KONU ANLATIMI · CEVAPLI

Tam Sayılarla Çarpma, Bölme ve Problem Çözme

Kazanımlar: MAT.7.1.6. Tam sayılarla çarpma ve bölme işlemlerini yapabilme, çarpma işleminin özelliklerini kullanabilme ve tam sayılarla ilgili problemleri çözebilme

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge **CC BY-NC 4.0** lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabilir.

Tam Sayılarla Çarpma — İşaret Kuralı

İki tam sayı çarpılırken önce sayıların **mutlak değerleri çarpılır**. Çarpımın işareti şöyle belirlenir:

- Sayıların işaretleri **aynı** ise sonuç **pozitiftir**.
- Sayıların işaretleri **farklı** ise sonuç **negatiftir**.

ÖRNEK

İşaretler aynı:
$(+3) \cdot (+2) = \mathbf{+6}$ · $(-4) \cdot (-3) = \mathbf{+12}$ · $(-5) \cdot (-3) = \mathbf{+15}$

İşaretler farklı:
$(+3) \cdot (-2) = \mathbf{-6}$ · $(-4) \cdot (+3) = \mathbf{-12}$ · $3 \cdot (-5) = \mathbf{-15}$

Mutlak değerli ifadelerde önce mutlak değer hesaplanır:
$|+2| \cdot |-5| = 2 \cdot 5 = \mathbf{+10}$ · $|-30| \cdot 4 = 30 \cdot 4 = \mathbf{+120}$

İkiden fazla çarpan varsa tek tek ilerlemek yerine doğrudan **negatif çarpanların sayısına** bakılır:

- Negatif işaretli tam sayıların adedi **ÇİFT** ise sonuç **POZİTİFTİR**.
- Negatif işaretli tam sayıların adedi **TEK** ise sonuç **NEGATİFTİR**.

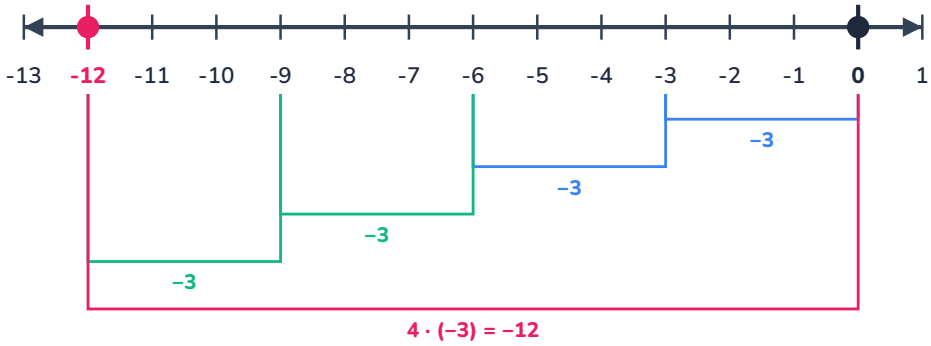
Sonucun sayısal büyüklüğü, bütün mutlak değerlerin çarpımıdır.

ÖRNEK

$(-2) \cdot (-6) \cdot (+1) \cdot (-3) \cdot (-4)$
Negatif çarpan sayısı: **4** (çift) → sonuç **pozitif**
Büyüklük: $2 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 4 = 144$ → **+144**

$(-1) \cdot (+9) \cdot (-7) \cdot (-7) \cdot (+2)$
Negatif çarpan sayısı: **3** (tek) → sonuç **negatif**
Büyüklük: $1 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 2 = 882$ → **−882**

Önemli istisna: Çarpanlardan biri **0** ise negatif sayısına bakmaya gerek yoktur; sonuç doğrudan **0**'dır.



4 · (−3) = −12 işleminin sayı doğrusu modeli. Çarpma tekrarlı toplama olduğu için 0 noktasından başlanarak dört kez 3'er birim sola gidilir ve −12 noktasına ulaşılır.

Çarpma, tekrarlı bir toplamadır.
3 + 3 + 3 + 3 = 12 = 4 · 3

Aynı mantık negatif sayılarda da işler. 4 · (−3) işlemi, **dört tane (−3)** demektir:
(−3) + (−3) + (−3) + (−3) = **−12**

Sayı doğrusunda 0'dan başlanır ve her seferinde **3 birim sola** gidilir. Dört adım sonunda −12'ye ulaşılır ✓

Pozitif bir sayıyla çarpmada oklar sağa, negatif bir sayıyla çarpmada sola bakar; bu da işaret kuralının görsel karşılığıdır.

