85). Hepsi negatif olduğu için bu iki ölçüt burada aynı güne çıkar.

- **c)** Birikimli tutarı gün gün hesaplayalım:

  Pazartesi sonu: +120 TL

  Salı sonu: (+120) + (−85) = **+35 TL**

  Çarşamba sonu: (+35) + (−40) = **−5 TL** ← **zarara düştü**

  Perşembe sonu: (−5) + (+65) = **+60 TL**

  Cuma sonu: (+60) + (−30) = **+30 TL** ✓ (a) şıkkıyla uyuşuyor

  Esnaf **Çarşamba günü sonunda** zarara düşmüş, ancak Perşembe günü tekrar kâra geçmiştir.

devamı →

7 *(çözümün devamı)*

Dikkat: Hafta kârla kapandığı hâlde hafta ortasında zarar görünmüş. Yalnızca haftalık toplama bakmak, bu ara durumu **gizler**.

- **d)** Cuma +30 olsaydı Perşembe sonundaki +60'a eklenir:

  (+60) + (+30) = **+90 TL**

  Başka bir yoldan: Cuma −30'dan +30'a geçince değişim (+30) − (−30) = **+60** olur.

  Eski net sonuç +30 idi → (+30) + (+60) = **+90 TL** ✓ Aynı sonuç.

✔ Doğru Sonuç: a) +30 TL kâr b) Salı (−85) c) 120, 35, −5, 60, 30 → Çarşamba sonunda zarara düştü d) +90 TL

8 **Soru:** 20 − [8 + (−13)] işleminin sonucunu bulunuz.

Bir öğrenci şöyle çözmüştür:
"20 − [8 + (−13)] = 20 − 8 + (−13)
= 12 + (−13)
= −1"

a) Öğrencinin hatası nedir?
b) Parantez içini önce hesaplayarak doğru sonucu bulunuz.
c) Öğrenci parantezi dağıtmak isteseydi doğru dağıtım nasıl olurdu?
d) Bu tür hatalardan korunmak için hangi kuralı uygulamalısınız?

- **a)** Öğrenci, köşeli parantezin önündeki **"−" işaretini yalnızca ilk terime** (8'e) uygulamış, ikinci terimi (−13) parantezden **olduğu gibi** çıkarmıştır.

  Oysa parantezin önündeki çıkarma işareti, parantez içindeki **bütün terimleri** etkiler. 8'in işareti değişip (−13)'ün değişmemesi tutarsızdır.

- **b)** En güvenli yol: **önce parantez içini bitir**.

  1. adım — parantez içi:

  8 + (−13) → farklı işaret, 13 − 8 = 5, |−13| büyük → **−5**

  2. adım — ana işlem:

  20 − (−5) = 20 + (+5) = **+25**

  Doğru sonuç: +25

  Öğrencinin bulduğu −1 ile arada 26 fark var.

- **c)** Dağıtım yapılacaksa parantezin önündeki "−", içindeki **her terimin işaretini değiştirir**:

devamı →

8 *(çözümün devamı)*

20 − [8 + (−13)]

= 20 + (−8) + (+13) ← 8 → −8 ve (−13) → +13

= (+12) + (+13)

= **+25** ✓

(b) şıkkıyla aynı sonuç. Öğrenci (−13)'ü +13 yapmayı unuttuğu için hata yapmıştı.

- **d) Kural: Önce içi bitir, sonra dışarı çık.**

  Parantez içinde birden fazla terim varsa:

  1. Önce parantez içindeki işlemi **tek bir sayıya** indir.

  2. Sonra dışarıdaki işlemi yap.

  Dağıtım yapmak zorunda kalırsan da şu kontrolü uygula: parantezin önünde "−" varsa **içerideki her terimin işareti değişmiş mi?** Tek bir terim bile unutulursa sonuç bozulur.

  Kontrol örneği: 14 − [−11 + 9] = 14 − (−2) = **16** ✓

  Dağıtımla: 14 + (+11) + (−9) = 25 − 9 = **16** ✓ İki yol da aynı.

