ÇÖZÜMLER

Tam Sayılarla Çarpma, Bölme ve Problem Çözme

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge **CC BY-NC 4.0** lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabilir.

1. Bölüm Soru 1–5

1 Aşağıdaki işlemler üç kutuya ayrılacaktır: **"Sonucu pozitif"**, **"Sonucu negatif"** ve **"Sonucu sıfır"**.

I. $(-4)\cdot(+7)$ **II.** $(-5)\cdot(-9)$ **III.** $(-2)\cdot(-3)\cdot(-6)$ **IV.** $(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)$
V. $(+8)\cdot(-3)\cdot 0$ **VI.** $(-36)\div(+4)$ **VII.** $(-72)\div(-8)$ **VIII.** $0\div(-9)$

a) Her işlemin sonucunu bulup kartları üç kutuya ayırınız.
b) Sonucu sıfır çıkan işlemlerin sebebi nedir? İkisini de ayrı ayrı açıklayınız.
c) III. ve IV. işlemlerin sonuçları neden farklı işaretlidir?

- **a)** İşlemleri tek tek yapalım:

  I. $(-4)\cdot(+7)$ → işaretler farklı → **−28**

  II. $(-5)\cdot(-9)$ → işaretler aynı → **+45**

  III. $(-2)\cdot(-3)\cdot(-6)$ → negatif çarpan sayısı **3** (tek) → negatif; $2\cdot3\cdot6=36$ → **−36**

  IV. $(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)$ → negatif çarpan sayısı **4** (çift) → pozitif; $1\cdot2\cdot3\cdot4=24$ → **+24**

  V. $(+8)\cdot(-3)\cdot 0$ → çarpanlardan biri 0 → **0**

  VI. $(-36)\div(+4)$ → işaretler farklı → **−9**

  VII. $(-72)\div(-8)$ → işaretler aynı → **+9**

  VIII. $0\div(-9)$ → sıfırın bölünmesi → **0**

  Sonucu pozitif: II (+45) · IV (+24) · VII (+9)

  Sonucu negatif: I (−28) · III (−36) · VI (−9)

  Sonucu sıfır: V · VIII

- **b)** İki işlemde sıfır **farklı rollerde** bulunuyor:

  V. $(+8)\cdot(-3)\cdot 0$ → Burada 0 bir **çarpandır**. 0, çarpma işleminin **yutan elemanıdır**; diğer çarpanlar ne olursa olsun çarpımı sıfır yapar. Negatif çarpan sayısına bakmaya bile gerek yoktur.

  VIII. $0\div(-9)$ → Burada 0 **bölünendir**. Sıfırın, sıfırdan farklı bir sayıya bölümü sıfırdır.

  Kontrol: $(-9)\cdot 0=0$ ✓

devamı →

1 *(çözümün devamı)*

Dikkat: (−9) ÷ 0 olsaydı sonuç **tanımsız** olurdu. Sıfırın bölünmesi ile sıfıra bölmek aynı şey değildir.

- **c)** İki işlemde de bütün çarpanlar negatiftir; fark **kaç tane** olduklarındadır.

  III. → 3 tane negatif çarpan (**tek** sayı) → sonuç **negatif**

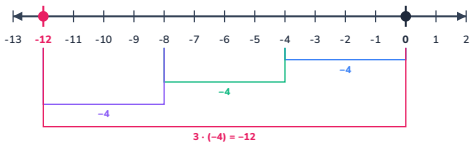
  IV. → 4 tane negatif çarpan (**çift** sayı) → sonuç **pozitif**

  Neden: Negatifler ikişer ikişer eşleşince her çift pozitif bir sonuç verir. Çift sayıda negatif varsa hepsi eşleşir ve geriye eksi kalmaz. Tek sayıda varsa **bir eksi artar** ve sonucu negatif yapar.

  Bu yüzden tek bir negatif çarpan ekleyip çıkarmak sonucun işaretini her defasında **ters çevirir**.

✔ Doğru Sonuç: a) Pozitif: II (+45), IV (+24), VII (+9) — Negatif: I (−28), III (−36), VI (−9) — Sıfır: V, VIII b) V'te 0 yutan çarpan, VIII'de 0 bölünen c) Negatif çarpan sayısı tek (III) ve çift (IV)

2 Bir yük asansörü **zemin kattan** (0. kat) harekete başlıyor ve her seferinde **4 kat aşağı** inerek bu hareketi **3 kez** tekrarlıyor. Şekildeki sayı doğrusu bu hareketi göstermektedir.



a) Şekilde modellenen işlemi yazıp sonucunu bulunuz.
b) Asansörün son konumu hangi kattır?
c) Bu durumda neden toplama değil çarpma kullanıldı? Açıklayınız.
d) Asansör aynı hareketi 5 kez tekrarlasaydı hangi katta olurdu?

- **a)** Asansör her seferinde **4 kat aşağı** iniyor; aşağı hareket negatif bir sayıyla gösterilir: **−4**

  Bu hareket **3 kez** tekrarlanıyor.

  İşlem: **3 · (−4)**

  İşaretler farklı → sonuç negatif; 3 · 4 = 12

  Sonuç = **−12**

- **b)** Başlangıç noktası zemin kat, yani **0**'dır. Konum değişimi −12 olduğuna göre:

devamı →

2 *(çözümün devamı)*

0 + (−12) = **−12**

Asansör **−12. katta**, yani zemin katın 12 kat altındadır.

- **c)** Aynı miktar **birden çok kez** tekrarlandığı için çarpma kullanıldı. Çarpma **tekrarlı toplamadır**:

  (−4) + (−4) + (−4) = **−12**

  3 · (−4) = **−12** ✓ Aynı sonuç.

  Toplama ile de çözülebilirdi ama tekrar sayısı arttıkça (örneğin 20 kez) toplama çok uzardı. Çarpma, aynı işlemi **tek adımda** yapar.

  Sayı doğrusunda da bu görülüyor: üç ayrı ok, hepsi aynı uzunlukta (4 birim) ve hepsi **sola** bakıyor.

