ÇÖZÜMLER

Rasyonel Sayılarla Toplama, Çıkarma ve Çarpma İşlemleri

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge **CC BY-NC 4.0** lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabilir.

1. Bölüm Soru 1–5

1 Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını en sade hâliyle bulunuz.
a) 5/9 + 7/9
b) 3/4 + (−1/6)
c) 11/12 − 5/6
d) (−2/5) − (−7/10)

Her şıkta önce paydaları eşitleyiniz; çıkarma varsa toplamaya çeviriniz ve sonucu en sade hâliyle yazınız.

a) Paydalar eşit: Paylar doğrudan toplanır.
5/9 + 7/9 = (5 + 7)/9 = **12/9**
Sadeleştirelim (ikisi de 3'e bölünür): **4/3**

b) Ortak payda 12:
3/4 = 9/12 · −1/6 = −2/12
= 9/12 + (−2/12) = (9 + (−2))/12 = **7/12**

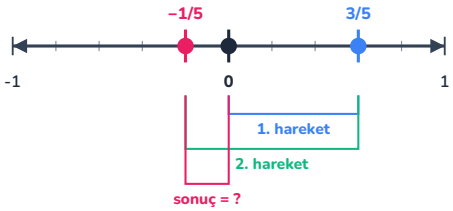
c) Ortak payda 12:
11/12 − 5/6 = 11/12 − 10/12 = (11 − 10)/12 = **1/12**

d) Önce çıkarmayı toplamaya çevir:
Çıkan (−7/10), tersi (+7/10):
= (−2/5) + (7/10)
Ortak payda **10**: = (−4/10) + (7/10) = ((−4) + 7)/10 = **3/10**

Kontrol: −2/5 = −0,4 ve −7/10 = −0,7 → −0,4 − (−0,7) = 0,3 = 3/10 ✓

a) 4/3 b) 7/12 c) 1/12 d) 3/10

2 Aşağıdaki sayı doğrusunda bir toplama işlemi modellenmiştir. Her birim 5 eş parçaya bölünmüştür.



a) Modelde gösterilen işlemi yazınız.
b) İşlemin sonucunu hesaplayarak varılan noktayla karşılaştırınız.

1. Doğruyu oku. Her birim **5 eş parçaya** bölünmüş; bir parça **1/5** birimdir.

2. Birinci hareket. 0 noktasından **3 parça sağa** gidilmiş ve 3/5 noktasına varılmış. Sağa gitmek **pozitif** sayı demektir → birinci sayı **+3/5**

3. İkinci hareket. 3/5 noktasından **4 parça sola** gidilmiş ve −1/5 noktasına varılmış. Sola gitmek **negatif** sayı demektir → ikinci sayı **−4/5**

4. İşlemi yaz.
3/5 + (−4/5) = ?

5. Hesapla. Paydalar zaten eşit; payları işaretleriyle toplayalım:
= (3 + (−4))/5 = **−1/5**

Varılan nokta da −1/5'tir ✓ Model ile hesap aynı sonucu verdi.

Not: Toplananların ikisi de değil, yalnızca **ikincisi** negatiftir. Sonucun negatif çıkmasının sebebi, sola gidilen parça sayısının (4) sağa gidilenden (3) fazla olmasıdır.

3/5 + (−4/5) = −1/5

3 Kerem, **(−2¼) + 1⅓** işlemini aşağıdaki gibi çözmüştür:

1. adım: −2¼ = −2 + ¼ ve 1⅓ = 1 + ⅓
2. adım: (−2 + 1) + (¼ + ⅓)
3. adım: −1 + (3/12 + 4/12)
4. adım: −1 + 7/12 = −5/12

a) Kerem hangi adımda hata yapmıştır?
b) Hatanın sebebini açıklayınız.
c) İşlemin doğru sonucunu bulunuz.

Hata 1. adımdadır.