✓ Doğru Sonuç: a) "−" işaretini yalnız ilk terime uygulamış b) 20 − (−5) = +25 c) 20 + (−8) + (+13) = +25 d) Önce parantez içini bitir

9 Aşağıdaki eşitliklerde sembollerin yerine gelmesi gereken tam sayıları bulunuz. Her bulduğunuzu yerine koyarak **kontrol ediniz.**

a) ▲ + (−17) = (+5)
b) (−9) − ● = (−4)
c) ■ − (+12) = (−12)
d) (−6) + ★ + (+6) = (−15)

- **a)** Bilinmeyen **toplanan**, sonuçtan bilinen toplanan çıkarılarak bulunur:

  ▲ = (+5) − (−17)

  = (+5) + (+17) (çıkarma toplamaya çevrildi)

  = **+22**

  Kontrol: (+22) + (−17) → 22 − 17 = 5, |+22| büyük → +5 ✓

- **b)** Burada bilinmeyen **çıkan** sayıdır. Önce çıkarmayı toplamaya çevirelim:

  (−9) − ● = (−4)

devamı →

9 *(çözümün devamı)*

Bir çıkarma işleminde **çıkan = bölünen – sonuç**'tur:

● = (−9) − (−4)

= (−9) + (+4) → 9 − 4 = 5, |−9| büyük → **−5**

Kontrol: (−9) − (−5) = (−9) + (+5) = −4 ✓

Dikkat: ● sayısı negatif çıktı. "Çıkan" olduğu için işaretini ters çevirmek gerekmez; bulduğun değeri olduğu gibi yerine koy.

- **c)** Bilinmeyen, çıkarma işleminin **ilk terimidir**:

  ■ = (−12) + (+12) (sonuca, çıkan sayı geri eklenir)

  = **0** (ters eleman özelliği)

  Kontrol: 0 − (+12) = 0 + (−12) = −12 ✓

  Yani sıfırdan 12 çıkarıldığında −12 elde edilir. Bu, "0 − a = −a" kuralının bir örneğidir.

- **d)** Önce birbirini götüren sayıları fark edelim: **(−6)** ile **(+6)** birbirinin tersidir.

  (−6) + ★ + (+6) = (−15)

  Değişme ve birleşme özellikleriyle:

  [(−6) + (+6)] + ★ = (−15)

  0 + ★ = (−15)

  Etkisiz eleman özelliğinden:

  ★ = **−15**

  Kontrol: (−6) + (−15) + (+6) = (−21) + (+6) = −15 ✓

  Bu şıkta uzun hesap yapmaya gerek kalmadı; özellikleri fark etmek işlemi tek adıma indirdi.

✓ Doğru Sonuç: a) ▲ = +22 b) ● = −5 c) ■ = 0 d) ★ = −15

10 Aşağıda sekiz eşitlik verilmiştir:

I. (−7) + 0 = (−7) **II.** (+4) + (−9) = (−9) + (+4)
III. (−5) + (+5) = 0 **IV.** [(+2) + (−6)] + (+3) = (+2) + [(−6) + (+3)]
V. 0 + (−13) = (−13) **VI.** (+8) + (−8) = 0
VII. (−1) + (+7) = (+7) + (−1) **VIII.** [(−4) + (+1)] + (−2) = (−4) + [(+1) + (−2)]

a) Eşitlikleri değişme, birleşme, etkisiz eleman ve ters eleman özelliklerine göre dört gruba ayırınız.
b) Etkisiz eleman ile ters eleman özellikleri arasındaki farkı, I. ve III. eşitlikleri karşılaştırarak açıklayınız.
c) IV. eşitliğin iki tarafını da hesaplayarak eşit olduklarını gösteriniz.

- **a)** Gruplandırma:

  Değişme özelliği (sayılar yer değiştirmiş): **II** ve **VII**

  Birleşme özelliği (parantezler kaymış, üç sayı var): **IV** ve **VIII**

  Etkisiz eleman özelliği (0 ile toplama): **I** ve **V**

  Ters eleman özelliği (sonuç 0): **III** ve **VI**

  Tanıma ölçütü:

  - Aynı sayılar farklı sırada mı? → **değişme**
  - Üç sayı var, parantez yeri mi değişmiş? → **birleşme**
  - Toplananlardan biri 0 mı? → **etkisiz eleman**
  - Sonuç 0 mı? → **ters eleman**

- **b) I.** (−7) + 0 = (−7) → burada **0 toplanandır** ve sayı **değişmemiştir**.