NOT **Sık yapılan hata:** Çok çarpanlı işlemlerde negatifleri **saymadan** tahmin etmek. (−2) · (−3) · (−4) işleminde "iki eksi götürdü, sonuç pozitif" denip üçüncü eksi unutulursa +24 bulunur; oysa negatif çarpan sayısı **3** (tek) olduğu için doğru sonuç **−24**'tür.

Güvenli yol: önce negatifleri **say**, işarete karar ver; sonra mutlak değerleri çarp.

Çarpma İşleminin Özellikleri

Özellik	Ne Söyler?	Örnek
Değişme	Çarpanların yer değiştirmesi sonucu değiştirmez	(−3) · (+2) = (+2) · (−3) = −6
Birleşme	İkiden fazla çarpanda herhangi ikisinin önce çarpılması sonucu değiştirmez	[(−2) · (+1)] · (−3) = (−2) · [(+1) · (−3)] = 6
Etkisiz eleman	Bir tam sayının **1** ile çarpımı kendisine eşittir	(−9) · 1 = −9
Yutan eleman	Bir tam sayının **0** ile çarpımı 0'a eşittir	7 · 0 = 0 · 7 = 0
Dağılma	Çarpma, toplama ve çıkarma üzerine dağılır	4 · [(−1) + (+2)] = 4 · (−1) + 4 · (+2)

1 sayısı çarpma işleminin **etkisiz elemanıdır**; bir sayıyı değiştirmez.
0 sayısı çarpma işleminin **yutan elemanıdır**; çarpımın tamamını sıfır yapar.

Bu ikisini karıştırma: **toplamada** etkisiz eleman 0'dır, **çarpmada** 1'dir.

ÖRNEK **Dağılma özelliği — toplama üzerine:**
$4 \cdot [(-1) + (+2)]$
$= 4 \cdot (-1) + 4 \cdot (+2)$
$= (-4) + (+8) =$ **+4**
Kontrol (içi önce hesaplayarak): $4 \cdot (+1) = +4$ ✓

Dağılma özelliği — çıkarma üzerine:
$(-4) \cdot [(-1) - (+2)]$
$= (-4) \cdot (-1) - (-4) \cdot (+2)$
$= (+4) - (-8) = (+4) + (+8) =$ **+12**
Kontrol: $(-4) \cdot (-3) = +12$ ✓

Dağılma özelliği tersten de kullanılır ve bu, işlemi çok kısaltır. Ortak çarpan **parantezin dışına** alınır:

$25 \cdot (-7) + 25 \cdot (-13)$
$= 25 \cdot [(-7) + (-13)]$
$= 25 \cdot (-20) =$ **−500**

Soldaki hâlde iki büyük çarpma yapılması gerekirdi; sağdaki hâlde tek bir kolay çarpma yeterli oldu.

NOT **Sık yapılan hata:** Dağıtırken çarpanı **yalnızca ilk terime** uygulamak.
$4 \cdot [(-1) + (+2)]$ işleminde $4 \cdot (-1) + (+2)$ yazmak yanlıştır; 4 sayısı **her iki terimle de** çarpılmalıdır.

Ayrıca çıkarma üzerine dağıtırken **çıkarma işareti korunur**: $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$. İkinci çarpımın işaretini yanlış yazmak en sık görülen ikinci hatadır.

Tam Sayılarla Bölme İşlemi

Tam sayılarla bölme yapılırken sayıların **mutlak değerleri birbirine bölünür**. İşaret kuralı **çarpmadaki ile aynıdır**:

- İşaretler **aynı** ise sonuç **pozitiftir**.
- İşaretler **farklı** ise sonuç **negatiftir**.

ÖRNEK **(−10) ÷ 5 = ?**
Mutlak değerler: |−10| ÷ |5| = 10 ÷ 5 = 2
İşaretler farklı → sonuç **−2**

Çarpmayla kontrol: Bölünen = Bölen · Bölüm
5 · (−2) = −10 ✓ Doğru.

Başka örnekler:
(−18) ÷ (+3) = **−6** · (−30) ÷ (−5) = **+6** · 25 ÷ (−5) = **−5** · (−14) ÷ (−2) = **+7**

Bölme işaretinin farklı yazılışları. Aşağıdaki üç gösterim aynı işlemi anlatır:

(−12) ÷ 4 · (−12) : 4 · $-12/4$

Üçü de **−3** sonucunu verir. Kesir çizgisi de bir bölme işaretidir; paydaki sayı bölünen, paydadaki sayı bölendir.

