KONU ANLATIMLI SORU ÇÖZÜMLERİ

Rasyonel Sayılarla Toplama, Çıkarma ve Çarpma İşlemleri

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge **CC BY-NC 4.0** lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabilir.

ÇÖZÜMLÜ SORU 1 — Toplama ve çıkarmada payda eşitleme ve tam sayılı kesirler

Aşağıdaki işlemleri yapıp sonuçları en sade hâliyle yazınız.
a) (−5/6) + 3/4
b) 2⅓ − 1½
c) (−1¼) − (−2⅗)
d) (b) ve (c) şıklarındaki sonuçların **toplamını** bulunuz.

1 a) Paydaları eşitle

Paydalar 6 ve 4'tür. Ortak katlarının en küçüğü **12**'dir.

−5/6 → pay ve payda 2 ile çarpılır → **−10/12**
3/4 → pay ve payda 3 ile çarpılır → **9/12**

Payları işaretleriyle toplayalım:
(−10) + 9 = **−1**

Sonuç = **−1/12**

Kontrol: −5/6 ≈ −0,833 ve 3/4 = 0,75 → toplam ≈ −0,083 ve −1/12 ≈ −0,083 ✓

2 b) Tam sayılı kesirleri bileşik kesre çevir

2⅓ = (2 · 3 + 1)/3 = **7/3**
1½ = (1 · 2 + 1)/2 = **3/2**

Çıkarmayı toplamaya çevirelim:
7/3 − 3/2 = 7/3 + (−3/2)

Ortak payda **6**:
= 14/6 + (−9/6) = (14 + (−9))/6 = **5/6**

3 c) Negatif tam sayılı kesirlere dikkat

Önce işaretleri doğru oku:
−1¼ = −(1 + ¼) = **−5/4** (eksi, sayının tamamına ait!)
−2⅗ = −(2 + ⅗) = **−13/5**

İşlem: (−5/4) − (−13/5)
Çıkan (−13/5), tersi (+13/5):
= (−5/4) + (13/5)

Ortak payda **20**:
= (−25/20) + (52/20) = ((−25) + 52)/20 = **27/20**

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 1 **Toplama ve çıkarmada payda eşitleme ve tam sayılı kesirler** (devam)

Sonuç pozitif çıktı; çünkü çıkarılan sayının mutlak değeri daha büyüktü ve negatif bir sayıyı çıkarmak sonucu büyütür.

4 d) İki sonucu topla

(b) sonucu **5/6**, (c) sonucu **27/20**'dir.

5/6 + 27/20 → paydalar 6 ve 20; ortak katlarının en küçüğü **60**

5/6 = 50/60 · 27/20 = 81/60

= (50 + 81)/60 = **131/60**

Tam sayılı kesir olarak: 131 : 60 = 2 tam, kalan 11 → **2 tam 11/60**

Kontrol: 5/6 ≈ 0,833 ve 27/20 = 1,35 → toplam ≈ 2,183; 131/60 ≈ 2,183 ✓

Sonuç: a) −1/12 b) 5/6 c) 27/20 d) 131/60 = 2 tam 11/60

Dikkat: Negatif tam sayılı kesirlerde eksi, sayının TAMAMINA aittir: −1¼ = −5/4'tür, −1 + ¼ değil.

ÇÖZÜMLÜ SORU 2 **Toplama özellikleriyle pratik hesap**

(−5/8) + 7/11 + 5/8 + 4/11 + (−1) işleminin sonucunu bulunuz.
a) İşlemi **sırayla yapmadan**, toplama özelliklerinden yararlanarak hesaplayınız.
b) Hangi özellikleri hangi adımda kullandığınızı yazınız.
c) Aynı işlemi baştan sona sırayla yapsaydınız kaç kez payda eşitlemek gerekirdi?
d) (−5/8)'in toplama işlemine göre tersi kaçtır?

1 a) Birbirini götürecek ve kolay toplanacak sayıları eşleştir

Toplananlara bakalım: **−5/8** ile **5/8** birbirinin tersi. **7/11** ile **4/11** aynı paydalı, kolayca toplanır. Geriye **−1** kalıyor.