  III. (−5) + (+5) = 0 → burada **0 sonuçtur** ve iki sayı birbirini **yok etmiştir**.

  Fark: Sıfırın nerede durduğuna bak.

  - Sıfır **eşitliğin solunda, toplananlar arasında** ise → **etkisiz eleman**
  - Sıfır **eşitliğin sağında, sonuç olarak** ise → **ters eleman**

  Kısa hatırlatma: etkisiz elemanda "hiçbir şey olmaz", ters elemanda "her şey sıfırlanır".

- **c) IV.** [(+2) + (−6)] + (+3) = (+2) + [(−6) + (+3)]

  Sol taraf:

  (+2) + (−6) → farklı işaret, 6 − 2 = 4, |−6| büyük → −4

  (−4) + (+3) → 4 − 3 = 1, |−4| büyük → **−1**

  Sağ taraf:

devamı →

10 *(çözümün devamı)*

(−6) + (+3) → 6 − 3 = 3, |−6| büyük → −3

(+2) + (−3) → 3 − 2 = 1, |−3| büyük → **−1**

Sol taraf = Sağ taraf = −1 ✓

Hangi ikilinin önce toplandığı sonucu değiştirmedi — birleşme özelliğinin söylediği tam olarak budur.

✓ Doğru Sonuç: a) Değişme: II, VII — Birleşme: IV, VIII — Etkisiz: I, V — Ters: III, VI b) Sıfır toplanansa etkisiz, sonuçsa ters eleman c) İki taraf da −1

3. Bölüm Soru 11–15

11 Toplama işleminin özelliklerinin **çıkarma işleminde de** geçerli olup olmadığı tartışılmaktadır:

I. "Çıkarma işleminde de **değişme özelliği** vardır: a − b = b − a'dır."
II. "**0** sayısı çıkarma işleminin de etkisiz elemanıdır."
III. "a − b ile b − a **birbirinin tersidir**."

a) I. iddia doğru mudur? Karşıt örnek vererek gösteriniz.
b) II. iddia doğru mudur? İki farklı durumu inceleyerek karar veriniz.
c) III. iddia doğru mudur? Bir örnekle gösterip genel olarak gerekçelendiriniz.

- **a) I. iddia YANLIŞTIR.**

  Çıkarmada sayıların yeri değiştirilemez.

  Karşıt örnek: a = 5 ve b = 3

  5 − 3 = **+2**

  3 − 5 = 3 + (−5) = **−2**

  +2 ≠ −2 → iddia bozuldu ×

  Başka karşıt örnek: (−4) − (+6) = −10 ama (+6) − (−4) = +10

  Tek istisna: a = b olduğunda her iki taraf da 0 olur ve eşitlik sağlanır. Ama bir özelliğin geçerli olması için **bütün** sayılarda sağlanması gerekir; tek bir karşıt örnek onu çürütmeye yeter.

- **b) II. iddia EKSİKTİR, bu hâliyle yanlıştır.**

  İki durumu ayrı ayrı inceleyelim:

  Durum 1 — sıfır sağda (çıkan):

devamı →

11 *(çözümün devamı)*

a − 0 = a + 0 = **a** ✓

Örnek: (−7) − 0 = −7 ✓ Bu durumda 0 gerçekten etkisizdir.

Durum 2 — sıfır solda:

0 − a = 0 + (−a) = **−a** ×

Örnek: 0 − (+7) = **−7** → sayı değişti, işareti döndü!

Sonuç: 0, çıkarma işleminde yalnızca **sağda** etkisizdir. Toplamada ise iki tarafta da etkisizdir (a + 0 = 0 + a = a). Bu yüzden "0 çıkarmanın etkisiz elemanıdır" demek eksiktir.