- **d)** Tekrar sayısı 5 olursa:

  5 · (−4) = **−20**

  Asansör **−20. katta**, zemin katın 20 kat altında olurdu.

  Not: Tekrar sayısı 3'ten 5'e çıkınca konum −12'den −20'ye indi. Negatif bir sayıyla çarpılan tekrar sayısı büyüdükçe sonuç **küçülür** (sayı doğrusunda sola gider).

✓ Doğru Sonuç: a) 3 · (−4) = −12 b) −12. kat c) Aynı miktar tekrarlandığı için; çarpma tekrarlı toplamadır d) 5 · (−4) = −20 → −20. kat

3 Aşağıdaki işlemleri yapınız.
a) [(−6) · (+4) · (−5)] ÷ (−8)
b) [(−48) ÷ (+6)] · [(−3) ÷ (−1)]
c) [(−42) · (+8)] / [(−7) · (−4)]
d) (c) şıkkının sonucunun işaretini, **hesap yapmadan** nasıl bulabilirdiniz?

Her adımı ayrı ayrı yazarak çözünüz.

- **a)** Önce köşeli parantez içindeki çarpımı bitirelim:

  (−6) · (+4) · (−5)

  Negatif çarpan sayısı: **2** (çift) → sonuç **pozitif**

  Büyüklük: 6 · 4 · 5 = 120 → **+120**

  Şimdi bölme:

  (+120) ÷ (−8) → işaretler farklı, 120 ÷ 8 = 15 → **−15**

devamı →

3 *(çözümün devamı)*

Kontrol: (−8) · (−15) = +120 ✓

- **b)** İki köşeli parantezi ayrı ayrı bitirelim:

  Birinci: (−48) ÷ (+6) → işaretler farklı, 48 ÷ 6 = 8 → **−8**

  İkinci: (−3) ÷ (−1) → işaretler aynı, 3 ÷ 1 = 3 → **+3**

  Şimdi çarpma:

  (−8) · (+3) → işaretler farklı → **−24**

- **c)** Pay ve paydayı ayrı ayrı hesaplayalım:

  Pay: (−42) · (+8) → işaretler farklı → **−336**

  Payda: (−7) · (−4) → işaretler aynı → **+28**

  Bölme: (−336) ÷ (+28)

  336 ÷ 28 = 12

  İşaretler farklı → **−12**

  Kontrol: (+28) · (−12) = −336 ✓

- **d)** Bütün işlem yalnızca **çarpma ve bölmeden** oluşuyorsa (hiç toplama-çıkarma yoksa) sonucun işareti, ifadedeki **bütün negatif sayıların sayılmasıyla** bulunabilir:

  (c) şıkkında negatif sayılar: **−42, −7, −4** → **3 tane** (tek)

  Tek sayıda negatif → sonuç **NEGATİF** ✓

  Gerçekten de −12 bulmuştuk. Bu kestirme, uzun işlemlerde sonucun işaretini önceden bilmeyi ve hesap sonunda kontrol etmeyi sağlar.

  Uyarı: Bu kural yalnızca **çarpma ve bölme** için geçerlidir. Pay ya da paydada toplama-çıkarma varsa önce onlar bitirilmeli, sonra negatifler sayılmalıdır.

✓ Doğru Sonuç: a) −15 b) −24 c) −12 d) Yalnız çarpma-bölme varsa negatifleri say: 3 tane (tek) → negatif

4 Bir sınıfta üç iddia ortaya atılmıştır:

I. Ela: "İki negatif tam sayının çarpımı **negatiftir**."
II. Mert: "Bir çarpımda negatif çarpan sayısı **çift** ise sonuç **her zaman pozitiftir**."
III. Sude: "Bölme işleminde de **değişme özelliği** vardır."

a) Ela'nın iddiası doğru mudur? Karşıt örnek veriniz.
b) Mert'in iddiası doğru mudur? Doğru değilse karşıt örnek verip iddiayı düzeltiniz.
c) Sude'nin iddiası doğru mudur? Karşıt örnek veriniz.

- **a) Ela haksızdır.**

  Kural tam tersidir: işaretler **aynı** olduğunda çarpım **pozitiftir**.

  Karşıt örnek: $(-3) \cdot (-4) = \mathbf{+12}$

  İki sayı da negatif, çarpım pozitif × İddia bozuldu.

  Başka karşıt örnekler: $(-5) \cdot (-9) = +45$ · $(-1) \cdot (-1) = +1$ · $(-10) \cdot (-10) = +100$

  Doğrusu: "İki negatif tam sayının çarpımı **pozitiftir**." Ela muhtemelen toplama kuralıyla karıştırmış; **toplamada** iki negatifin toplamı gerçekten negatiftir: $(-3) + (-4) = -7$.

- **b) Mert'in iddiası EKSİKTİR.**

  Negatif çarpan sayısı çift olsa bile, çarpanlardan biri **0** ise sonuç pozitif değil **sıfır** olur. Sıfır ne pozitif ne negatiftir.

  Karşıt örnek: $(-2) \cdot (-3) \cdot 0$

  Negatif çarpan sayısı **2** (çift) ✓ ama sonuç:

  $= (+6) \cdot 0 = \mathbf{0}$ × Pozitif değil.

  Düzeltilmiş iddia:

  "**Çarpanlardan hiçbiri sıfır değilse**, negatif çarpan sayısı çift olduğunda sonuç pozitiftir."

  Bu yüzden çarpım sorularında ilk kontrol her zaman "çarpanlardan biri sıfır mı?" olmalıdır; 0 varsa diğer her şey gereksizdir.

- **c) Sude haksızdır.**

  Değişme özelliği **çarpmada** vardır, **bölmede yoktur**.

  Karşıt örnek: $(-12) \div (+4) = \mathbf{-3}$

  Sayıların yeri değişirse: $(+4) \div (-12) = \mathbf{-1/3}$

  $-3 \neq -1/3$ × Üstelik ikincisi bir **tam sayı bile değil**.

  Başka karşıt örnek: $8 \div 2 = 4$ ama $2 \div 8 = 1/4$

devamı →

4 *(çözümün devamı)*

Not: Aynı durum çıkarmada da geçerlidir — çıkarmada da değişme özelliği yoktur. Değişme ve birleşme özellikleri yalnızca **toplama** ve **çarpma** için vardır.

