KONU ANLATIMI · CEVAPLI

Rasyonel Sayılarla Toplama, Çıkarma ve Çarpma İşlemleri

Kazanımlar: MAT.7.1.7. Rasyonel sayılarla toplama, çıkarma ve çarpma işlemlerini yapabilme; toplama ve çarpma işlemlerinin özelliklerini kullanabilme

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge **CC BY-NC 4.0** lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabilir.

Rasyonel Sayılarla Toplama İşlemi

Rasyonel sayılarla işlem yaparken **kesirlerde ve tam sayılarda** öğrenilen bilgilerin ikisi birden kullanılır.

Toplama işlemi yapılırken **paydalar eşit değilse eşitlenir**. Ortak payda sonucun **paydası** olarak, paylardaki sayıların toplamı ise sonucun **payı** olarak yazılır.

ÖRNEK

Paydalar zaten eşitse:
1/5 + 2/5 = (1 + 2)/5 = **3/5**

Paydalar farklıysa eşitlenir:
3/5 + (−1/4) → ortak payda **20**
= 12/20 + (−5/20) = (12 + (−5))/20 = **7/20**

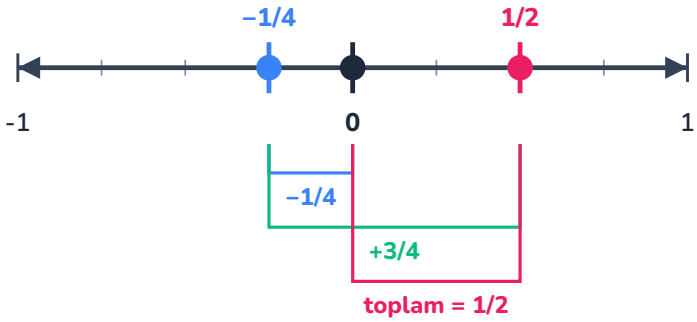
İkisi de negatifse:
(−3/8) + (−13/32) → ortak payda **32**
= (−12/32) + (−13/32) = ((−12) + (−13))/32 = **−25/32**

NOT

Negatif rasyonel sayılarda eksi işareti PAYA dâhildir.

−3/8 sayısını (−3)/8 olarak düşün. Bu yüzden toplama ve çıkarma yapılırken **paylar işaretleriyle birlikte** değerlendirilir:
(−12) + (−13) = −25 → sonuç −25/32

Eksiyi paydaya yazmak ya da kesrin dışında unutmak en sık yapılan hatadır.



(−1/4) + (3/4) = 1/2 işleminin sayı doğrusu modeli. Her birim 4 eş parçaya bölünmüştür. 0 noktasından 1 parça sola gidilir, oradan 3 parça sağa dönülür ve 1/2 noktasına ulaşılır.

Sayı doğrusu modeli. Başlangıç noktası **0**'dır. Pozitif rasyonel sayı kadar **sağa**, negatif rasyonel sayı kadar **sola** ilerlenir. Vardığımız nokta işlemin sonucunu verir.

Yukarıdaki doğruda her birim **4 eş parçaya** bölünmüştür; bir parça 1/4 birimdir.
0'dan **1 parça sola** (−1/4), oradan **3 parça sağa** (+3/4) gidilir. Varılan nokta 2/4 = **1/2**'dir ✓

Hesapla da aynı sonuç çıkar: (−1/4) + 3/4 = ((−1) + 3)/4 = 2/4 = **1/2**

Tam sayılı kesirlerle toplama iki yolla yapılabilir:

1. yol: Tam sayılı kesirler **bileşik kesre çevrildikten** sonra işlem yapılır.
2. yol: Tam kısımlar kendi arasında, kesir kısımları kendi arasında toplanır.

Bu durum rasyonel sayılar için de geçerlidir.

ÖRNEK **(−1½) + (1⅓) = ?**

1. yol — bileşik kesre çevir:
(−3/2) + (4/3) → ortak payda 6
= (−9/6) + (8/6) = ((−9) + 8)/6 = **−1/6**

2. yol — tam ve kesir kısımlarını ayır:
(−1 − ½) + (1 + ⅓) = (−1 + 1) + (−½ + ⅓)
= 0 + (−3/6 + 2/6) = **−1/6** ✓

Kritik uyarı: Negatif rasyonel sayılarda eksi işareti **yalnızca tam kısma değil**, rasyonel sayının **tamamına** aittir. Yani −1½ = −(1 + ½) = −1 − ½'dir. Bunu "−1 + ½" diye okumak sonucu bozar.

Toplama İşleminin Özellikleri

Özellik	Ne Söyler?	Örnek
Değişme	İki rasyonel sayı toplanırken yer değiştirmesi sonucu değiştirmez	(−3/4) + 1/9 = 1/9 + (−3/4)
Birleşme	İkiden fazla sayıda herhangi ikisinin önce toplanması sonucu değiştirmez	[(−1/2) + 2/3] + (−3/4) = (−1/2) + [2/3 + (−3/4)]
Etkisiz eleman	Bir rasyonel sayının **0** ile toplamı kendisine eşittir	(−13/5) + 0 = −13/5
Ters eleman	Toplamları **0** olan iki rasyonel sayı birbirinin tersidir	(−2/5) + 2/5 = 0

Bir rasyonel sayının **toplama işlemine göre tersi**, onunla toplandığında **0** veren sayıdır ve yalnızca **işareti değiştirilerek** bulunur.