Sebebi: Negatif tam sayılı kesirlerde eksi işareti **yalnızca tam kısma değil**, rasyonel sayının **tamamına** aittir. Yani:
−2¼ = **−(2 + ¼) = −2 − ¼**
Kerem bunu "−2 + ¼" diye yazarak kesir kısmını **pozitif** yapmış ve işlemi bozmuştur.

devamı →

3 *(çözümün devamı)*

Doğru çözüm — 1. yol (bileşik kesre çevir):
−2¼ = −(2·4 + 1)/4 = **−9/4**
1⅓ = (1·3 + 1)/3 = **4/3**
Ortak payda **12**:
−9/4 = −27/12 · 4/3 = 16/12
= ((−27) + 16)/12 = **−11/12**

Doğru çözüm — 2. yol (tam ve kesir kısımları):
(−2 − ¼) + (1 + ⅓) = (−2 + 1) + (−¼ + ⅓)
= −1 + (−3/12 + 4/12) = −1 + 1/12
= −12/12 + 1/12 = **−11/12** ✓

Kontrol: −2,25 + 1,333... ≈ −0,917 ve −11/12 ≈ −0,917 ✓
Kerem'in bulduğu −5/12 ≈ −0,417 çıkıyor; bu da hatanın gerçekten sonucu değiştirdiğini gösterir.

1. adım hatalı; eksi işareti sayının tamamına aittir. Doğru sonuç: −11/12

4 **A = (−7/9) + 5/6 + 7/9 + 1/6** işlemi veriliyor.

a) A işlemini toplama özelliklerinden yararlanarak hesaplayınız.
b) Kullandığınız özellikleri sırasıyla yazınız.
c) A sayısının toplama işlemine göre tersini bulunuz.
d) A sayısının çarpma işlemine göre tersini bulunuz.

a) Eşleri yan yana getir.
Toplananlar arasında **−7/9** ile **7/9** birbirinin tersidir; **5/6** ile **1/6** ise aynı paydalıdır.
= [(−7/9) + 7/9] + [5/6 + 1/6]
= 0 + 6/6
= 0 + 1
A = 1

b) Kullanılan özellikler:
1. Değişme özelliği → sayıların yerlerini değiştirip eşleri yan yana getirdik.
2. Birleşme özelliği → hangi ikilinin önce toplanacağını seçtik.
3. Ters eleman özelliği → (−7/9) + 7/9 = 0
4. Etkisiz eleman özelliği → 0 + 1 = 1

c) Toplama işlemine göre tersi: Onunla toplandığında **0** veren sayıdır; işaret değişir.
A = 1 olduğundan tersi **−1**'dir.
Kontrol: 1 + (−1) = 0 ✓

devamı →

4 *(çözümün devamı)*

d) Çarpma işlemine göre tersi: Onunla çarpıldığında **1** veren sayıdır; pay ile payda yer değiştirir.
A = 1 = 1/1 olduğundan tersi **1/1 = 1**'dir.
Kontrol: 1 · 1 = 1 ✓

Dikkat çekici sonuç: 1 sayısı, çarpma işlemine göre tersi **kendisine eşit** olan sayılardan biridir. (Diğeri −1'dir; çünkü (−1) · (−1) = 1.)

a) A = 1 c) −1 d) 1

5 Bir öğrenci şöyle diyor:

> *"Çıkarma da bir tür toplama olduğuna göre, rasyonel sayılarla çıkarma işleminin de değişme özelliği vardır."*

a) Bu iddia doğru mudur? Bir karşıt örnekle gösteriniz.
b) İddiadaki mantık hatası nedir? Açıklayınız.
c) Çıkarma işleminin etkisiz elemanı var mıdır? Tartışınız.

Karar: İddia YANLIŞTIR.

1. Değişme özelliği için karşıt örnek.
3/5 ve 1/5 sayılarını alalım.
3/5 − 1/5 = (3 − 1)/5 = **2/5**
1/5 − 3/5 = (1 − 3)/5 = **−2/5**

2/5 ≠ −2/5 olduğundan **çıkarmanın değişme özelliği yoktur**. Tek bir karşıt örnek, iddiayı çürütmeye yeter.

2. İddiadaki mantık nerede kırılıyor?
Doğru olan şudur: **a − b = a + (−b)**. Yani çıkarma, **çıkanın ters işaretlisiyle** yapılan bir toplamadır. Yerler değişince **hangi sayının işaretinin değişeceği** de değişir:
a − b = a + (−b) ama b − a = b + (−a)
Bunlar farklı toplamlardır. Çıkarmayı toplamaya çevirmek işlemi kolaylaştırır, ama **toplamanın özelliklerini çıkarmaya taşımaz**.

3. Etkisiz eleman var mı?
Bir tarafta işe yarıyor gibi görünür: a − 0 = a ✓
Ama etkisiz eleman **iki yönlü** çalışmalıdır. Diğer yönü deneyelim:
0 − a = −a ≠ a (a ≠ 0 için)
Örnek: 3/4 − 0 = 3/4 ama 0 − 3/4 = −3/4

Bu yüzden **çıkarma işleminin etkisiz elemanı da yoktur**.