✔ Doğru Sonuç: a) Yanlış; (−3) · (−4) = +12 b) Eksik; (−2) · (−3) · 0 = 0. "Hiçbiri sıfır değilse" eklenmeli c) Yanlış; (−12) ÷ 4 = −3 ama 4 ÷ (−12) = −1/3

5 **Soru:** (−5) · [(+8) + (−3)] işleminin sonucunu bulunuz.

Bir öğrenci şöyle çözmüştür:
"(−5) · [(+8) + (−3)] = (−5) · (+8) + (−3)
= (−40) + (−3)
= −43"

a) Öğrencinin hatası nedir?
b) Dağılma özelliğini doğru uygulayarak sonucu bulunuz.
c) Aynı sonucu önce parantez içini hesaplayarak doğrulayınız.
d) Dağılma özelliğini çıkarma üzerine uygularken ek olarak neye dikkat edilmelidir?

- **a)** Öğrenci, parantezin önündeki **(−5) çarpanını yalnızca ilk terime** uygulamış, ikinci terimi (−3) olduğu gibi toplamaya eklemiştir.

  Oysa dağılma özelliğinde çarpan, parantez içindeki **her terimle ayrı ayrı** çarpılır:

  a · (b + c) = a · b **+ a · c**

  Öğrencinin yazdığı "a · b + c" biçimi dağılma özelliği değildir; ortada eksik bir çarpma vardır.

- **b)** Doğru dağıtım:

  (−5) · [(+8) + (−3)]

  = (−5) · (+8) + (−5) · (−3)

  Birinci çarpım: işaretler farklı → **−40**

  İkinci çarpım: işaretler aynı → **+15**

  = (−40) + (+15)

  → farklı işaret, 40 − 15 = 25, |−40| büyük → **−25**

  Doğru sonuç: −25

- **c)** Önce parantez içini hesaplayalım:

  (+8) + (−3) → farklı işaret, 8 − 3 = 5, |+8| büyük → **+5**

devamı →

5 *(çözümün devamı)*

Şimdi çarpalım:

(−5) · (+5) → işaretler farklı, 5 · 5 = 25 → **−25** ✓

İki yol da aynı sonucu verdi. Öğrencinin bulduğu −43 ile arada **18** fark var; bu fark, unutulan (−5) · (−3) = +15 çarpımı ile yazılan (−3) arasındaki farktır: 15 − (−3) = 18 ✓

- **d)** Çıkarma üzerine dağıtırken **ikinci çarpımın önündeki çıkarma işareti korunur**:

  a · (b − c) = a · b **−** a · c

  Örnek: (−6) · [(−9) − (+4)]

  = (−6) · (−9) − (−6) · (+4)

  = (+54) − (−24)

  = (+54) + (+24) = **+78**

  Kontrol (önce içi): (−9) − (+4) = −13 → (−6) · (−13) = +78 ✓

  Dikkat edilecek nokta: İkinci çarpım (−24) gibi negatif çıkarsa, önündeki çıkarma ile birlikte **iki işaret üst üste** gelir ve toplamaya dönüşür. "54 − 24 = 30" demek en sık yapılan hatadır.

✓ Doğru Sonuç: a) Çarpanı ikinci terime uygulamamış b) (−40) + (+15) = −25 c) (−5) · (+5) = −25 ✓ d) İkinci çarpımın önündeki çıkarma işareti korunmalı

2. Bölüm Soru 6–10

6 Aşağıdaki işlemleri **dağılma özelliğinden yararlanarak** kısa yoldan hesaplayınız.
a) 18 · (−7) + 18 · (−13)
b) (−25) · 37 + (−25) · 63
c) 99 · (−6)
d) Her şıkta dağılma özelliğini hangi **yönde** kullandığınızı belirtiniz.

Her adımı ayrı ayrı yazarak çözünüz.

- **a)** Her iki çarpımda da **18** ortak çarpandır. Dışarı alalım:

  18 · (−7) + 18 · (−13)

  = 18 · [(−7) + (−13)]

  = 18 · (−20)

  → işaretler farklı, 18 · 20 = 360 → **−360**

devamı →

6 *(çözümün devamı)*

Doğrudan hesaplasaydık: 18 · (−7) = −126 ve 18 · (−13) = −234; (−126) + (−234) = −360 ✓ Aynı sonuç ama iki büyük çarpma gerekirdi.

- **b)** Ortak çarpan **(−25)**:

  (−25) · 37 + (−25) · 63

  = (−25) · (37 + 63)

  = (−25) · **100**

  = **−2500**

  Buradaki püf nokta 37 + 63 = 100 olmasıdır; parantez içi **yuvarlak** bir sayıya dönüştüğü için çarpma çok kolaylaştı.

  Doğrudan hesaplamak (−925) ve (−1575) gibi iki zahmetli çarpma gerektirirdi.

- **c)** Burada tek bir çarpma var; ama 99 sayısını **100 − 1** biçiminde yazıp dağıtabiliriz:

  99 · (−6) = (100 − 1) · (−6)

  = 100 · (−6) − 1 · (−6)

  = (−600) − (−6)

  = (−600) + (+6)

  = **−594**

  Kontrol: 99 · 6 = 594 ve işaretler farklı → −594 ✓

  Zihinden 99 ile çarpmak zordur; 100 ile çarpıp bir tane geri almak çok daha kolaydır.

- **d)** Kullanılan yönler:

  a) ve b) şıkları — TOPLAMA yönü (ortak çarpanı parantezin **dışına** alma):

  a · b + a · c = a · (b + c)

  İki ayrı çarpma, tek çarpmaya indi.

  c) şıkkı — DAĞITMA yönü (parantezi **açma**):

  a · (b − c) = a · b − a · c

  Zor bir çarpma, iki kolay çarpmaya bölündü.

  Genel ölçü: Terimlerde **ortak çarpan** varsa dışarı al; tek bir çarpma zorsa sayıyı **kolay iki parçaya** ayırıp dağıt.