3/7'nin tersi **−3/7** · (−9/2)'nin tersi **9/2** · (−10/19)'un tersi **10/19**

ÖRNEK **Özellikler işlemi kısaltır.**

(−3/7) + 5/9 + 3/7 + 4/9 = ?

Birbirini götürecek ve kolay toplanacak sayıları yan yana getirelim (**değişme**):
= [(−3/7) + 3/7] + [5/9 + 4/9] (**birleşme**)
= 0 + 9/9 (**ters eleman**)
= 0 + 1 = **1** (**etkisiz eleman**)

Sırayla toplasaydık dört ayrı payda eşitlemesi gerekirdi; özelliklerle hiç payda eşitlemeden bitti.

Rasyonel Sayılarla Çıkarma İşlemi

Paydaları eşit olan rasyonel sayılarda çıkarma yapılırken **payların farkı** sonucun payına, **ortak payda** ise sonucun paydasına yazılır.

Ayrıca tam sayılarda olduğu gibi çıkarma işlemi **toplama işlemine dönüştürülerek** yapılabilir; bu işlemleri daha pratik ve anlaşılır hâle getirir:

a − b = a + (−b)

ÖRNEK

−7/10 − 8/10 = ?
Çıkarmayı toplamaya çevirelim:
= (−7/10) + (−8/10) = ((−7) + (−8))/10 = −15/10 = **−3/2**

3/2 − (−1/6) = ?
Çıkan (−1/6), tersi (+1/6):
= 3/2 + 1/6 → ortak payda 6 → 9/6 + 1/6 = 10/6 = **5/3**

(−2/3) − (−1/5) = ?
= (−2/3) + (1/5) → ortak payda 15
= (−10/15) + (3/15) = ((−10) + 3)/15 = **−7/15**

15/18 − (−1/12) = ?
= 15/18 + 1/12 → ortak payda 36 → 30/36 + 3/36 = 33/36 = **11/12**

NOT

Çıkarma işleminin özellikleri YOKTUR.

Rasyonel sayılarla çıkarma işleminin **değişme, birleşme, etkisiz eleman ve ters eleman** özellikleri **yoktur**.

Örneğin değişme özelliği olsaydı 3/4 − 1/4 ile 1/4 − 3/4 eşit olurdu; oysa birincisi **1/2**, ikincisi **−1/2**'dir.

Bu yüzden çıkarmayı **toplamaya çevirmek** yalnızca bir kolaylık değil, özelliklerden yararlanabilmenin de tek yoludur.

Rasyonel Sayılarla Çarpma İşlemi

Rasyonel sayılarla çarpma işlemi yapılırken **paylardaki sayıların çarpımı** sonucun payı olarak, **paydalardaki sayıların çarpımı** ise sonucun paydası olarak yazılır.

Çarpımın **işareti** ise tam sayılarda olduğu gibi çarpanların işaretlerine göre belirlenir: işaretler **aynıysa pozitif**, **farklıysa negatif**.

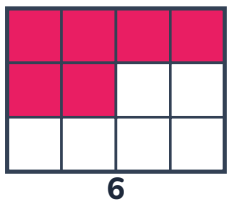
Önemli: Çarpmada **payda eşitlenmez!** Bu, toplama ve çıkarmaya özgü bir adımdır.

ÖRNEK

−3/5 · 4/7 = ?
Paylar: (−3) · 4 = −12 · Paydalar: 5 · 7 = 35
= **−12/35**

(−1/8) · (−9/2) = ?
İşaretler aynı → sonuç pozitif
Paylar: (−1) · (−9) = 9 · Paydalar: 8 · 2 = 16
= **9/16**

Tam sayılı kesirler önce bileşik kesre çevrilir:
(−2⅐) · (−1/11) = (−15/7) · (−1/11) =
((−15)·(−1))/(7·11) = **15/77**



6/12

2/3 · 3/4 çarpımının alan modeli. Bir dikdörtgen 3 satır ve 4 sütuna, yani 12 eş parçaya bölünmüştür. Taranan 6 parça çarpımın sonucunu, yani 6/12 = 1/2 değerini gösterir.

Çarpmanın alan modeli. 2/3 · 3/4 işlemini bir dikdörtgen üzerinde düşünelim.

Dikdörtgen önce **3 satıra** (birinci payda), sonra **4 sütuna** (ikinci payda) bölünür; toplam **3 · 4 = 12** eş parça oluşur. İşte bu, sonucun **paydasıdır**.

Satırların 2'si ile sütunların 3'ünün kesiştiği bölge **2 · 3 = 6** parçadan oluşur. İşte bu da sonucun **payıdır**.