Sonuç: Rasyonel sayılarla çıkarma işleminin **değişme, birleşme, etkisiz eleman ve ters eleman** özelliklerinin hiçbiri yoktur.

devamı →

5 *(çözümün devamı)*

İddia yanlıştır: 3/5 − 1/5 = 2/5 iken 1/5 − 3/5 = −2/5; çıkarmanın etkisiz elemanı da yoktur.

2. Bölüm Soru 6–10

6 Aşağıdaki çarpma işlemlerini sadeleştirerek yapınız.

a) (−5/12) · (8/15)
b) 2⅕ · (−10/33)
c) (−0,6) · (−1,5)
d) (a) ve (b) sonuçlarının farkını [(a) − (b)] hesaplayınız.

a) (−5/12) · (8/15)
İşaretler farklı → sonuç **negatif**.
Sadeleştirelim: **5** ile **15** → 1 ve 3; **8** ile **12** → 2 ve 3
= ((−1) · 2)/(3 · 3) = **−2/9**

b) Önce bileşik kesre çevirelim:
2⅕ = (2·5 + 1)/5 = **11/5**
(11/5) · (−10/33)
İşaretler farklı → **negatif**.
Sadeleştirelim: **11** ile **33** → 1 ve 3; **10** ile **5** → 2 ve 1
= ((1) · (−2))/(1 · 3) = **−2/3**

c) Ondalık gösterimleri rasyonel sayıya çevirelim:
−0,6 = −6/10 · −1,5 = −15/10
İşaretler aynı → sonuç **pozitif**.
Sadeleştirelim: **6** ile **10** → 3 ve 5; **15** ile **10** → 3 ve 2
= (3 · 3)/(5 · 2) = **9/10**
Kontrol: 0,6 · 1,5 = 0,9 = 9/10 ✓

d) (a) − (b) = (−2/9) − (−2/3)
Çıkarmayı toplamaya çevirelim:
= (−2/9) + (2/3)
Ortak payda **9**: 2/3 = 6/9
= (−2/9) + (6/9) = ((−2) + 6)/9 = **4/9**

Kontrol: −2/9 ≈ −0,222 ve −2/3 ≈ −0,667 → fark ≈ 0,444; 4/9 ≈ 0,444 ✓

a) −2/9 b) −2/3 c) 9/10 d) 4/9

7 Aşağıdaki eşitliklerin her birinde kullanılan özelliği yazınız.

Eşitlik	Kullanılan Özellik
I. $(-4/7) \cdot 1 = -4/7$	?
II. $5/8 \cdot (-9/4) = (-9/4) \cdot 5/8$	?
III. $(-3/5) \cdot 0 = 0$	?
IV. $2/9 \cdot [1/3 + 5/6] = 2/9 \cdot 1/3 + 2/9 \cdot 5/6$	?
V. $(-11/6) \cdot (-6/11) = 1$	?
VI. $[3/4 \cdot 2/5] \cdot 1/7 = 3/4 \cdot [2/5 \cdot 1/7]$	?

Her eşitlikte kullanılan özelliğin adını yazınız; etkisiz eleman ile yutan elemanı birbirinden ayırmaya dikkat ediniz.

I. Etkisiz eleman özelliği. Bir rasyonel sayının **1** ile çarpımı kendisine eşittir. 1, çarpmanın etkisiz elemanıdır.

II. Değişme özelliği. Çarpanlar yer değiştirmiş, sonuç değişmemiştir. (İki taraf da $5 \cdot (-9)/(8 \cdot 4) = -45/32$'dir.)

III. Yutan eleman özelliği. Bir rasyonel sayının **0** ile çarpımı 0'dır. 0, çarpmanın yutan elemanıdır.

IV. Dağılma özelliği. Çarpma, toplama üzerine dağıtılmıştır. Parantez dışındaki çarpan, parantez içindeki her terimle ayrı ayrı çarpılmıştır.

V. Ters eleman özelliği (çarpma). Çarpımları **1** olan iki sayı birbirinin çarpma işlemine göre tersidir. $-11/6$ ile $-6/11$'de pay ve payda yer değiştirmiş, işaret aynı kalmıştır.
Kontrol: $(-11 \cdot -6)/(6 \cdot 11) = 66/66 = 1$ ✓

VI. Birleşme özelliği. Üç çarpandan hangi ikisinin önce çarpılacağı değişmiş, sonuç değişmemiştir.

Karıştırmamak için: Etkisiz eleman çarpmada **1**, toplamada **0**'dır. Yutan eleman ise yalnızca **çarpmaya** aittir ve **0**'dır.