✓ Doğru Sonuç: a) 18 · (−20) = −360 b) (−25) · 100 = −2500 c) (100 − 1) · (−6) = −594 d) a, b: ortak çarpanı dışarı alma; c: parantezi açma

7 Bir hedef tahtasındaki bölgelerin renkleri ve puanları tabloda verilmiştir.

Renk	Puan	Ada'nın İsabeti	Berk'in İsabeti
Mavi	−3	4	2
Sarı	−5	1	3
Yeşil	+4	2	5
Kırmızı	+8	3	1

a) Ada'nın ve Berk'in toplam puanlarını ayrı ayrı hesaplayınız.
b) Oyunu kim kazanmıştır?
c) Berk, kırmızı bölgeye en az kaç isabet daha yapsaydı Ada'yı geçerdi?
d) Her oyuncunun toplam atış sayısını bulunuz ve sonucu yorumlayınız.

- **a)** Her renk için **isabet sayısı × puan** çarpımı yapılır, sonra toplanır.

  Ada:

  Mavi: 4 · (−3) = **−12**

  Sarı: 1 · (−5) = **−5**

  Yeşil: 2 · (+4) = **+8**

  Kırmızı: 3 · (+8) = **+24**

  Toplam: (−12) + (−5) + (+8) + (+24) = (−17) + (+32) = **+15 puan**

  Berk:

  Mavi: 2 · (−3) = **−6**

  Sarı: 3 · (−5) = **−15**

  Yeşil: 5 · (+4) = **+20**

  Kırmızı: 1 · (+8) = **+8**

  Toplam: (−6) + (−15) + (+20) + (+8) = (−21) + (+28) = **+7 puan**

- **b)** 15 > 7 olduğuna göre oyunu **Ada** kazanmıştır.

  Fark: 15 − 7 = **8 puan**

- **c)** Her kırmızı isabet **+8 puan** kazandırır.

  1 isabet daha: Berk'in puanı 7 + 8 = **15** → Ada ile **berabere**, geçmiş olmaz.

devamı →

7 *(çözümün devamı)*

2 isabet daha: Berk'in puanı 7 + 16 = **23** → 23 > 15 ✓ **Ada'yı geçer.**

Cevap: **En az 2 isabet**

Dikkat: Soru "geçmek" diyor, "eşitlemek" değil. Tam fark kadar puan (8) yalnızca beraberlik sağlar.

- **d)** Toplam atış sayıları:

  Ada: 4 + 1 + 2 + 3 = **10 atış**

  Berk: 2 + 3 + 5 + 1 = **11 atış**

  Yorum: Berk **daha çok** isabet kaydettiği hâlde **daha az** puan almıştır.

  Sebebi, isabetlerin nereye düştüğüdür: Berk'in isabetlerinin **5'i negatif** bölgelerdedir (2 mavi + 3 sarı), Ada'nın ise yalnızca **5'i** — ama Ada yüksek puanlı kırmızıya **3 kez**, Berk yalnızca **1 kez** isabet ettirmiştir.

  Ders: Bu tür problemlerde **adet** değil, adet ile puanın **çarpımı** belirleyicidir.

✓ Doğru Sonuç: a) Ada 15, Berk 7 puan b) Ada kazandı c) En az 2 isabet d) Ada 10, Berk 11 atış; çok atış yapmak çok puan demek değil

8 Bir öğrenci defterine şunu yazmıştır:

"(−18) ÷ 0 = 0'dır. Çünkü bir sayıyı sıfıra bölünce sonuç sıfır olur."

a) Öğrencinin hatası nedir?
b) (−18) ÷ 0 işleminin doğru cevabı nedir? Bölmenin kontrolünü kullanarak gösteriniz.
c) 0 ÷ (−18) işleminin sonucu kaçtır? Bu neden farklıdır?
d) Öğrencinin cümlesini doğru olacak biçimde yeniden yazınız.

- **a)** Öğrenci, sıfırın iki farklı rolünü karıştırmıştır:
  - Sıfırın **bölünen** olması (0 ÷ a)
  - Sıfırın **bölen** olması (a ÷ 0)

  Birincisinin sonucu 0'dır; ikincisi ise **tanımsızdır**. Öğrenci birinci durumun kuralını ikinciye uygulamıştır.

- **b)** Doğru cevap: **TANIMSIZ**

  Kontrolle gösterelim. Bölmenin kontrolü şudur:

  Bölünen = Bölen · Bölüm

devamı →

8 *(çözümün devamı)*

(−18) ÷ 0 = x olduğunu varsayalım. O hâlde:

0 · x = −18 olmalı

Ama **0 çarpma işleminin yutan elemanıdır**; 0 ile çarpılan her sayı **0** verir:

0 · x = 0 ≠ −18

Hiçbir x bu eşitliği sağlayamaz. Sonuç bulunamadığı için işlem **tanımsızdır**.

Öğrencinin cevabını da sınayalım: x = 0 olsaydı 0 · 0 = 0 olurdu, −18 değil ×

- **c) 0 ÷ (−18) = 0**'dır.

  Kontrol: (−18) · 0 = 0 ✓ Eşitlik sağlanıyor, sonuç tanımlı.

  Neden farklı: Burada sıfır **bölünendir**. "Sıfır tane şeyi 18 gruba paylaştır" demek anlamlıdır; her gruba **sıfır** düşer.

  Oysa (−18) ÷ 0 sorusu "18 şeyi **sıfır** gruba paylaştır" demektir; sıfır grup diye bir şey olmadığı için soru anlamsızdır.

- **d)** Doğru hâli:

  "**Sıfırın**, sıfırdan farklı bir tam sayıya bölümü **sıfırdır**: 0 ÷ (−18) = 0.

  Sıfırdan farklı bir tam sayının **sıfıra** bölümü ise **tanımsızdır**: (−18) ÷ 0 tanımsızdır."