Bölmede dört özel durum:

1. Sıfırdan farklı bir tam sayı **1'e** bölündüğünde sonuç **sayının kendisidir**. (−8) ÷ (+1) = −8
2. Sıfırdan farklı bir tam sayı **(−1)'e** bölündüğünde **yalnızca işareti değişir**. (+6) ÷ (−1) = −6
3. Sıfırın, sıfırdan farklı bir tam sayıya bölümü **sıfırdır**. 0 ÷ (+3) = 0
4. Sıfırdan farklı bir tam sayının **sıfıra bölümü TANIMSIZDIR**. (−2) ÷ 0 = tanımsız

NOT **4. durum neden tanımsız?** Bölmenin kontrolünü hatırlayalım: Bölünen = Bölen · Bölüm.
(−2) ÷ 0 = x olsaydı, 0 · x = −2 olmalıydı. Oysa **0 ile çarpılan her sayı 0 verir** (yutan eleman); hiçbir x bu eşitliği sağlayamaz.

Bu yüzden **sıfıra bölme tanımsızdır**. Buna karşılık 0 ÷ (+3) = 0'dır; çünkü 3 · 0 = 0 ✓
İki durumu karıştırma: **sıfırın bölünmesi** sorun değil, **sıfıra bölmek** sorundur.

Çarpma ile Bölmenin Birlikte Bulunduğu İşlemler

Kesir çizgisi bir **gruplama işareti** gibi davranır: pay ve payda ayrı ayrı hesaplanır, sonra bölme yapılır.

Sıra şöyledir:
1. Varsa mutlak değerleri hesapla.
2. Payı kendi içinde bitir.
3. Paydayı kendi içinde bitir.
4. Son olarak bölmeyi yap ve işaret kuralını uygula.

ÖRNEK

[(−36) · (+10)] / [(−5) · (−18)] = ?
Pay: (−36) · (+10) = **−360** (işaretler farklı)
Payda: (−5) · (−18) = **+90** (işaretler aynı)
Bölme: (−360) ÷ (+90) = **−4**

[(−9) · (+4)] / [(+12) ÷ (−6)] = ?
Pay: (−9) · (+4) = **−36**
Payda: (+12) ÷ (−6) = **−2**
Bölme: (−36) ÷ (−2) = **+18**

[|−72| · (−3)] / [(−12) · 6] = ?
Pay: 72 · (−3) = **−216** (önce mutlak değer alındı)
Payda: (−12) · 6 = **−72**
Bölme: (−216) ÷ (−72) = **+3**

NOT

Sık yapılan hata: Kesirli ifadede pay ve paydayı bitirmeden **tek tek sadeleştirmeye** kalkmak. Payda toplama ya da çıkarma varsa bu **kesinlikle yapılamaz**.
Önce payı, sonra paydayı tek bir sayıya indir; ancak ondan sonra böl.

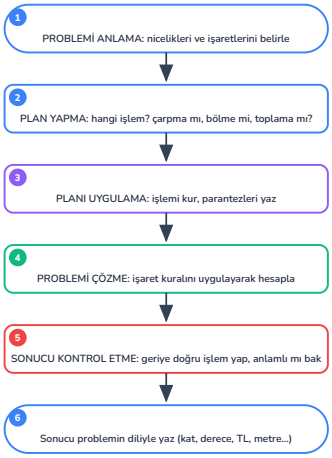
Tam Sayılarla Problem Çözme

Bir problemin çözümü **beş adımlı** bir süreçtir. Adımları atlamadan izlemek, özellikle işaretli sayılarda hata payını çok azaltır.

Nicelikleri işaretlendirme. Problemdeki her niceliğe bir işaret vermek, çözümün en kritik adımıdır:

- Artış, kazanç, yükselme, ileri → **pozitif**
- Azalış, zarar, borç, alçalma, geri → **negatif**
- Referans noktası (zemin kat, deniz seviyesi, başlangıç) → **0**

İşaretler doğru konulursa geri kalan yalnızca hesaptır.



Problem çözme sürecinin beş adımı: problemi anlama, plan yapma, planı uygulama, problemi çözme ve sonucu kontrol etme.

ÖRNEK **Zeynep evinin bulunduğu kattan asansörle 18 kat aşağı inerek −4. kattaki otoparka iniyor. Zeynep'in evi kaçıncı kattadır?**

Varış katı: **−4** · İniş: **−18**
(ev katı) + (−18) = −4
ev katı = (−4) − (−18) = (−4) + (+18) = **14. kat**

Kontrol: 14 − 18 = −4 ✓

Deniz seviyesinin 20 m altındaki denizaltı ile 10 m üstündeki kuş arasındaki dikey uzaklık kaç metredir?
Denizaltı: **−20** · Kuş: **+10**
Uzaklık = (+10) − (−20) = (+10) + (+20) = **30 m**

ÖRNEK **Puanlama problemleri çarpma ile çözülür.**

Bir hedef tahtasında mavi bölme **−2**, sarı bölme **−4**, pembe bölme **+5** puandır. Öznur maviye 3, sarıya 2, pembeye 5 isabetli atış yapıyor. Toplam puanı kaçtır?