I. Etkisiz eleman II. Değişme III. Yutan eleman IV. Dağılma V. Ters eleman VI. Birleşme

8 Bir manavda 24¾ kg portakal vardır. Sabah bu portakalların **2/9**'u, öğleden sonra ise kalanın **3/7**'si satılmıştır.

a) Sabah satılan portakal kaç kilogramdır?
b) Sabahtan sonra geriye kaç kilogram kalmıştır?
c) Öğleden sonra satılan portakal kaç kilogramdır?
d) Gün sonunda manavda kaç kilogram portakal kalmıştır?

a) Sabah satılan. "24¾ kg'ın 2/9'u" ifadesi **çarpma** demektir.
Önce bileşik kesre çevirelim: 24¾ = (24·4 + 3)/4 = **99/4**
99/4 · 2/9
Sadeleştirelim: **99** ile **9** → 11 ve 1; **2** ile **4** → 1 ve 2
= (11 · 1)/(2 · 1) = **11/2 kg** = 5½ kg

b) Kalan miktar. Toplamdan satılanı çıkaralım:
99/4 − 11/2 → ortak payda **4**: 11/2 = 22/4
= (99 − 22)/4 = **77/4 kg** = 19¼ kg

Kısa yol: 2/9'u satıldıysa 7/9'u kalmıştır: 99/4 · 7/9 → 99 ile 9 → 11 ve 1 → (11 · 7)/(4 · 1) = 77/4 ✓ Aynı sonuç.

c) Öğleden sonra satılan. Dikkat: 3/7 **tamamının** değil, **kalanın** 3/7'sidir.
77/4 · 3/7
Sadeleştirelim: **77** ile **7** → 11 ve 1
= (11 · 3)/(4 · 1) = **33/4 kg** = 8¼ kg

d) Gün sonunda kalan.
77/4 − 33/4 = (77 − 33)/4 = **44/4 = 11 kg**

Kontrol: Satılanların toplamı 11/2 + 33/4 = 22/4 + 33/4 = 55/4 kg. Kalan ile toplayalım: 55/4 + 11 = 55/4 + 44/4 = 99/4 kg ✓ Başlangıçtaki miktara eşit.

a) 11/2 = 5½ kg b) 77/4 = 19¼ kg c) 33/4 = 8¼ kg d) 11 kg

9 Elif, **3/4 · 2/3** işlemini şöyle yapmıştır:

> **1. adım: Ortak payda 12'dir.**
> **2. adım: 3/4 = 9/12 ve 2/3 = 8/12**
> **3. adım: 9/12 · 8/12 = 72/144**
> **4. adım: 72/144 = 1/2**

Elif'in bulduğu sonuç doğrudur; buna rağmen çözümünde ciddi bir kavram hatası vardır.
a) Bu hata nedir? Açıklayınız.
b) İşlemin doğru çözümünü yazınız.
c) Elif aynı yöntemi 3/4 · 2/5 işleminde uygulasaydı doğru sonucu bulur muydu? Gösteriniz.

a) Hata: Çarpma işleminde payda eşitlemek.
Payda eşitleme **yalnızca toplama ve çıkarmaya** ait bir adımdır. Çarpmada paydalar eşitlenmez; doğrudan **paylar payla, paydalar paydayla** çarpılır.

Peki sonuç neden yine de doğru çıktı? Çünkü paydaları eşitlerken Elif her iki kesri de **değerini değiştirmeden** genişletti. Kesirlerin değeri aynı kaldığı için çarpımları da aynı kaldı. Yani **yöntem gereksiz ama sonucu bozmuyor** — sadece sayıları çok büyütüyor (72/144 gibi) ve sadeleştirme yükünü artırıyor.

b) Doğru çözüm:
3/4 · 2/3
Sadeleştirelim: **3** ile **3** → 1 ve 1; **2** ile **4** → 1 ve 2
= (1 · 1)/(2 · 1) = **1/2**

Tek satırda bitti; 144 gibi büyük bir sayı hiç ortaya çıkmadı.

c) 3/4 · 2/5 için deneyelim.
Elif'in yöntemiyle: ortak payda **20**
3/4 = 15/20 · 2/5 = 8/20
15/20 · 8/20 = 120/400
Sadeleştirelim: 120 ve 400'ün ikisi de 40'a bölünür → **3/10**