  Kısa hatırlatma: **Sıfır bölünebilir, ama sıfıra bölünemez.**

✓ Doğru Sonuç: a) Sıfırın bölünen ve bölen rollerini karıştırmış b) TANIMSIZ; 0 · x = −18 olamaz c) 0 ÷ (−18) = 0, çünkü (−18) · 0 = 0 ✓ d) Sıfır bölünebilir ama sıfıra bölünemez

9 20 soruluk bir deneme sınavında her **doğru cevap +6**, her **yanlış cevap −2**, her **boş soru −1** puandır. Bir öğrenci **13 soruyu doğru**, **5 soruyu yanlış** cevaplamış, kalanları boş bırakmıştır.

a) Öğrenci kaç soruyu boş bırakmıştır?
b) Her cevap türünden aldığı puanı ayrı ayrı hesaplayınız.
c) Öğrencinin toplam puanı kaçtır?
d) Öğrenci yanlış cevapladığı 5 soruyu boş bıraksaydı puanı ne olurdu? Aradaki farkı açıklayınız.

- **a)** Toplam soru 20, doğru 13, yanlış 5:

  Boş = 20 − 13 − 5 = **2 soru**

devamı →

9 *(çözümün devamı)*

Kontrol: 13 + 5 + 2 = 20 ✓ Bütün sorular sayıldı.

- **b)** Aynı puandan birden çok kez alındığı için her türde **çarpma** yapılır:

  Doğrulardan: 13 · (+6) = **+78 puan**

  Yanlışlardan: 5 · (−2) = **−10 puan**

  Boşlardan: 2 · (−1) = **−2 puan**

- **c)** Toplam = (+78) + (−10) + (−2)

  Negatifleri önce toplayalım:

  (−10) + (−2) = **−12**

  (+78) + (−12) → farklı işaret, 78 − 12 = 66, |+78| büyük → **+66**

  Öğrencinin puanı 66'dır.

  Kontrol: Kazanılan 78, kaybedilen 12. Sonucun pozitif ve 78'den küçük olması beklenirdi ✓

- **d)** Yanlışlar boş olsaydı: doğru sayısı değişmez (13), yanlış kalmaz (0), boş sayısı 2 + 5 = **7** olur.

  Doğrulardan: 13 · (+6) = **+78**

  Yanlışlardan: 0 puan

  Boşlardan: 7 · (−1) = **−7**

  Toplam = (+78) + (−7) = **+71 puan**

  Fark: 71 − 66 = **5 puan** daha fazla.

  Açıklaması: 5 soru, −2 puanlık durumdan −1 puanlık duruma geçti. Her soruda 1 puan kazanıldı:

  5 · [(−1) − (−2)] = 5 · (+1) = **+5** ✓

  Bu hesap, boş bırakmanın yanlış cevaplamaktan neden **daha az zararlı** olduğunu sayıyla gösteriyor.

✓ Doğru Sonuç: a) 2 soru b) +78, −10, −2 c) 66 puan d) 71 puan; 5 puan daha fazla (her soruda 1 puan kazanç)

10 Aşağıda sekiz eşitlik verilmiştir:

I. $(-7) \cdot 1 = (-7)$ **II.** $(-4) \cdot 0 = 0$
III. $(+3) \cdot (-8) = (-8) \cdot (+3)$ **IV.** $5 \cdot [(-2) + (+7)] = 5 \cdot (-2) + 5 \cdot (+7)$
V. $[(-2) \cdot (+3)] \cdot (-4) = (-2) \cdot [(+3) \cdot (-4)]$ **VI.** $1 \cdot (-15) = (-15)$
VII. $0 \cdot (+26) = 0$ **VIII.** $(-9) \cdot [(+5) - (+2)] = (-9) \cdot (+5) - (-9) \cdot (+2)$

a) Eşitlikleri değişme, birleşme, etkisiz eleman, yutan eleman ve dağılma özelliklerine göre gruplandırınız.
b) Etkisiz eleman ile yutan eleman özellikleri arasındaki farkı açıklayınız.
c) IV. eşitliğin iki tarafını da hesaplayarak eşit olduklarını gösteriniz.

- **a)** Gruplandırma:

  Değişme özelliği (çarpanlar yer değiştirmiş): **III**

  Birleşme özelliği (üç çarpan, parantez kaymış): **V**

  Etkisiz eleman özelliği (1 ile çarpma): **I** ve **VI**

  Yutan eleman özelliği (0 ile çarpma): **II** ve **VII**

  Dağılma özelliği (parantez açılmış): **IV** (toplama üzerine) ve **VIII** (çıkarma üzerine)

  Tanıma ölçütleri:

  - Aynı çarpanlar farklı sırada mı? → değişme
  - Üç çarpan var, parantez yeri mi değişmiş? → birleşme
  - Çarpanlardan biri **1** mi? → etkisiz eleman
  - Çarpanlardan biri **0** mı? → yutan eleman
  - Parantez açılıp her terime dağıtılmış mı? → dağılma

- **b)** İki özellik de özel bir sayıyla ilgilidir ama etkileri **zıttır**:

  Etkisiz eleman (1): Sayıyı **değiştirmez**, olduğu gibi bırakır.

  $(-7) \cdot 1 = -7$ → sonuç, çarpanla **aynı**

  Yutan eleman (0): Sayıyı **yok eder**, sonucu sıfır yapar.

  $(-4) \cdot 0 = 0$ → sonuç, çarpandan **bağımsız**

  Kısa hatırlatma: **1 hiçbir şey yapmaz, 0 her şeyi yutar.**

  Not: Toplamada etkisiz eleman **0**'dır. Aynı sayının farklı işlemlerde farklı roller üstlendiğine dikkat et.

- **c) IV.** $5 \cdot [(-2) + (+7)] = 5 \cdot (-2) + 5 \cdot (+7)$

devamı →

10 *(çözümün devamı)*

Sol taraf:

(−2) + (+7) → farklı işaret, 7 − 2 = 5, |+7| büyük → **+5**

5 · (+5) = **+25**

Sağ taraf:

5 · (−2) = **−10**

5 · (+7) = **+35**

(−10) + (+35) → 35 − 10 = 25, |+35| büyük → **+25**

Sol taraf = Sağ taraf = +25 ✓

Parantezi açmak da içini hesaplamak da aynı sonucu verdi — dağılma özelliğinin söylediği tam olarak budur.