Düzeltilmiş iddia: "Bir tam sayıdan 0 çıkarıldığında sayı değişmez; ancak 0'dan bir sayı çıkarıldığında o sayının tersi elde edilir."

- **c) III. iddia DOĞRUDUR.**

Örnek: a = 5, b = 3

a − b = 5 − 3 = **+2** · b − a = 3 − 5 = **−2**

(+2) + (−2) = 0 → birbirinin tersi ✓

İkinci örnek: a = −4, b = 6

a − b = (−4) − (+6) = **−10** · b − a = (+6) − (−4) = **+10**

(−10) + (+10) = 0 ✓

Genel gerekçe: Toplamları sıfır olan iki sayı birbirinin tersidir. Toplayalım:

(a − b) + (b − a)

= a + (−b) + b + (−a) (çıkarmalar toplamaya çevrildi)

= [a + (−a)] + [(−b) + b] (değişme ve birleşme özellikleri)

= 0 + 0 = **0** ✓

Toplamları her zaman sıfır çıktığına göre a − b ile b − a her zaman birbirinin tersidir.

Pratik yararı: Bir çıkarmayı ters sırada yaptığını fark edersen, sonucun yalnızca **işaretini** değiştirmen yeterlidir.

✓ Doğru Sonuç: a) Yanlış; 5 − 3 = 2 ama 3 − 5 = −2 b) Eksik; 0 yalnız sağda etkisiz (0 − a = −a) c) Doğru; (a−b) + (b−a) = 0

12 Aşağıdaki dört ifade birbirine çok benzemektedir ama **mutlak değer çizgilerinin yeri** farklıdır:

A = $|-15| - |+8|$ **B =** $|(-15) - (+8)|$ **C =** $|(-15) + (+8)|$ **D =** $(-15) - |+8|$

a) Dört ifadenin de değerini bulunuz.
b) Sonuçları küçükten büyüğe sıralayınız.
c) Hangi ifadelerin sonucu negatif olabilir, hangileri asla negatif olamaz? Gerekçelendiriniz.
d) $[(-15) - |-8|] + |(+3) - (+11)|$ **işleminin sonucunu bulunuz.**

- **a)** Mutlak değer bir parantez gibidir: **içi önce hesaplanır**.

  A = $|-15| - |+8|$

  Önce ayrı ayrı mutlak değerler: 15 ve 8

  $15 - 8 =$ **+7**

  B = $|(-15) - (+8)|$

  Önce içteki işlem: $(-15) + (-8) = -23$

  $|-23| =$ **23**

  C = $|(-15) + (+8)|$

  Önce içteki işlem: $15 - 8 = 7$, $|-15|$ büyük → -7

  $|-7| =$ **7**

  D = $(-15) - |+8|$

  Önce mutlak değer: $|+8| = 8$

  $(-15) - 8 = (-15) + (-8) =$ **−23**

- **b)** Sonuçlar: A = +7, B = 23, C = 7, D = −23

  Küçükten büyüğe:

  D (−23) < A (7) = C (7) < B (23)

  Dikkat çekici iki nokta:

  - **A ile C eşit** çıktı (ikisi de 7), oysa ifadeleri farklı.
  - **B ile D** aynı mutlak değere sahip (23) ama **zıt işaretli**.

- **c) Asla negatif olamayanlar: B ve C**

  Çünkü bu ifadelerde mutlak değer **en dışta**dır; işlem bittikten sonra uygulanır. Mutlak değer bir **uzaklık** ölçtüğü için hiçbir zaman negatif olamaz.

  Negatif olabilenler: A ve D

devamı →

12 *(çözümün devamı)*

Bu ifadelerde mutlak değerler **içeride** kalmış, en dıştaki işlem çıkarmadır. Çıkarmanın sonucu negatif olabilir.

- A = |−15| − |+8| burada +7 çıktı; ama |+8| − |−15| olsaydı 8 − 15 = −7 çıkardı.
- D = −23 zaten negatif çıktı.

Genel kural: Mutlak değer **en dışta** ise sonuç negatif olamaz; **içeride** ise olabilir.