Doğru yöntemle: (3 · 2)/(4 · 5) = 6/20 = **3/10** ✓

Sonuç: Elif'in yöntemi sonucu bozmaz; çünkü genişletme kesrin değerini değiştirmez. Ancak gereksiz yere büyük sayılarla çalışmaya ve fazladan sadeleştirmeye yol açar. Asıl tehlike, öğrencinin "çarpmada da payda eşitlenir" diye **yanlış bir kural** ezberlemesidir; bu kural başka işlemlerde hataya dönüşür.

a) Çarpmada payda eşitlemek gereksizdir (sonucu bozmaz ama yöntem yanlıştır)
b) 1/2 c) Evet, 3/10 bulunur

10 **(−4/5) · [7/3 − 1/6]** işlemi veriliyor.

a) İşlemi önce parantez içini hesaplayarak yapınız.
b) Aynı işlemi dağılma özelliğini kullanarak yapınız.
c) İki sonucu karşılaştırıp hangi yolun daha kısa olduğunu belirtiniz.
d) Dağılma özelliğinin çıkarma üzerinde de geçerli olduğunu bu örnek nasıl gösterir?

a) Önce parantez içi.
7/3 − 1/6 → ortak payda **6**: 7/3 = 14/6
= 14/6 − 1/6 = **13/6**

Şimdi çarpalım:
(−4/5) · (13/6)
Sadeleştirelim: **4** ile **6** → 2 ve 3
= ((−2) · 13)/(5 · 3) = **−26/15**

b) Dağılma özelliğiyle.
(−4/5) · 7/3 − (−4/5) · 1/6

Birinci çarpım: (−4 · 7)/(5 · 3) = **−28/15**
İkinci çarpım: 4 ile 6 → 2 ve 3 → (−2 · 1)/(5 · 3) = **−2/15**

Şimdi çıkaralım:
(−28/15) − (−2/15) = (−28/15) + (2/15) = ((−28) + 2)/15 = **−26/15** ✓

c) Karşılaştırma. İki yol da **−26/15** sonucunu verdi.
Bu soruda **(a) yolu daha kısadır**: parantez içi tek adımda 13/6 oldu ve tek bir çarpma yetti. Dağılma yolunda **iki çarpma + bir çıkarma**, yani üç işlem yapmak gerekti.

Genel kural: Parantez içi kolayca sadeleşiyorsa önce parantez içini hesaplamak; parantez içindeki terimler dışarıdaki çarpanla ayrı ayrı güzel sadeleşiyorsa dağıtmak daha kısadır.

d) Dağılma özelliği çoğunlukla "çarpmanın **toplama** üzerine dağılması" diye öğrenilir. Bu örnekte parantez içinde **çıkarma** vardı ve dağıtmak yine doğru sonucu verdi.

Sebebi şudur: çıkarma, ters işaretlisini ekleme demektir.
a · (b − c) = a · [b + (−c)] = a·b + a·(−c) = a·b − a·c
Yani çıkarma üzerine dağılma, toplama üzerine dağılmanın doğrudan bir sonucudur.

a) −26/15 b) −26/15 c) (a) yolu daha kısa d) a·(b−c) = a·[b+(−c)] olduğundan

3. Bölüm Soru 11–15

11 Aşağıdaki sayı çiftlerini **toplama işlemine göre ters**, **çarpma işlemine göre ters** ve **hiçbiri** olmak üzere sınıflandırınız.

I. 5/8 ve −5/8
II. −3/7 ve −7/3
III. 2/9 ve 9/2
IV. −4/5 ve 5/4
V. 1,5 ve 2/3
VI. 0 ve 0

Her çifti toplama işlemine göre ters, çarpma işlemine göre ters ya da hiçbiri olarak sınıflandırıp kararınızı hesapla gösteriniz.

Yöntem: İki sayıyı hem **toplayıp** hem **çarpıp** bakacağız. Toplamları 0 ise toplama tersi, çarpımları 1 ise çarpma tersidir.

I. 5/8 ve −5/8
Toplam: 5/8 + (−5/8) = **0** → **toplama işlemine göre ters**
(Çarpım −25/64 ≠ 1)

II. −3/7 ve −7/3
Çarpım: ((−3)·(−7))/(7·3) = 21/21 = **1** → **çarpma işlemine göre ters**
Pay ve payda yer değiştirmiş, işaret **aynı** kalmış — doğru dönüşüm budur.