✓ Doğru Sonuç: a) Değişme: III — Birleşme: V — Etkisiz: I, VI — Yutan: II, VII — Dağılma: IV, VIII b) 1 değiştirmez, 0 yutar c) İki taraf da +25

3. Bölüm Soru 11–15

11 Bölme işleminin özellikleri üzerine üç iddia ortaya atılmıştır:

I. "Bölme işleminde **değişme özelliği** vardır: a ÷ b = b ÷ a'dır."
II. "**1** sayısı bölme işleminin de **etkisiz elemanıdır**."
III. "İki tam sayının bölümü **her zaman bir tam sayıdır**."

a) I. iddia doğru mudur? Karşıt örnek veriniz.
b) II. iddia doğru mudur? İki farklı durumu inceleyerek karar veriniz ve gerekirse düzeltiniz.
c) III. iddia doğru mudur? Karşıt örnek veriniz ve bölmenin tam sayı sonucu vermesi için gereken koşulu yazınız.

- **a) I. iddia YANLIŞTIR.**

  Karşıt örnek: a = −12, b = +4

  a ÷ b = (−12) ÷ (+4) = **−3**

  b ÷ a = (+4) ÷ (−12) = **−1/3**

  −3 ≠ −1/3 × Üstelik ikincisi tam sayı bile değil.

  Başka karşıt örnekler: 8 ÷ 2 = 4 ama 2 ÷ 8 = 1/4 · (−20) ÷ (−5) = 4 ama (−5) ÷ (−20) = 1/4

devamı →

11 *(çözümün devamı)*

Tek istisna: a = b olduğunda her iki taraf da 1 olur. Ama bir özelliğin geçerli sayılması için **bütün** sayılarda sağlanması gerekir.

Not: Değişme özelliği yalnızca **toplama** ve **çarpma** için vardır; çıkarma ve bölmede yoktur.

- **b) II. iddia EKSİKTİR, bu hâliyle yanlıştır.**

  İki durumu ayrı ayrı inceleyelim:

  Durum 1 — 1 sağda (bölen):

  a ÷ 1 = **a** ✓

  Örnek: (−8) ÷ (+1) = −8 ✓ Bu durumda 1 gerçekten etkisizdir.

  Durum 2 — 1 solda (bölünen):

  1 ÷ a = **1/a** ×

  Örnek: 1 ÷ (−8) = **−1/8** → sayı tamamen değişti; üstelik tam sayı bile değil.

  Sonuç: 1 sayısı bölmede yalnızca **sağda** (bölen olarak) etkisizdir. Çarpmada ise iki tarafta da etkisizdir (a · 1 = 1 · a = a).

  Düzeltilmiş iddia: "Bir tam sayı 1'e bölündüğünde sayı değişmez; ancak 1 bir tam sayıya bölündüğünde sonuç genellikle tam sayı bile olmaz."

- **c) III. iddia YANLIŞTIR.**

  Karşıt örnek: (+5) ÷ (+2) = **2,5**

  Tam sayı değil ×

  Başka karşıt örnekler: (−7) ÷ (+2) = −3,5 · (+1) ÷ (+3) = 0,333... · (−9) ÷ (+4) = −2,25

  Koşul: a ÷ b bölümünün tam sayı olması için **b sayısı a'yı kalansız bölmelidir**; yani b, a'nın bir **böleni** olmalıdır.

  Örnekler:

  (−12) ÷ (+4) = −3 ✓ (4, 12'yi böler)

  (−12) ÷ (+5) = −2,4 × (5, 12'yi bölmez)

  Not: Tam sayılar kümesi toplama, çıkarma ve çarpma işlemlerine göre **kapalıdır** (sonuç hep tam sayıdır); ama **bölmeye göre kapalı değildir**. Bu, bölmeyi diğer üç işlemden ayıran temel farktır.

✓ Doğru Sonuç: a) Yanlış; (−12) ÷ 4 = −3 ama 4 ÷ (−12) = −1/3 b) Eksik; 1 yalnız bölen olarak etkisiz c) Yanlış; 5 ÷ 2 = 2,5. Bölenin böleni olması gerekir

12 Aşağıdaki işlemleri yapınız.
a) [(−54) ÷ (+9)] · [(−7) + (+3)]
b) [|−40| ÷ (−8)] · [(−3) · (−2)]
c) [(−8) · (+15)] / [(−4) · (+3) · (−1)]
d) (a) şıkkında negatifleri sayarak işareti bulmaya çalışsaydınız doğru sonuca ulaşır mıydınız? Açıklayınız.

Her adımı ayrı ayrı yazarak çözünüz.

- **a)** İki köşeli parantezi ayrı ayrı bitirelim:

  Birinci: (−54) ÷ (+9) → işaretler farklı, 54 ÷ 9 = 6 → **−6**

  İkinci: (−7) + (+3) → toplama; farklı işaret, 7 − 3 = 4, |−7| büyük → **−4**

  Çarpma: (−6) · (−4) → işaretler aynı → **+24**

- **b)** Önce mutlak değeri hesaplayalım: |−40| = **40**

  Birinci: 40 ÷ (−8) → işaretler farklı, 40 ÷ 8 = 5 → **−5**

  İkinci: (−3) · (−2) → işaretler aynı → **+6**

  Çarpma: (−5) · (+6) → işaretler farklı → **−30**

- **c)** Pay ve paydayı ayrı ayrı hesaplayalım:

  Pay: (−8) · (+15) → işaretler farklı → **−120**

  Payda: (−4) · (+3) · (−1) → negatif çarpan sayısı **2** (çift) → pozitif; 4 · 3 · 1 = 12 → **+12**

  Bölme: (−120) ÷ (+12)

  120 ÷ 12 = 10

  İşaretler farklı → **−10**

  Kontrol: (+12) · (−10) = −120 ✓

- **d) Hayır, ulaşamazdık.**

  Negatifleri sayma kestirmesi yalnızca ifade **tamamen çarpma ve bölmeden** oluştuğunda çalışır.