- **d)** Adım adım gidelim:

1. Birinci köşeli parantez:

|−8| = 8 → (−15) − 8 = (−15) + (−8) = **−23**

2. İkinci mutlak değer:

(+3) − (+11) = (+3) + (−11) → 11 − 3 = 8, |−11| büyük → −8

|−8| = **8**

3. Ana işlem:

(−23) + (+8) → farklı işaret, 23 − 8 = 15, |−23| büyük → **−15**

Sonuç = −15

✔ Doğru Sonuç: a) A = 7, B = 23, C = 7, D = −23 b) D < A = C < B c) B ve C asla negatif olamaz (mutlak değer en dışta) d) −15

13 Bir maden asansörü **yer seviyesinden** (0 noktası) harekete başlar ve sırasıyla şu hareketleri yapar:

1. 45 metre iner · **2.** 18 metre çıkar · **3.** 32 metre iner · **4.** 25 metre çıkar

a) Her hareketten sonraki konumu yazınız.
b) Asansörün son konumu nedir?
c) Asansörün ulaştığı en derin nokta hangisidir?
d) Asansör toplam kaç metre yol kat etmiştir?
e) (b) ve (d) şıklarındaki sayılar neden farklıdır? Açıklayınız.

- **a)** İnmek **negatif**, çıkmak **pozitif** bir sayıyla gösterilir. Konum, önceki konuma hareketin eklenmesiyle bulunur.

1. hareketten sonra: 0 + (−45) = **−45 m**

2. hareketten sonra: (−45) + (+18) → 45 − 18 = 27, |−45| büyük → **−27 m**

devamı →

13 *(çözümün devamı)*

3. hareketten sonra: (−27) + (−32) → aynı işaret → **−59 m**

4. hareketten sonra: (−59) + (+25) → 59 − 25 = 34, |−59| büyük → **−34 m**

- **b)** Son konum **−34 m**'dir; asansör **yer seviyesinin 34 metre altındadır**.

  Kontrol (hareketleri toplayarak):

  (−45) + (+18) + (−32) + (+25)

  = [(−45) + (−32)] + [(+18) + (+25)] (değişme ve birleşme)

  = (−77) + (+43)

  → 77 − 43 = 34, |−77| büyük → **−34** ✓

- **c)** (a) şıkkındaki konumlara bakalım: −45, −27, **−59**, −34

  En derin nokta, **sayı olarak en küçük** olandır: **−59 m**

  Asansör **3. hareketin sonunda** yer seviyesinin 59 metre altına inmiştir.

  Dikkat: En derin nokta **son konum değildir**. Yalnızca son değere bakmak, yolculuk sırasında ulaşılan uç noktaları gizler.

- **d)** Kat edilen yol, hareketlerin **mutlak değerlerinin toplamıdır**:

  |−45| + |+18| + |−32| + |+25|

  = 45 + 18 + 32 + 25

  = **120 metre**

- **e)** İki sayı **farklı şeyleri** ölçer:

  • **−34 m (konum değişimi):** Nereden başlayıp nerede bitildiğini söyler. Yön bilgisini **kullanır**; zıt yönlü hareketler birbirini **götürür**.

  • **120 m (kat edilen yol):** Halatın toplam ne kadar sarıldığını söyler. Yön bilgisini **kullanmaz**; her hareket katkı yapar.

  Asansör toplam 43 metre yukarı çıkmış (18 + 25), bu da 43 metrelik inişi geri almıştır. Ama o 43 metre de **gerçekten kat edilmiştir**.

  Genel kural: Kat edilen yol, konum değişiminin mutlak değerinden **her zaman büyük ya da eşittir**. Eşitlik yalnızca hareketlerin hepsi **aynı yönde** olduğunda gerçekleşir.

