KONU ANLATIMI · CEVAPLI

Tam Sayılarla Toplama ve Çıkarma İşlemleri

Kazanımlar: MAT.7.1.5. Tam sayılarla toplama ve çıkarma işlemlerini yapabilme, toplama işleminin özelliklerini kullanabilme ve ilgili problemleri çözebilme

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge **CC BY-NC 4.0** lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabilir.

Toplama I — Aynı İşaretli Tam Sayılar

İşaretleri **aynı** olan tam sayılar toplanırken sayıların **mutlak değerleri toplanır**, **ortak işaret** toplamın önüne yazılır.

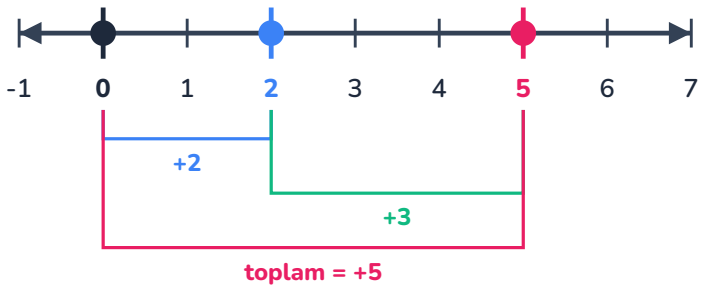
- Pozitif iki tam sayının toplamı **pozitiftir**.
- Negatif iki tam sayının toplamı **negatiftir**.

ÖRNEK

(+2) + (+3) = ?
İşaretler aynı (+). $|+2| = 2$ ve $|+3| = 3 \rightarrow 2 + 3 = 5$
Ortak işaret "+" öne yazılır → **+5**

(−1) + (−2) = ?
İşaretler aynı (−). $|-1| = 1$ ve $|-2| = 2 \rightarrow 1 + 2 = 3$
Ortak işaret "−" öne yazılır → **−3**

(−17) + (−16) = −33 · **(+25) + (+35) = +60**



(+2) + (+3) = +5 işleminin sayı doğrusu modeli. Başlangıç noktası 0'dır. Önce 2 birim sağa gidilir, oradan 3 birim daha sağa gidilir ve +5 noktasına ulaşılır. İki ok da aynı yöne (sağa) bakmaktadır.

Sayı doğrusu modeli. Başlangıç noktası her zaman **0**'dır. Sayı **pozitifse sağa**, **negatifse sola** gidilir. Aynı işaretli iki sayıda oklar **aynı yöne** baktığı için ikinci ok birincinin üstüne eklenir ve sonuç ikisinden de uzağa düşer.

Sayma pulu modeli. (+) pulları pozitifleri, (−) pulları negatifleri gösterir. Aynı işaretli toplamada pullar **aynı renkten** olduğu için yalnızca sayılır: 2 tane (+) pula 3 tane (+) pul eklenirse **5 tane (+)** pul elde edilir.

NOT **Unutma:** Pozitif tam sayıları hem **işaretli** hem **işaretsiz** yazabiliriz:
+1 = 1 · +6 = 6 · +12 = 12

Bu yüzden 8 + 5 ile (+8) + (+5) aynı işlemdir. Negatif sayılarda ise işaret **asla** atılamaz.

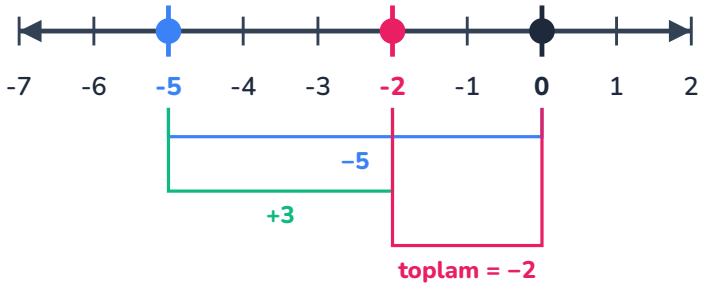
Toplama II — Farklı İşaretli Tam Sayılar

İşaretleri **farklı** olan tam sayılar toplanırken sayıların **mutlak değerlerinin farkı** alınır. **Mutlak değeri büyük olan** sayının işareti toplamın işaretini verir.