  (a) şıkkında ikinci köşeli parantezin içinde bir **toplama** var: (−7) + (+3). Negatifleri saysaydık −54, −7 olmak üzere **2 tane** (çift) bulur ve "sonuç pozitif" derdik. Bu örnekte sonuç gerçekten +24 çıktı, ama bu bir **tesadüftür**.

  Karşıt örnek: [(−54) ÷ (+9)] · [(−3) + (+7)]

  Negatifler: −54 ve −3 → 2 tane (çift) → kestirme "pozitif" derdi.

  Gerçek hesap: (−6) · (+4) = **−24** → negatif × Kestirme yanıldı.

devamı →

12 *(çözümün devamı)*

Çünkü (−3) + (+7) = +4'tür; toplama, negatif sayıyı "yutup" işareti değiştirdi.

Kural: Toplama ya da çıkarma varsa önce onlar bitirilir; negatifler ancak ondan sonra sayılabilir.

✓ Doğru Sonuç: a) +24 b) −30 c) −10 d) Hayır; toplama varsa negatif sayma kestirmesi çalışmaz

13 Bir bölgede **yükselti her 100 metre arttığında hava sıcaklığı 1 °C azalmaktadır.** Bir dağcı, sıcaklığın **6 °C** olduğu A noktasından tırmanışa başlıyor.

- A'dan B'ye: **4 saat** boyunca saatte **350 metre** yükselerek çıkıyor.
- B'den C'ye: **3 saat** boyunca saatte **200 metre** yükselerek çıkıyor.

a) B noktasındaki sıcaklık kaç santigrat derecedir?
b) C noktasındaki sıcaklık kaç santigrat derecedir?
c) Sonucunuzu, toplam yükselti üzerinden tek işlemle doğrulayınız.
d) Dağcı A noktasından kaç metre yukarıda iken sıcaklık 0 °C olur?

- **a) A'dan B'ye yükselti farkı:**

  4 saat · 350 m/saat = **1400 metre**

  Sıcaklık değişimi: Her 100 metrede 1 °C azalıyor. 1400 metrede kaç kez 100 metre var?

  1400 ÷ 100 = **14** → sıcaklık **14 °C azalır** → değişim **−14 °C**

  B'deki sıcaklık:

  6 + (−14) → farklı işaret, 14 − 6 = 8, |−14| büyük → **−8 °C**

- **b) B'den C'ye yükselti farkı:**

  3 saat · 200 m/saat = **600 metre**

  Sıcaklık değişimi: 600 ÷ 100 = 6 → **−6 °C**

  C'deki sıcaklık:

  (−8) + (−6) → aynı işaret → **−14 °C**

- **c) Toplam yükselti:** 1400 + 600 = **2000 metre**

  Toplam sıcaklık değişimi: 2000 ÷ 100 = 20 → **−20 °C**

  C'deki sıcaklık: 6 + (−20) = **−14 °C** ✓

devamı →

13 *(çözümün devamı)*

Adım adım hesapla aynı sonuç çıktı. Bu, ara adımlarda hata yapılmadığını doğrular.

Geriye doğru kontrol de yapılabilir: C'den A'ya inerken sıcaklık 20 °C artmalıdır:

(−14) + (+20) = **+6 °C** ✓ Başlangıç sıcaklığı.

- **d)** Sıcaklığın 6 °C'den 0 °C'ye düşmesi için **6 °C azalması** gerekir.

  Her 1 °C azalma 100 metre yükselmeye karşılık geldiğine göre:

  6 · 100 = **600 metre**

  Dağcı A noktasından **600 metre yukarıda** iken sıcaklık 0 °C olur.

  Bu nerede gerçekleşir? A'dan B'ye saatte 350 metre çıkıldığına göre:

  600 ÷ 350 ≈ 1,71 saat → yaklaşık **1 saat 43 dakika** sonra, yani A ile B arasında bir noktada.

  Kontrol: 600 metrede 600 ÷ 100 = 6 °C azalma → 6 + (−6) = 0 °C ✓

✓ Doğru Sonuç: a) −8 °C b) −14 °C c) 2000 m → −20 °C değişim → 6 − 20 = −14 ✓ d) 600 metre yukarıda

14 a ve b birer tam sayı olmak üzere üç iddia ortaya atılmıştır:

I. "a · b > 0 ise a ile b **aynı işaretlidir**."
II. "a · b < 0 ise a ÷ b < 0'dır."
III. "a · b = 0 ise **hem a hem b** sıfırdır."

a) I. iddia doğru mudur? Gerekçelendiriniz.
b) II. iddia doğru mudur? Bir örnekle gösterip gerekçelendiriniz.
c) III. iddia doğru mudur? Doğru değilse karşıt örnek verip iddiayı düzeltiniz.

- **a) I. iddia DOĞRUDUR.**

  Çarpımın pozitif olması, önce çarpanların hiçbirinin **sıfır olmadığını** gösterir (sıfır olsaydı çarpım 0 olurdu).

  İki olasılık kalır:

  - İkisi de pozitif → çarpım pozitif ✓
  - İkisi de negatif → çarpım pozitif ✓
  - Biri pozitif biri negatif → çarpım **negatif** olurdu ×

devamı →

14 *(çözümün devamı)*

Üçüncü durum elendiğine göre a ile b **aynı işaretli** olmak zorundadır.

Örnekler: 3 · 5 = 15 ✓ · (−3) · (−5) = 15 ✓

Her iki durumda da işaretler aynıdır.

- **b) II. iddia DOĞRUDUR.**

  a · b < 0 olması, a ile b'nin **farklı işaretli** olduğunu (ve hiçbirinin sıfır olmadığını) gösterir.

  Bölmede de işaret kuralı **çarpmadakiyle aynıdır**: işaretler farklıysa bölüm de negatiftir.

  Örnek: a = −12, b = +4

  a · b = (−12) · (+4) = **−48 < 0** ✓

  a ÷ b = (−12) ÷ (+4) = **−3 < 0** ✓

  Bir örnek daha: a = 20, b = −5 → a · b = −100 < 0 ve a ÷ b = −4 < 0 ✓

  Genel sonuç: a · b ile a ÷ b **her zaman aynı işaretlidir** (b ≠ 0 olmak üzere); çünkü ikisinin de işaretini belirleyen şey aynıdır — a ile b'nin işaretlerinin aynı mı farklı mı olduğu.