III. 2/9 ve 9/2
Çarpım: (2·9)/(9·2) = 18/18 = **1** → **çarpma işlemine göre ters**

IV. −4/5 ve 5/4
Toplam: (−16/20) + (25/20) = 9/20 ≠ 0
Çarpım: ((−4)·5)/(5·4) = −20/20 = −1 ≠ 1
→ **hiçbiri**

Burada hem pay-payda yer değiştirmiş **hem de** işaret değişmiş. İkisi birden yapılınca ne toplama ne de çarpma tersi elde edilir. −4/5'in çarpma tersi **−5/4**, toplama tersi ise **4/5**'tir.

V. 1,5 ve 2/3
1,5 = 15/10 = **3/2**
Çarpım: (3·2)/(2·3) = 6/6 = **1** → **çarpma işlemine göre ters**

VI. 0 ve 0
Toplam: 0 + 0 = **0** → **toplama işlemine göre ters**
0 sayısının toplama işlemine göre tersi **kendisidir**.
Çarpım ise 0 · 0 = 0 ≠ 1; zaten **0'ın çarpma işlemine göre tersi yoktur**.

Toplama tersi: I, VI · Çarpma tersi: II, III, V · Hiçbiri: IV

12 Bir su deposunun **5/6**'sı doludur. Deponun tamamı **90** litre almaktadır.

a) Depoda kaç litre su vardır?
b) Suyun 2/5'i kullanıldıktan sonra kaç litre kalır?
c) Kalan suyun 3/4'ü bir sulama kabına aktarılıyor. Kaba kaç litre aktarılmıştır?
d) Son durumda depodaki su, deponun tamamının kaçta kaçıdır?

a) Depodaki su. "90 litrenin 5/6'sı" → çarpma:
90 · 5/6
Sadeleştirelim: **90** ile **6** → 15 ve 1
= (15 · 5)/1 = **75 litre**

b) Kullanımdan sonra kalan.
Kullanılan: 75'in 2/5'i → 75 · 2/5 → 75 ile 5 → 15 ve 1 → 15 · 2 = **30 litre**
Kalan: 75 − 30 = **45 litre**

Kısa yol: 2/5'i kullanıldıysa 3/5'i kalmıştır: 75 · 3/5 = 15 · 3 = 45 ✓

c) Kaba aktarılan. Dikkat: 3/4, deponun değil **kalan suyun** 3/4'üdür.
45 · 3/4 = (45 · 3)/4 = 135/4 = **33,75 litre** (= 33¾ litre)

d) Son durum.
Depoda kalan: 45 − 135/4 → 45 = 180/4
= (180 − 135)/4 = **45/4 litre** (= 11,25 litre)

Deponun tamamı 90 litre olduğuna göre kalan su, tamamın:
(45/4) : 90 oranındadır. Bunu kesir olarak yazalım:
(45/4)/90 = 45/(4 · 90) = 45/360
Sadeleştirelim (ikisi de 45'e bölünür): = **1/8**

Kontrol: Deponun 1/8'i = 90 · 1/8 = 90/8 = 11,25 litre ✓ Bulduğumuz miktara eşit.

Adımların özeti: 90 L deponun 5/6'sı = 75 L → 3/5'i kaldı = 45 L → 1/4'ü kaldı = 11,25 L → bu da 90 L'nin 1/8'i.

a) 75 L b) 45 L c) 135/4 = 33,75 L d) Tamamının 1/8'i

13 Bir a rasyonel sayısı için şunlar biliniyor:
- a sayısının **toplama işlemine göre tersi** 9/4'tür.
- b sayısı, a sayısının **çarpma işlemine göre tersidir**.

a) a sayısını bulunuz.
b) b sayısını bulunuz.
c) a + b toplamını hesaplayınız.
d) "Bir sayının toplama işlemine göre tersi ile çarpma işlemine göre tersi hiçbir zaman eşit olamaz." iddiası doğru mudur? Gerekçelendiriniz.

a) a sayısı. Toplama işlemine göre ters olmak **karşılıklı** bir durumdur: a'nın tersi 9/4 ise, 9/4'ün tersi de a'dır.
9/4'ün toplama işlemine göre tersi = **−9/4**
Yani **a = −9/4**
Kontrol: (−9/4) + 9/4 = 0 ✓

b) b sayısı. b, a'nın çarpma işlemine göre tersidir; pay ile payda yer değiştirir, **işaret korunur**:
a = −9/4 → **b = −4/9**
Kontrol: (−9/4) · (−4/9) = 36/36 = 1 ✓

c) a + b.
(−9/4) + (−4/9) → paydalar 4 ve 9; ortak payda **36**
−9/4 = −81/36 · −4/9 = −16/36
= ((−81) + (−16))/36 = **−97/36**

Tam sayılı kesir olarak: 97 : 36 = 2 tam, kalan 25 → **−2 tam 25/36**

d) İddia DOĞRUDUR. Ancak gerekçesi "birkaç sayı denedim, olmadı" değildir; aşağıdaki gibi kesin olarak gösterilebilir.