ÖRNEK **(+2) + (−1) = ?**
İşaretler farklı. |+2| = 2 ve |−1| = 1 → 2 − 1 = 1
|+2| > |−1| olduğundan sonucun işareti **"+"** → **+1**

(−5) + (+3) = ?
|−5| = 5 ve |+3| = 3 → 5 − 3 = 2
|−5| > |+3| olduğundan sonucun işareti **"−"** → **−2**

(−30) + (+19) = −11 · **(+18) + (−6) = +12** · **(−12) + (+5) = −7**



(−5) + (+3) = −2 işleminin sayı doğrusu modeli. 0'dan 5 birim sola gidilir, oradan 3 birim sağa dönülür ve −2 noktasında durulur. Oklar zıt yönlere baktığı için ikinci ok birincinin bir kısmını geri alır.

Sayma pulu modelinde sıfır çifti. Bir (+) pul ile bir (−) pul yan yana gelince birbirini **götürür**; bu ikiliye **sıfır çifti** denir.

(−5) + (+3) işleminde 5 tane (−) pula 3 tane (+) pul eklenir. **3 sıfır çifti** oluşur ve atılır; geriye **2 tane (−)** pul kalır → sonuç **−2** ✓

Bu model, "neden çıkarma yapıyoruz?" sorusunun cevabıdır: farklı işaretli pullar birbirini yok ettiği için geriye **fark kadar** pul kalır.

Mutlak değerleri eşit, ters işaretli iki tam sayının toplamı **sıfırdır**.

(+7) + (−7) = 0 · (−25) + (+25) = 0

Sayma pulu modelinde bütün pullar sıfır çifti oluşturup biter; sayı doğrusunda gidilen yol aynen geri alınır ve başlangıç noktasına dönülür.

NOT **Sık yapılan hata:** Farklı işaretli toplamada **toplama** yapmak. (−5) + (+3) işleminde 5 + 3 = 8 diyip −8 yazmak yanlıştır; işaretler farklı olduğu için **fark** alınır → −2.

Kontrol yöntemi: sonuç, iki sayının mutlak değerinden de **küçük ya da eşit** olmalıdır. −8 sayısının mutlak değeri 8, oysa toplananların en büyüğü 5'ti — bu bile hatayı ele verir.

Toplama İşleminin Özellikleri

Özellik	Ne Söyler?	Örnek
Değişme	İki sayı toplanırken yer değiştirmesi sonucu değiştirmez	(+3) + (−2) = (−2) + (+3) = +1
Birleşme	En az üç sayı toplanırken herhangi ikisinin önce toplanması sonucu değiştirmez	[3 + (−1)] + 2 = 3 + [(−1) + 2] = 4
Etkisiz eleman	Bir tam sayının **0** ile toplamı kendisine eşittir	(−3) + 0 = 0 + (−3) = −3
Ters eleman	Toplamları **0** olan iki tam sayı birbirinin tersidir	(+2) + (−2) = 0

0 (sıfır), toplama işleminin **etkisiz elemanıdır**.

Bir a tam sayısının **toplama işlemine göre tersi**, onunla toplandığında 0 veren sayıdır ve **−a**'dır:
3'ün tersi **−3** · (−4)'ün tersi **+4** · (−111)'in tersi **+111**

Bir sayının tersini bulmak, yalnızca **işaretini değiştirmektir**.

ÖRNEK **Özellikler işlemi kısaltır.** Şu toplamı hesaplayalım:
(−17) + (+25) + (+17) + (−5)

Sırayla toplamak yerine birbirini götürecek sayıları **yan yana getirelim** (değişme özelliği):
= [(−17) + (+17)] + [(+25) + (−5)] (birleşme özelliği)
= **0** + (+20) (ters eleman özelliği)
= **+20** (etkisiz eleman özelliği)

Dört özelliği de tek bir işlemde kullandık.

ÖRNEK **−2'den +2'ye kadar olan tam sayıların toplamı kaçtır?**

(−2) + (−1) + 0 + (+1) + (+2)
(−2) ile (+2) birbirinin tersi → toplamları 0
(−1) ile (+1) birbirinin tersi → toplamları 0
Geriye 0 kalır.
Toplam = 0

Genel kural: **−n'den +n'ye kadar** olan bütün tam sayıların toplamı **her zaman 0**'dır.