Yerlerini değiştirip gruplayalım:
= [(−5/8) + 5/8] + [7/11 + 4/11] + (−1)
= 0 + 11/11 + (−1)
= 0 + 1 + (−1)
= **0**

2 b) Kullanılan özellikler

1. Değişme özelliği: Sayıların yerlerini değiştirerek eşleri yan yana getirdik.

2. Birleşme özelliği: Hangi ikilinin önce toplanacağını seçip köşeli parantezlerle grupladık.

3. Ters eleman özelliği: (−5/8) + 5/8 = 0 ve ayrıca 1 + (−1) = 0.

4. Etkisiz eleman özelliği: Sıfırlar kalan toplamı değiştirmedi.

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 2 **Toplama özellikleriyle pratik hesap** (devam)

Dört özelliği de tek bir işlemde kullandık.

3 **c) Sırayla yapmanın maliyeti**

Sırayla hesaplasaydık:

1. (−5/8) + 7/11 → paydalar 8 ve 11, ortak payda **88** → payda eşitleme (1)

2. Sonuç + 5/8 → yine payda eşitleme (2)

3. Sonuç + 4/11 → yine payda eşitleme (3)

4. Sonuç + (−1) → yine payda eşitleme (4)

Dört kez payda eşitlemek gerekirdi ve sayılar 88'lik paydalarla büyürdü.

Özellikleri kullanan yolda **hiç payda eşitlemeye gerek kalmadı**; her grup zaten aynı paydalıydı. Bu, özelliklerin neden "işlem kısaltan araçlar" olduğunun açık bir örneğidir.

4 **d) Toplama işlemine göre tersi**

Bir rasyonel sayının toplama işlemine göre tersi, onunla toplandığında **0** veren sayıdır; yalnızca **işareti değiştirilerek** bulunur.

(−5/8)'in tersi = **5/8**

Kontrol: (−5/8) + 5/8 = 0 ✓

Dikkat: Bu sayının **çarpma** işlemine göre tersi farklıdır; orada pay ve payda yer değiştirir: (−5/8) → **−8/5** (çarpımları 1 olur).

Sonuç: a) 0 b) Değişme → birleşme → ters eleman → etkisiz eleman c) Dört kez d) 5/8

Dikkat: Uzun toplamlarda önce birbirinin tersi olanları ve aynı paydalıları ara; payda eşitleme işini çoğu zaman tamamen ortadan kaldırırlar.

ÇÖZÜMLÜ SORU 3 **Çarpmada sadeleştirme ve "...in ...i" ifadeleri**

a) (−9/14) · (7/6) işlemini **sadeleştirerek** yapınız.
b) 1⅔ · (−9/10) işleminin sonucunu bulunuz.
c) 3/8'in 4/9'u kaçtır?
d) Bir çuvaldaki 10¾ kg unun 2/3'ü boş bir çuvala aktarılıyor. Yeni çuvala aktarılan un kaç kilogramdır?

1 **a) Çapraz sadeleştir**

(−9/14) · (7/6)

Çarpmadan önce pay ile paydalar arasında sadeleştirelim:

- Paydaki **9** ile paydadaki **6** → ikisi de 3'e bölünür → **3** ve **2**
- Paydaki **7** ile paydadaki **14** → ikisi de 7'ye bölünür → **1** ve **2**

Geriye kalan: ((−3) · 1)/(2 · 2) = **−3/4**

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 3 **Çarpmada sadeleştirme ve "...in ...i" ifadeleri** (devam)

Kontrol (sadeleştirmeden): (−9 · 7)/(14 · 6) = −63/84; 63 ve 84'ün ikisi de 21'e bölünür → **−3/4** ✓

İşaret kontrolü: İşaretler farklı (– ve +) → sonuç negatif ✓

2 **b) Önce bileşik kesre çevir**

1⅔ = (1 · 3 + 2)/3 = **5/3**

(5/3) · (−9/10)

Sadeleştirelim:

- **5** ile **10** → 1 ve 2
- **9** ile **3** → 3 ve 1

= (1 · (−3))/(1 · 2) = **−3/2**

Tam sayılı kesir olarak: **−1½**

Kontrol: 5/3 ≈ 1,667 ve −9/10 = −0,9 → çarpım ≈ −1,5 ✓

3 **c) "...in ...i" çarpma demektir**

"3/8'in 4/9'u" ifadesi **3/8 · 4/9** demektir.