✓ Doğru Sonuç: a) −45, −27, −59, −34 b) −34 m c) −59 m (3. hareket sonunda) d) 120 m e) Konum değişimi yönü hesaba katar, kat edilen yol katmaz

14 a ve b **sıfırdan farklı** tam sayılar olmak üzere üç iddia ortaya atılmıştır:

I. "a ile b **farklı işaretli** ise $|a + b| < |a| + |b|$'dir."
II. "a ile b **aynı işaretli** ise $|a + b| = |a| + |b|$'dir."
III. "$|a + b| = |a| + |b|$ ise a ile b **mutlaka aynı işaretlidir**." (Bu şıkta a ve b'nin sıfır olabileceğini de düşününüz.)

a) I. iddia doğru mudur? Bir örnekle gösterip gerekçelendiriniz.
b) II. iddia doğru mudur? Bir örnekle gösterip gerekçelendiriniz.
c) III. iddia doğru mudur? Doğru değilse karşıt örnek veriniz.

- **a) I. iddia DOĞRUDUR.**

  Örnek: $a = -15$, $b = +8$

  $a + b = -7 \rightarrow |a + b| = \mathbf{7}$

  $|a| + |b| = 15 + 8 = \mathbf{23}$

  $7 < 23$ ✓

  Gerekçe: Farklı işaretli sayılar toplanırken mutlak değerlerin **farkı** alınır:

  $|a + b| = |a| - |b|$ (mutlak değeri büyük olandan küçüğü çıkarılır)

  İki pozitif sayının **farkı**, **toplamından** her zaman küçüktür. Bu yüzden eşitsizlik her zaman sağlanır.

  Sezgisel açıklama: farklı işaretli sayılar birbirini **kısmen götürür**; toplam, ikisinin "tam gücüne" ulaşamaz.

- **b) II. iddia DOĞRUDUR.**

  Örnek: $a = -14$, $b = -9$

  $a + b = -23 \rightarrow |a + b| = \mathbf{23}$

  $|a| + |b| = 14 + 9 = \mathbf{23}$

  $23 = 23$ ✓

  İkinci örnek: $a = +6$, $b = +11 \rightarrow |17| = 17$ ve $6 + 11 = 17$ ✓

  Gerekçe: Aynı işaretli sayılar toplanırken mutlak değerler **toplanır** ve ortak işaret öne yazılır. Mutlak değer alınınca o işaret zaten silinir; geriye tam olarak mutlak değerlerin toplamı kalır.

  Sezgisel açıklama: aynı yöne giden iki hareket birbirini **destekler**; hiçbir şey birbirini götürmez.

- **c) III. iddia YANLIŞTIR.**

devamı →

14 *(çözümün devamı)*

İddia, sayılardan birinin **sıfır** olma ihtimalini atlamıştır. Sıfır ne pozitif ne negatiftir, yani bir **işareti yoktur**.

Karşıt örnek: a = 0, b = −3

|a + b| = |0 + (−3)| = |−3| = **3**

|a| + |b| = 0 + 3 = **3**

3 = 3 ✓ eşitlik sağlanıyor.

Ama a = 0'ın bir işareti yok; "a ile b aynı işaretli" demek mümkün değil ×

Başka karşıt örnekler: (0, +7) · (0, 0) · (+5, 0)

Düzeltilmiş iddia:

"|a + b| = |a| + |b| ise a ile b **aynı işaretlidir ya da en az biri sıfırdır**."

Not: Soru metnindeki "sıfırdan farklı" koşulu I. ve II. iddialar için konulmuştu; III. iddia bu koşul kaldırıldığında çöküyor. Bir genellemenin hangi koşullar altında kurulduğu, sonucun kendisi kadar önemlidir.

✓ Doğru Sonuç: a) I doğru (farkla toplam karşılaştırması) b) II doğru (mutlak değerler toplanır) c) III yanlış; a = 0, b = −3 karşıt örnektir

15 Bir "sayı atölyesi" etkinliğinde öğrencilerden, verilen koşulları sağlayan tam sayılar **üretmeleri** ve seçimlerini gerekçelendirmeleri isteniyor. Bazı maddelerde birden çok doğru cevap vardır.

a) Toplamı −12, farkı −2 olan iki tam sayı. (Fark, birinci sayıdan ikincisi çıkarılarak bulunur.)
b) Sonucu +9 olan ve içinde negatif bir sayı bulunan bir çıkarma işlemi.
c) Toplamları 0 olan, en az üçü negatif olan beş tam sayı.
d) a − b > a olacak biçimde a ve b tam sayıları. b hakkında ne söyleyebilirsiniz?
e) |a| + |b| = 10 ve a + b = −4 olan a ve b tam sayıları.