NOT **Sık yapılan hata:** "Etkisiz eleman" ile "ters eleman" özelliklerini karıştırmak.
- (−5) + **0** = −5 → **etkisiz eleman** (sayı değişmedi)
- (−5) + **(+5)** = 0 → **ters eleman** (sonuç sıfır oldu)

İlkinde 0 **toplanandır**, ikincisinde 0 **sonuçtur**.

Tam Sayılarla Çıkarma İşlemi

Tam sayılarla çıkarma işlemi, **çıkan sayının ters işaretlisi eklenerek** yapılır. Yani her çıkarma işlemi bir **toplama işlemine dönüştürülür**:

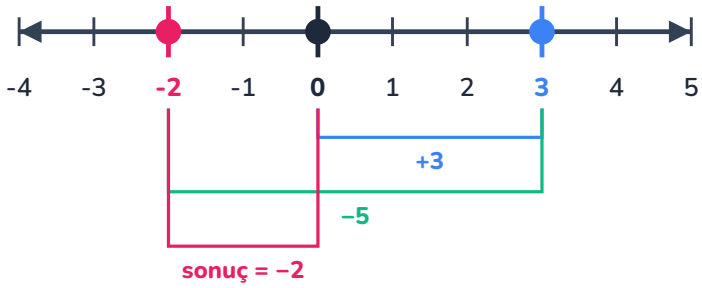
a − b = a + (−b)

Dönüştürdükten sonra Toplama I ve II kuralları aynen uygulanır.

ÖRNEK **(−11) − (−4)** → çıkan (−4), tersi (+4) olur:
= (−11) + (+4) → işaretler farklı, 11 − 4 = 7, işaret "−" → **−7**

(−8) − (+5) → çıkan (+5), tersi (−5) olur:
= (−8) + (−5) → işaretler aynı, 8 + 5 = 13, işaret "−" → **−13**

(+4) − (−2) = (+4) + (+2) = **+6**
20 − (−5) = 20 + 5 = **+25**
(−30) − (−11) = (−30) + (+11) = **−19**



3 − 5 = 3 + (−5) = −2 işleminin sayı doğrusu modeli. 0'dan 3 birim sağa gidilir, sonra çıkarma toplamaya çevrildiği için 5 birim sola dönülür ve −2 noktasına ulaşılır. Bir tam sayıdan kendisinden büyük bir sayı çıkarıldığında sonuç negatif olur.

NOT **"−" işaretinin iki ayrı anlamı vardır** ve karıştırılmamalıdır:

- **İşlem işareti:** iki sayı arasındaki çıkarmayı gösterir.
- **Sayının işareti:** sayının negatif olduğunu gösterir.

− 3 − 4 ifadesinde ortadaki "−" bir **işlemdir**; çıkan sayı pozitiftir ve **+4** olarak yazılır. Yani
−3 − 4 = **(−3) − (+4)** = (−3) + (−4) = **−7**

Emin olamadığın her yerde **her sayıyı parantezle ve işaretini yaz**; belirsizlik ortadan kalkar.

Sayma pulu modelinde çıkarma. Çıkarma, pul **almaktır**. Ama alacağın renkten yeterince pul yoksa istediğin kadar **sıfır çifti** ekleyebilirsin — sıfır çifti eklemek değeri değiştirmez.

(+4) − (−2): 4 tane (+) pulumuz var, 2 tane (−) pul almamız gerekiyor ama hiç (−) pul yok. 2 tane sıfır çifti ekleriz (2 tane (+) ve 2 tane (−)). Şimdi 2 tane (−) pulu alabiliriz; geriye **6 tane (+)** pul kalır → **+6** ✓

Kuralın "ters işaretlisini ekle" demesinin nedeni tam olarak budur.

Karışık İşlemler, Mutlak Değer ve Parantezler

Toplama ve çıkarmanın birlikte bulunduğu işlemlerde sıra şudur:

1. Varsa **mutlak değerler** hesaplanır (mutlak değer bir parantez gibidir).
2. **İçteki parantezler** dıştakilerden önce çözülür.
3. Bütün çıkarmalar **toplamaya çevrilir**.
4. Kalan toplama, özelliklerden yararlanılarak yapılır.