Sadeleştirelim:

- **3** ile **9** → 1 ve 3
- **4** ile **8** → 1 ve 2

= (1 · 1)/(2 · 3) = **1/6**

Kontrol (sadeleştirmeden): (3 · 4)/(8 · 9) = 12/72 = 1/6 ✓

4 **d) Problemi çarpmaya çevir**

"10¾ kg unun 2/3'ü" → **10¾ · 2/3**

Önce bileşik kesre çevirelim:

10¾ = (10 · 4 + 3)/4 = **43/4**

(43/4) · (2/3)

Sadeleştirelim: **2** ile **4** → 1 ve 2

= (43 · 1)/(2 · 3) = **43/6 kg**

Tam sayılı kesir olarak: 43 : 6 = 7 tam, kalan 1 → **7 tam 1/6 kg**

Mantık kontrolü: 10¾ kg'ın üçte ikisi, yarısından (yaklaşık 5,4 kg) fazla ve tamamından az olmalı. 43/6 ≈ 7,17 kg ✓ Makul.

Sonuç: a) −3/4 b) −3/2 = −1½ c) 1/6 d) 43/6 = 7 tam 1/6 kg

Dikkat: Çarpmada önce sadeleştir; sayılar küçük kalır ve büyük çarpımlarda hata yapma riski düşer.

ÇÖZÜMLÜ SORU 4 **Dağılma özelliği ve iki farklı ters eleman**

a) (−3/5) · [2/3 + 5/6] işlemini **iki farklı yolla** hesaplayınız.
b) 4/9 sayısının **toplama** ve **çarpma** işlemine göre terslerini bulunuz.
c) Bu iki tersin **toplamını** hesaplayınız.
d) 0 sayısının çarpma işlemine göre tersi var mıdır? Gerekçelendiriniz.

1 **a) 1. yol — önce parantez içi**

2/3 + 5/6 → ortak payda **6**
= 4/6 + 5/6 = **9/6**
Sadeleştirelim: 9/6 = **3/2**

Şimdi çarpalım:
(−3/5) · (3/2) = ((−3) · 3)/(5 · 2) = **−9/10**

2 **a) 2. yol — dağılma özelliği**

(−3/5) · [2/3 + 5/6] = (−3/5)·(2/3) + (−3/5)·(5/6)

Birinci çarpım: 3 ile 3 sadeleşir
(−1 · 2)/(5 · 1) = **−2/5**

İkinci çarpım: 5 ile 5 sadeleşir, 3 ile 6 → 1 ve 2
(−1 · 1)/(1 · 2) = **−1/2**

Topla: (−2/5) + (−1/2) → ortak payda 10
= (−4/10) + (−5/10) = **−9/10** ✓

İki yol da aynı sonucu verdi. Bu soruda **1. yol** daha kısaydı; çünkü parantez içi hemen sadeleşti.

3 **b) İki farklı ters**

Toplama işlemine göre tersi: Onunla toplandığında **0** veren sayıdır; işaret değişir.
4/9 → **−4/9**
Kontrol: 4/9 + (−4/9) = 0 ✓

Çarpma işlemine göre tersi: Onunla çarpıldığında **1** veren sayıdır; pay ile payda yer değiştirir.
4/9 → **9/4**
Kontrol: 4/9 · 9/4 = 36/36 = 1 ✓

İki ters tamamen farklı sayılardır; hangisinin istendiğine dikkat etmek gerekir.

4 **c) İki tersi topla / d) Sıfırın çarpma tersi**

c) (−4/9) + (9/4) → paydalar 9 ve 4; ortak payda **36**
−4/9 = **−16/36** · 9/4 = **81/36**
= ((−16) + 81)/36 = **65/36**

Tam sayılı kesir olarak: 65 : 36 = 1 tam, kalan 29 → **1 tam 29/36**

d) Hayır, 0'ın çarpma işlemine göre tersi YOKTUR.

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 4 **Dağılma özelliği ve iki farklı ters eleman** (devam)

Gerekçe: Bir sayının çarpma işlemine göre tersi, onunla çarpıldığında **1** vermelidir. Yani $0 \cdot x = 1$ olacak bir x aranıyor.

Oysa **0, çarpma işleminin yutan elemanıdır**; 0 ile çarpılan her sayı **0** verir:
$0 \cdot x = 0 \neq 1$

Hiçbir x bu eşitliği sağlayamaz. Bu yüzden 0 sayısının çarpma işlemine göre tersi yoktur.

Not: 0'ın **toplama** işlemine göre tersi vardır ve kendisidir: $0 + 0 = 0$ ✓

Sonuç: a) −9/10 (iki yol da) b) Toplama tersi −4/9, çarpma tersi 9/4 c) 65/36 = 1 tam 29/36 d) Yoktur; 0 · x = 0 olduğu için 1 elde edilemez.

Dikkat: Hangi tersin istendiğini anlamak için sonuca bak: SIFIR isteniyorsa toplama tersi, BİR isteniyorsa çarpma tersidir.