- **a)** Sayılara x ve y diyelim:

  x + y = −12 ve x − y = −2

  İki eşitliği **taraf tarafa toplayalım**; y terimleri birbirini götürür:

  (x + y) + (x − y) = (−12) + (−2)

  x + x = −14 → **x = −7**

  Birinci eşitlikten: (−7) + y = −12 → y = (−12) − (−7) = (−12) + (+7) = **−5**

devamı →

15 *(çözümün devamı)*

Cevap: −7 ve −5

Kontrol: (−7) + (−5) = −12 ✓ ve (−7) − (−5) = (−7) + (+5) = −2 ✓

- **b)** Çıkarmanın sonucu +9 olacak ve işlemde negatif bir sayı bulunacak.

  Cevap: (+4) − (−5) = (+4) + (+5) = +9 ✓

  Başka cevaplar:

  • (−3) − (−12) = (−3) + (+12) = +9 ✓ (her iki sayı da negatif)

  • (+1) − (−8) = +9 ✓ · (−6) − (−15) = +9 ✓

  Püf noktası: negatif bir sayı **çıkarıldığında** sonuç büyür; bu yüzden pozitif bir sonuca ulaşmak kolaydır.

- **c)** Beş sayının toplamı 0 olacak ve en az üçü negatif olacak.

  Cevap: −5, −3, −2, +4, +6

  Kontrol: Negatiflerin toplamı (−5) + (−3) + (−2) = **−10**

  Pozitiflerin toplamı (+4) + (+6) = **+10**

  (−10) + (+10) = **0** ✓ Üç sayı negatif ✓

  Başka cevaplar: (−1, −2, −3, 0, +6) · (−4, −4, −4, +5, +7)

  Yöntem: önce üç negatif sayı seç, toplamlarını bul, sonra kalan iki sayıyı bu toplamın **tersini** verecek biçimde seç.

- **d)** a − b > a eşitsizliğini inceleyelim.

  a − b = a + (−b) olduğuna göre, sonucun a'dan büyük olması için **eklenen sayının pozitif** olması gerekir:

  −b > 0 → **b < 0**

  b negatif bir sayı olmalıdır.

  Örnek: a = 3, b = −4

  a − b = 3 − (−4) = 3 + 4 = **7**

  7 > 3 ✓

  Başka örnekler: a = −10, b = −2 → (−10) − (−2) = −8 > −10 ✓ · a = 0, b = −5 → 0 − (−5) = 5 > 0 ✓

  a'nın işareti **hiç önemli değildir**; kararı tek başına b'nin işareti verir.

devamı →

15 *(çözümün devamı)*

- **e)** $|a| + |b| = 10$ ve $a + b = -4$ veriliyor.

  Mutlak değerlerin toplamı (10), sayıların toplamının mutlak değerinden (4) **büyük** olduğuna göre sayılar **farklı işaretlidir** (14. sorudaki I. iddia).

  Biri pozitif biri negatif olsun: $a > 0$ ve $b < 0$.

  $|a| = a$ ve $|b| = -b$ olur:

  $a + (-b) = 10 \rightarrow$ **$a - b = 10$**

  $a + b = -4$

  İki eşitliği taraf tarafa toplayalım:

  $2a = 6 \rightarrow$ **$a = 3$**

  $a + b = -4 \rightarrow 3 + b = -4 \rightarrow$ **$b = -7$**

  Cevap: $a = 3$ ve $b = -7$

  Kontrol: $|3| + |-7| = 3 + 7 = 10$ ✓ ve $3 + (-7) = -4$ ✓

  Not: $a = -7$ ve $b = 3$ de koşulları sağlar; sayıların rolleri değiştirilebilir.

✓ Doğru Sonuç: a) −7 ve −5 b) Örneğin (+4) − (−5) = +9 c) Örneğin −5, −3, −2, +4, +6 d) b negatif olmalı (örn. a = 3, b = −4) e) a = 3, b = −7