ÖRNEK

|−10| − 15 = ?
Önce mutlak değer: |−10| = **10**
10 − 15 = 10 + (−15) = **−5**

(−18) − |−2| = ?
|−2| = **2** → (−18) − 2 = (−18) + (−2) = **−20**

|−5| + |+7| = ?
5 + 7 = **12**

|−9| + (−16) = ?
9 + (−16) → işaretler farklı, 16 − 9 = 7, işaret "−" → **−7**

ÖRNEK

Parantezli işlemler — içten dışa doğru:

[+1 + 4] − [3 + (−2)]
= (+5) − (+1) = (+5) + (−1) = **+4**

14 − [−11 + 9]
= 14 − [(−11) + (+9)] = 14 − (−2) = 14 + 2 = **16**

(−18) − [−4 − 7]
= (−18) − [(−4) + (−7)] = (−18) − (−11) = (−18) + (+11) = **−7**

[(−6) − (−4)] − [(−8) + (−2)]
= [(−6) + (+4)] − (−10) = (−2) + (+10) = **+8**

NOT

Sık yapılan hata: Parantezin önündeki "−" işaretini yalnızca **ilk terime** uygulamak. 14 − [−11 + 9] işleminde önce **köşeli parantezin içi** hesaplanır: (−11) + 9 = −2. Ancak ondan sonra çıkarma yapılır: 14 − (−2) = 16.

Parantez içini hesaplamadan "14 + 11 + 9" ya da "14 + 11 − 9" gibi dağıtmaya kalkarsan işaret hataları kaçınılmazdır. Önce **içi bitir**, sonra dışarı çık.

Etkinlikler

ETKİNLİK 1 **Aşağıdaki ifadelerden doğru olanların yanına "D", yanlış olanların yanına "Y" yazınız.**

a) D Aynı işaretli iki tam sayı toplanırken mutlak değerleri toplanır, ortak işaret öne yazılır.

b) Y Farklı işaretli iki tam sayı toplanırken mutlak değerleri toplanır.

c) D Farklı işaretli toplamada sonucun işaretini, mutlak değeri büyük olan sayı belirler.

d) D Mutlak değerleri eşit, ters işaretli iki tam sayının toplamı sıfırdır.

e) D 0 sayısı toplama işleminin etkisiz elemanıdır.

f) Y Bir tam sayının toplama işlemine göre tersi, mutlak değeridir.

g) D a − b = a + (−b)'dir.

h) Y Negatif bir sayı çıkarmak sonucu her zaman küçültür.

ı) D −3 − 4 ifadesi (−3) − (+4) ifadesine eşittir.

i) Y |−13| − |−21| ile |(−13) − (−21)| aynı sonucu verir.

j) D −n'den +n'ye kadar olan bütün tam sayıların toplamı 0'dır.

k) D Toplama işleminde birleşme özelliği en az üç sayı bulunduğunda kullanılır.

ETKİNLİK 2 **Aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri doldurunuz.**

İşlem	İşaretler	Uygulanan Kural	Sonuç
(−7) + (−8)	Aynı	Mutlak değerler toplanır, ortak işaret öne	−15
(+12) + (−5)	Farklı	Mutlak değerlerin farkı, büyüğün işareti	+7
(−9) + (+14)	Farklı	14 − 9 = 5, işaret +	+5
(−6) + (+6)	Farklı (ters)	Ters eleman özelliği	0
(−20) − (−8)	Çıkarma	(−20) + (+8), işaretler farklı	−12
(+15) − (+23)	Çıkarma	(+15) + (−23), işaretler farklı	−8
(−11) − (+9)	Çıkarma	(−11) + (−9), işaretler aynı	−20

ETKİNLİK 3 **Aşağıdaki toplama işlemlerini yapınız.**

a) (−8) + (−13) **Aynı işaret → 8 + 13 = 21, işaret − → −21**

b) (+19) + (−7) **Farklı işaret → 19 − 7 = 12, |+19| büyük → +12**

c) (−24) + (+31) **Farklı işaret → 31 − 24 = 7, |+31| büyük → +7**

d) (−17) + (+17) **Ters eleman → 0**

e) (−9) + 0 **Etkisiz eleman → −9**

f) (+6) + (−15) + (+9) **(+6) + (+9) = +15; (+15) + (−15) = 0**

g) (−12) + (+30) + (−18) **(−12) + (−18) = −30; (−30) + (+30) = 0**

h) (−4) + (+11) + (−7) + (+4) + (−11) **[(−4)+(+4)] + [(+11)+(−11)] + (−7) = 0 + 0 + (−7) = −7**