Mavi: 3 · (−2) = **−6**
Sarı: 2 · (−4) = **−8**
Pembe: 5 · (+5) = **+25**

Toplam: (−6) + (−8) + (+25) = (−14) + (+25) = **+11 puan**

Kontrol: Kayıplar 14, kazanç 25; kazanç daha büyük olduğu için sonucun pozitif çıkması beklenir ✓

NOT **Sık yapılan hata:** "Her adet" ile "toplam" niceliklerini karıştırmak.
"Her 10 dakikada 4 °C soğuyor, 1 saat sonra sıcaklık kaç olur?" sorusunda doğrudan −4 eklemek yanlıştır. Önce **kaç kez** tekrarlandığı bulunur:
60 ÷ 10 = **6 kez** → 6 · (−4) = **−24** °C değişim
Başlangıç 20 °C ise sonuç: 20 + (−24) = **−4 °C**

Bu tip problemlerde **önce çarpma, sonra toplama** yapılır.

Etkinlikler

ETKİNLİK 1 **Aşağıdaki ifadelerden doğru olanların yanına "D", yanlış olanların yanına "Y" yazınız.**

a) D İşaretleri aynı olan iki tam sayının çarpımı pozitiftir.

b) Y İşaretleri farklı olan iki tam sayının bölümü pozitiftir.

c) D Bir çarpma işleminde negatif çarpan sayısı tek ise sonuç negatiftir.

d) Y Çarpma işleminin etkisiz elemanı 0'dır.

e) D Çarpma işleminin yutan elemanı 0'dır.

f) D Çarpma işleminin toplama üzerine dağılma özelliği vardır.

g) Y Sıfırdan farklı bir tam sayının sıfıra bölümü sıfırdır.

h) D Sıfırın, sıfırdan farklı bir tam sayıya bölümü sıfırdır.

ı) D Bir tam sayı (−1)'e bölündüğünde yalnızca işareti değişir.

i) Y Bölme işleminde değişme özelliği vardır.

j) D −4'ten 5'e kadar olan tam sayıların çarpımı 0'dır.

k) D a · b = 0 ise a ve b sayılarından en az biri 0'dır.

ETKİNLİK 2 **Aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri doldurunuz.**

İşlem	İşaretler	Sonucun İşareti	Sonuç
(−8) · (+7)	Farklı	Negatif	−56
(−9) · (−6)	Aynı	Pozitif	+54
(−2) · (−3) · (−5)	3 negatif (tek)	Negatif	−30
(−1) · (−2) · (−3) · (−4)	4 negatif (çift)	Pozitif	+24
(−63) ÷ (+7)	Farklı	Negatif	−9
(−84) ÷ (−12)	Aynı	Pozitif	+7
0 ÷ (−25)	—	—	0
(−25) ÷ 0	—	—	Tanımsız

ETKİNLİK 3 **Aşağıdaki çarpma ve bölme işlemlerini yapınız.**

a) (−12) · (+5) **Farklı işaret → 12 · 5 = 60 → −60**

b) (−15) · (−4) **Aynı işaret → 15 · 4 = 60 → +60**

c) (+9) · (−1) · (−2) **2 negatif (çift) → pozitif → 9 · 1 · 2 = +18**

d) (−3) · (−4) · (−5) **3 negatif (tek) → negatif → 3 · 4 · 5 = −60**

e) (−7) · (+8) · 0 · (−2) **Çarpanlardan biri 0 → yutan eleman → 0**

f) |−6| · (−9) **Önce mutlak değer: 6 · (−9) = −54**

g) (−96) ÷ (+8) **Farklı işaret → 96 ÷ 8 = 12 → −12**

h) (−121) ÷ (−11) **Aynı işaret → 121 ÷ 11 = 11 → +11**

ı) (+45) ÷ (−1) **Yalnızca işaret değişir → −45**

i) [(−60) ÷ (+5)] ÷ (−3) **(−60) ÷ (+5) = −12; (−12) ÷ (−3) = +4**

ETKİNLİK 4 **Aşağıdaki işlemleri yapınız. Kullandığınız özelliği ya da kuralı da yazınız.**