- **c) III. iddia YANLIŞTIR.**

  Çarpımın sıfır olması için **ikisinin birden** sıfır olması gerekmez; **biri** yeterlidir.

  Karşıt örnek: a = 0, b = 5

  a · b = 0 · 5 = **0** ✓ ama b = 5 ≠ 0 ×

  Başka karşıt örnekler: (0, −7) · (12, 0) · (0, 100)

  Düzeltilmiş iddia:

  "a · b = 0 ise a ve b sayılarından **en az biri** sıfırdır."

  Bu kural çok kullanışlıdır: bir çarpım sıfıra eşitse, çarpanlardan birini sıfır yapan durumu aramak yeterlidir.

  Tersi de doğrudur: a ile b'den **en az biri** sıfırsa çarpım kesinlikle sıfırdır (yutan eleman özelliği). Yani iki ifade birbirine denktir.

✓ Doğru Sonuç: a) I doğru (farklı işaretli olsalardı çarpım negatif olurdu) b) II doğru; a · b ile a ÷ b hep aynı işaretli c) III yanlış; a = 0, b = 5. Doğrusu "en az biri sıfırdır"

15 Bir "sayı atölyesi" etkinliğinde öğrencilerden, verilen koşulları sağlayan tam sayılar **üretmeleri** isteniyor. **Dikkat:** Bir maddede koşulu sağlayan sayı **bulunmayabilir**; öyleyse bunu gerekçesiyle yazınız.

a) Çarpımı −36 olan ve toplamı en küçük olan iki tam sayı.
b) Çarpımı +24 olan, ikisi de negatif ve toplamı en küçük olan iki tam sayı.
c) a · b · c < 0 olacak biçimde, hiçbiri sıfır olmayan üç tam sayı. Kaç tanesi negatif olmalıdır?
d) Çarpımı 0 olan ve hiçbiri sıfır olmayan üç tam sayı.
e) a ÷ b = b ÷ a olacak biçimde, birbirinden farklı iki tam sayı.

- **a)** Çarpım negatif olduğuna göre sayılar **farklı işaretlidir**. Çarpan çiftlerini ve toplamlarını yazalım:

  1 · (−36) → toplam **−35**

  2 · (−18) → −16 · 3 · (−12) → −9 · 4 · (−9) → −5 · 6 · (−6) → 0

  (−1) · 36 → 35 · (−2) · 18 → 16 · (−4) · 9 → 5

  En küçük toplam **−35**'tir.

  Cevap: 1 ve −36

  Kural: Toplamın en küçük olması için **büyük mutlak değerli** sayı negatif, küçük olan pozitif seçilmelidir.

- **b)** İkisi de negatif olduğuna göre çarpım pozitif olur ✓ (koşul tutarlı).

  Negatif çarpan çiftleri ve toplamları:

  (−1) · (−24) → toplam **−25**

  (−2) · (−12) → −14 · (−3) · (−8) → −11 · (−4) · (−6) → −10

  En küçük toplam **−25**'tir.

  Cevap: −1 ve −24

  Not: Negatiflerde toplam, çarpanlar **birbirinden uzaklaştıkça küçülür** — pozitiflerdeki "uzaklaştıkça büyür" kuralının ayna görüntüsü.

- **c)** Üç sayının çarpımının negatif olması için negatif çarpan sayısı **TEK** olmalıdır.

  Üç sayı için tek seçenekler: **1 negatif** ya da **3 negatif**.

  Örnek 1 (bir negatif): (−2) · 3 · 4 = **−24** ✓

  Örnek 2 (üç negatif): (−2) · (−3) · (−4) = **−24** ✓

  2 negatif olsaydı çarpım pozitif olurdu: (−2) · (−3) · 4 = +24 ×

  0 negatif olsaydı da pozitif olurdu: 2 · 3 · 4 = +24 ×

devamı →

15 *(çözümün devamı)*

Cevap: Negatif sayıların adedi **1 ya da 3** olmalıdır.

- **d) Böyle üç sayı YOKTUR.**

  Bir çarpımın sıfır olabilmesi için çarpanlardan **en az birinin sıfır** olması gerekir.

  Gerekçe: Sıfırdan farklı iki sayının çarpımı asla sıfır olamaz. a · b ≠ 0 ise, bu sonucu c ile çarptığımızda da (c ≠ 0) sonuç sıfır olamaz.

  Başka bir deyişle: "a · b · c = 0 ise a, b, c'den en az biri sıfırdır" kuralı, istenen durumu **imkânsız** kılar.

  Örnek deneme: (−5) · 3 · 7 = −105 ≠ 0 · 2 · (−1) · (−1) = 2 ≠ 0 — hiçbir denemede sıfır elde edilemez.

- **e)** a ÷ b = b ÷ a koşulunu inceleyelim. Her iki bölümün de tanımlı olması için a ≠ 0 ve b ≠ 0 olmalı.

  Bu eşitliğin sağlanması için sayıların **mutlak değerleri eşit** olmalıdır. a ≠ b olduğuna göre geriye tek seçenek kalır: **a = −b**

  Cevap: a = 3 ve b = −3

  Kontrol:

  a ÷ b = 3 ÷ (−3) = **−1**

  b ÷ a = (−3) ÷ 3 = **−1** ✓ Eşit.

  Başka cevaplar: (5, −5) · (−12, 12) · (1, −1)

  Genel sonuç: Birbirinden farklı iki sayı için bu eşitlik ancak sayılar **birbirinin tersi** olduğunda sağlanır ve sonuç her zaman **−1** çıkar.

✓ Doğru Sonuç: a) 1 ve −36 (toplam −35) b) −1 ve −24 (toplam −25) c) Negatif adedi 1 ya da 3 olmalı d) YOK — çarpım 0 ise en az biri 0'dır e) 3 ve −3 (sonuç −1)