ETKİNLİK 4 **Aşağıdaki çıkarma ve parantezli işlemleri yapınız. Her adımı yazınız.**

a) (−14) − (−9) **= (−14) + (+9) → 14 − 9 = 5, işaret − → −5**

b) (+7) − (+18) **= (+7) + (−18) → 18 − 7 = 11, işaret − → −11**

c) (−6) − (+13) **= (−6) + (−13) → aynı işaret → −19**

d) 25 − (−16) **= 25 + 16 = +41**

e) −9 − 7 + 4 **= (−9) + (−7) + (+4) = (−16) + (+4) = −12**

f) |−12| − 20 **= 12 − 20 = 12 + (−20) = −8**

g) (−15) − |−6| **= (−15) − 6 = (−15) + (−6) = −21**

h) 18 − [−5 + 12] **= 18 − (+7) = 18 + (−7) = +11**

ı) [(−9) − (−3)] + [(−2) + (+8)] **= (−6) + (+6) = 0**

i) |(−4) − (+6)| − |−3| **= |−10| − 3 = 10 − 3 = +7**

ETKİNLİK 5 **Aşağıdaki soruları çözünüz ve kullandığınız kuralı ya da özelliği yazınız.**

a) (−23)'ün toplama işlemine göre tersi kaçtır? **+23 (işaret değiştirilir). Kontrol: (−23) + (+23) = 0 ✓ — ters eleman özelliği**

b) (−8) + ★ = (+5) ise ★ kaçtır? **★ = (+5) − (−8) = (+5) + (+8) = +13. Kontrol: (−8) + (+13) = +5 ✓**

c) ◆ − (−7) = (−2) ise ◆ kaçtır? **◆ = (−2) + (−7) = −9. Kontrol: (−9) − (−7) = (−9) + (+7) = −2 ✓**

d) −4'ten +9'a kadar olan tam sayıların toplamı kaçtır? **−4'ten +4'e kadar olanlar birbirini götürür (toplam 0). Geriye +5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 35 kalır.**

e) Toplamları 0, farkları −14 olan iki tam sayı yazınız. **Toplamları 0 ise birbirinin tersidir: a ve −a. Fark: a − (−a) = 2a = −14 → a = −7. Sayılar −7 ve +7. Kontrol: (−7) + (+7) = 0 ✓ ve (−7) − (+7) = −14 ✓**

f) Bir asansör 4. kattayken 7 kat aşağı iniyor, sonra 3 kat çıkıyor. Hangi kattadır? **(+4) − (+7) + (+3) = (+4) + (−7) + (+3) = (−3) + (+3) = 0 → zemin kat**

g) a = |−9| − 12 ve b = (−5) − (−13) ise a + b kaçtır? **a = 9 − 12 = −3; b = (−5) + (+13) = +8 → a + b = (−3) + (+8) = +5**

Konu Özeti

ÖZET

Aynı işaretli tam sayılar toplanırken mutlak değerler **toplanır** ve ortak işaret öne yazılır; **farklı işaretli** olanlarda mutlak değerlerin **farkı** alınır ve **mutlak değeri büyük olanın** işareti kullanılır. Ters işaretli ve mutlak değerleri eşit sayıların toplamı **0**'dır. Toplamanın dört özelliği — **değişme, birleşme, etkisiz eleman (0), ters eleman** — uzun toplamları kısaltmak için kullanılır: önce birbirinin tersi olan sayıları eşleştir. **Çıkarma**, çıkanın ters işaretlisini eklemektir: **a − b = a + (−b)**. "−" işaretinin biri **işlem**, diğeri **sayının işareti** olmak üzere iki anlamı vardır; emin olamadığında her sayıyı parantezle. Karışık işlemlerde sıra: önce **mutlak değerler**, sonra **içten dışa parantezler**, sonra çıkarmaları toplamaya çevirip topla.