1. Koşulu yazalım. x sayısının iki tersi eşit olsun istiyoruz.
Toplama işlemine göre tersi: **−x**
Çarpma işlemine göre tersi: **1/x**
Eşit olmaları için: **−x = 1/x** olmalıdır.

2. Deneyelim.
x = 1 için: toplama tersi **−1**, çarpma tersi **1** → eşit değil.
x = −1 için: toplama tersi **1**, çarpma tersi **−1** → eşit değil.
x = 2/3 için: toplama tersi **−2/3**, çarpma tersi **3/2** → eşit değil.

3. Neden hiçbir sayıda olmuyor? −x = 1/x eşitliğinin iki tarafını x ile çarpalım (x ≠ 0):
−x · x = (1/x) · x
$-x^2 = 1$ yani **$x^2 = -1$**

Oysa bir rasyonel sayının karesi **asla negatif olamaz**: pozitif bir sayının karesi pozitif, negatif bir sayının karesi de pozitiftir. Bu yüzden $x^2 = -1$ eşitliğini sağlayan hiçbir rasyonel sayı yoktur.

devamı →

13 *(çözümün devamı)*

4. Geriye 0 kalıyor. Yukarıda $x \neq 0$ varsaydık; $x = 0$ durumuna ayrıca bakalım. 0'ın toplama işlemine göre tersi **0**'dır, ama **çarpma işlemine göre tersi yoktur**. Karşılaştırılacak ikinci sayı oluşmadığı için 0 da bir istisna oluşturmaz.

Sonuç: Hiçbir rasyonel sayıda toplama tersi ile çarpma tersi birbirine eşit olamaz. Bunun sebebi, $-x = 1/x$ eşitliğinin rasyonel sayılarda **çözümsüz** olmasıdır.

a) a = −9/4 b) b = −4/9 c) −97/36 d) Eşit olamaz; $-x = 1/x$ eşitliği $x^2 = -1$ gerektirir

14 Aşağıdaki işlemi **hiç payda eşitlemeden** hesaplayınız ve her adımda hangi özelliği kullandığınızı yazınız.

K = (−5/11) · [3/7 + 4/7] + (5/11) · 0 + 7/3 · 3/7

a) K değerini bulunuz.
b) Kullandığınız özellikleri yazınız.
c) İşlemdeki hangi terim, sonucu hiç etkilemeden silinebilirdi? Neden?

a) Terimleri tek tek ele alalım.

1. terim: (−5/11) · [3/7 + 4/7]
Parantez içindeki kesirler **aynı paydalı**; payda eşitlemeye gerek yok:
3/7 + 4/7 = 7/7 = **1**
= (−5/11) · 1 = **−5/11** (**etkisiz eleman**)

2. terim: (5/11) · 0 = **0** (**yutan eleman**)

3. terim: 7/3 · 3/7
Pay ve payda yer değiştirmiş, işaret aynı → bunlar birbirinin **çarpma işlemine göre tersidir**:
= **1** (**ters eleman**)

Şimdi toplayalım:
K = (−5/11) + 0 + 1
= (−5/11) + 1 (**toplamada etkisiz eleman**)
Ortak payda gerekiyor mu? 1 = 11/11 yazmak payda eşitleme değil, **1'i uygun biçimde yazmaktır**:
= (−5/11) + (11/11) = **6/11**

b) Kullanılan özellikler:
1. Çarpmada etkisiz eleman (1 ile çarpım) → 1. terimde
2. Çarpmada yutan eleman (0 ile çarpım) → 2. terimde
3. Çarpmada ters eleman (çarpımı 1 olan sayılar) → 3. terimde
4. Toplamada etkisiz eleman (0 ile toplam) → birleştirme adımında

c) Silinebilecek terim: (5/11) · 0

Neden? 0, çarpma işleminin **yutan elemanıdır**; 0 ile çarpılan her rasyonel sayı 0 verir. Elde edilen 0 ise toplamanın **etkisiz elemanıdır**; bir toplama eklendiğinde toplamı değiştirmez.

devamı →

14 *(çözümün devamı)*

Yani bu terim iki özelliğin arka arkaya gelmesiyle **hiçbir katkı yapmaz**: önce yutuluyor, sonra etkisiz kalıyor. Silinirse K yine 6/11 çıkar.