a) (−5) · [(+8) + (−3)] **Önce içi: (+8) + (−3) = +5 → (−5) · (+5) = −25 (dağılmayla da: −40 + 15 = −25)**

b) (+4) · [(−7) − (+2)] **Önce içi: (−7) + (−2) = −9 → 4 · (−9) = −36**

c) 12 · (−9) + 12 · (−11) **Ortak çarpanı dışarı al: 12 · [(−9) + (−11)] = 12 · (−20) = −240**

d) (−7) · 23 + (−7) · 77 **(−7) · (23 + 77) = (−7) · 100 = −700**

e) [(−24) · (+5)] / [(−6) · (−2)] **Pay: −120; Payda: +12 → (−120) ÷ (+12) = −10**

f) [(−18) ÷ (−3)] · [(+20) ÷ (−4)] **(+6) · (−5) = −30**

g) [|−45| · (−2)] / [(+9) · (−5)] **Pay: 45 · (−2) = −90; Payda: −45 → (−90) ÷ (−45) = +2**

h) (−100) · (+1) · (−1) **1 etkisiz eleman, (−1) işareti çevirir → +100**

ETKİNLİK 5 **Aşağıdaki problemleri çözünüz. Kurduğunuz işlemi de yazınız.**

a) Sıcaklığı −5 °C olan bir deponun sıcaklığı 7 °C artırılıyor. Yeni sıcaklık kaç derecedir? **(−5) + 7 = +2 °C**

b) Bir dalgıç her dakikada 3 metre iniyor. 8 dakika sonra deniz seviyesine göre konumu nedir? **8 · (−3) = −24 → deniz seviyesinin 24 m altı**

c) Bir şirket yılın ilk 6 ayında her ay 1000 TL kâr, son 6 ayında her ay 400 TL zarar ediyor. Yıl sonunda durumu nedir? **6 · (+1000) + 6 · (−400) = 6000 + (−2400) = +3600 TL kâr**

d) Sıcaklığı 8 °C olan bir çorba, her dakika 12 °C ısınarak 80 °C'ye ulaşıyor. Kaç dakika ısıtılmıştır? **(80 − 8) ÷ 12 = 72 ÷ 12 = 6 dakika**

e) Deniz seviyesinin 20 m altındaki denizaltı ile 10 m üstündeki kuş arasındaki dikey uzaklık kaç metredir? **(+10) − (−20) = (+10) + (+20) = 30 m**

devamı →

ETKİNLİK 5 **Aşağıdaki problemleri çözünüz. Kurduğunuz işlemi de yazınız.** (devam)

f) Sıcaklıkları 20 °C olan köfteler derin dondurucuda her 10 dakikada 4 °C soğuyor. 1 saat sonra sıcaklıkları kaç derece olur? **60 ÷ 10 = 6 kez → 6 · (−4) = −24 → 20 + (−24) = −4 °C**

g) a ve b birer tam sayı olmak üzere a · b = −8'dir. a ÷ b ifadesinin alabileceği en büyük negatif tam sayı değeri kaçtır? **a · b negatif → a ile b farklı işaretli → a ÷ b de negatif. Çiftler: (1,−8)→−1/8 tam değil; (−1,8)→ −1/8; (2,−4)→ −1/2; (8,−1)→ −8; (4,−2)→ −2; (−8,1)→ −8; (−2,4)→ −1/2; (−4,2)→ −2. Tam sayı olanlar: −8 ve −2. En büyüğü −2'dir.**

Konu Özeti

ÖZET **Çarpmada ve bölmede işaret kuralı aynıdır:** işaretler **aynıysa pozitif**, **farklıysa negatif**. İkiden fazla çarpan varsa **negatiflerin sayısına** bakılır: çift ise pozitif, tek ise negatif; çarpanlardan biri **0** ise sonuç doğrudan 0'dır. Çarpmanın beş özelliği vardır: **değişme, birleşme, etkisiz eleman (1), yutan eleman (0)** ve **dağılma**. Dağılma özelliği iki yönde de kullanılır — parantezi açmak ya da ortak çarpanı dışarı almak. Bölmede sonuç her zaman **Bölen · Bölüm = Bölünen** ile denetlenir. Dört özel durumu unutma: ÷1 sayıyı değiştirmez, ÷(−1) yalnız işareti çevirir, **0 ÷ a = 0**'dır ama **a ÷ 0 TANIMSIZDIR**. Problemlerde önce nicelikleri **işaretlendir** (artış +, azalış −, referans 0), sonra "kaç kez tekrarlanıyor?" sorusuyla çarpmayı kur ve en sonunda sonucu **geriye doğru kontrol et**.