Not: 1. terimdeki parantez de aslında **1**'e eşittir; ama oradaki çarpan (−5/11) sonucu belirlediği için o terim silinemez.

a) K = 6/11 b) Çarpmada etkisiz / yutan / ters eleman ve toplamada etkisiz eleman c) (5/11)·0 terimi

15 Aşağıdaki dört rasyonel sayı veriliyor:

−3/4 · 2/3 · −8/9 · 1/2

a) İkisini seçip çarpımı pozitif olan bir işlem kurunuz ve sonucu bulunuz.
b) İkisini seçip toplamı 0'a en yakın olan çifti belirleyip toplamı hesaplayınız.
c) Dört sayının tamamının çarpımını bulunuz; sonucun işaretini önceden nasıl söylerdiniz?
d) Hangi sayının çarpma tersi en büyük mutlak değere sahiptir? Bulunuz.

a) Çarpımı pozitif olan çift. Çarpım pozitif olsun istiyorsak işaretler **aynı** olmalıdır. Listede iki negatif sayı var: **−3/4** ve **−8/9**.

(−3/4) · (−8/9)
İşaretler aynı → pozitif.
Sadeleştirelim: **3** ile **9** → 1 ve 3; **8** ile **4** → 2 ve 1
= (1 · 2)/(1 · 3) = **2/3**

(Aynı şekilde 2/3 · 1/2 = 1/3 de pozitiftir; iki pozitifin çarpımı da pozitiftir.)

b) Toplamı 0'a en yakın çift. Toplamın 0'a yakın olması için bir pozitif ve bir negatif sayının **mutlak değerlerinin birbirine yakın** olması gerekir.

Mutlak değerleri ondalık olarak yazalım:
|−3/4| = 0,75 · |2/3| ≈ 0,67 · |−8/9| ≈ 0,89 · |1/2| = 0,5

En yakın ikili: **−3/4** (0,75) ve **2/3** (0,67). Farkları yalnızca 0,08 kadardır.

Toplayalım: (−3/4) + (2/3) → ortak payda **12**
= (−9/12) + (8/12) = **−1/12**

Karşılaştırma için diğer zıt işaretli çiftler:
(−3/4) + 1/2 = −1/4 · (−8/9) + 2/3 = −2/9 · (−8/9) + 1/2 = −7/18
|−1/12| ≈ 0,083 hepsinden küçüktür ✓

c) Dörtlü çarpım.
(−3/4) · (2/3) · (−8/9) · (1/2)

İşareti önceden söyleme: Çarpanlar arasında **2 tane negatif** sayı var. Negatif çarpan sayısı **çift** olduğunda sonuç **pozitiftir**.

devamı →

15 *(çözümün devamı)*

Hesaplayalım. (a) şıkkından iki negatifin çarpımı 2/3'tü. Kalan ikisi: 2/3 · 1/2 = 2/6 = 1/3
Şimdi bunları çarpalım: 2/3 · 1/3 = **2/9**

Kontrol (hepsini birden): paylar 3·2·8·1 = 48, paydalar 4·3·9·2 = 216 → 48/216; ikisi de 24'e bölünür → **2/9** ✓ Pozitif çıktı, tahminimizle uyumlu.

d) Çarpma tersleri. Her sayının çarpma işlemine göre tersini yazalım (pay-payda yer değiştirir, işaret korunur):
−3/4 → **−4/3** (|−4/3| ≈ 1,33)
2/3 → **3/2** (|3/2| = 1,5)
−8/9 → **−9/8** (|−9/8| = 1,125)
1/2 → **2** (|2| = 2)

Terslerin hiçbiri listede yoktur. Mutlak değeri **en büyük** olan terse sahip sayı ise **1/2**'dir; tersi **2**'dir.

Neden 1/2? Bir kesrin mutlak değeri ne kadar **küçükse**, tersinin mutlak değeri o kadar **büyük** olur. Listedeki mutlak değeri en küçük sayı 1/2 (0,5) olduğu için tersi en büyüktür.

a) (−3/4)·(−8/9) = 2/3 b) −3/4 ile 2/3, toplam −1/12 c) 2/9, negatif çarpan sayısı çift olduğu için pozitif d) 1/2 (tersi 2)