Yukarıdaki görselde 12 eş parçanın **6'sı** taralıdır:
2/3 · 3/4 = 6/12 = **1/2**

Model, "neden paylar payla, paydalar paydayla çarpılıyor?" sorusunun cevabıdır: paydalar **parça sayısını**, paylar **seçilen parça sayısını** üretir.

Sadeleştirme iki yerde yapılabilir:

1. yol: Önce çarpılır, sonra sonuç sadeleştirilir.
2. yol: Çarpma sırasında **paylar ile paydalar arasında** uygun sadeleştirme yapılır.

İkinci yol daha az hata riski taşır; çünkü sayılar küçük kalır.

ÖRNEK **2/10 · (−5)/4 = ?**

1. çözüm (önce çarp):
= (2 · (−5))/(10 · 4) = −10/40 = **−1/4**

2. çözüm (çapraz sadeleştir):
2 ile 4 → 1 ve 2 · (−5) ile 10 → (−1) ve 2
= (1 · (−1))/(2 · 2) = **−1/4** ✓

Bir örnek daha — **(−9/14) · (7/6):**
9 ile 6 → 3 ve 2 · 7 ile 14 → 1 ve 2
= ((−3) · 1)/(2 · 2) = **−3/4**

"...in ...i" ifadeleri çarpma ile hesaplanır.

"a sayısının b'si" demek **a · b** demektir.

- **7/4'ün 8/21'i:** 7/4 · 8/21 → sadeleştir (7 ile 21 → 1 ve 3; 8 ile 4 → 2 ve 1) → (1 · 2)/(1 · 3) = **2/3**
- **1⅛'in 3/5'i:** 15/8 · 3/5 → (15 ile 5 → 3 ve 1) → (3 · 3)/(8 · 1) = **9/8**
- **9/20'nin 8/15'i:** 9/20 · 8/15 → (9 ile 15 → 3 ve 5; 8 ile 20 → 2 ve 5) → (3 · 2)/(5 · 5) = **6/25**

Ondalık gösterimli çarpmalarda da sayılar önce rasyonel sayıya çevrilir:
0,3 · 0,5 = 3/10 · 5/10 = 15/100 = **3/20**

NOT **Sık yapılan hata:** Çarpmada **paydaları eşitlemek**.
2/3 · 3/4 işleminde "ortak payda 12" diye başlamak yanlıştır. Payda eşitleme yalnızca **toplama ve çıkarmaya** aittir.

Çarpmada doğrudan paylar payla, paydalar paydayla çarpılır: (2 · 3)/(3 · 4) = 6/12 = 1/2 ✓

Çarpma İşleminin Özellikleri

Özellik	Ne Söyler?	Örnek
Değişme	Çarpanların yer değiştirmesi sonucu değiştirmez	$(-6/7) \cdot (-4/5) = (-4/5) \cdot (-6/7)$
Birleşme	İkiden fazla çarpanda herhangi ikisinin önce çarpılması sonucu değiştirmez	$[(-1/8) \cdot 5/2] \cdot (-3/4) = (-1/8) \cdot [5/2 \cdot (-3/4)]$
Etkisiz eleman	Bir rasyonel sayının **1** ile çarpımı kendisine eşittir	$(-13/6) \cdot 1 = -13/6$
Yutan eleman	Bir rasyonel sayının **0** ile çarpımı 0'a eşittir	$11/14 \cdot 0 = 0$
Ters eleman	Çarpımları **1** olan iki rasyonel sayı birbirinin tersidir	$(-3/10) \cdot (-10/3) = 1$
Dağılma	Çarpma, toplama ve çıkarma üzerine dağılır	$(-2/7) \cdot [5/12 + 3/8] = (-2/7) \cdot 5/12 + (-2/7) \cdot 3/8$

Bir rasyonel sayının **çarpma işlemine göre tersi**, onunla çarpıldığında **1** veren sayıdır ve **payı ile paydası yer değiştirilerek** bulunur. İşaret aynen korunur.

3/5'in tersi **5/3** · (−8/7)'nin tersi **−7/8** · 4'ün tersi **1/4**

Dikkat: 0'ın herhangi bir sayı ile çarpımı 1'e eşit olamayacağı için **0 sayısının çarpma işlemine göre tersi yoktur**.

ÖRNEK **Dağılma özelliği:**

$(-3/2) \cdot [5/3 + 2/9]$ işlemini iki yoldan yapalım.

1. yol — önce parantez içi:
$5/3 + 2/9 = 15/9 + 2/9 = 17/9$
$(-3/2) \cdot (17/9) \rightarrow$ 3 ile 9 sadeleşir (1 ve 3) $\rightarrow (-1 \cdot 17)/(2 \cdot 3) =$ **−17/6**

2. yol — dağıt:
$(-3/2) \cdot (5/3) + (-3/2) \cdot (2/9)$
$= (-5/2) + (-1/3)$ (sadeleştirmelerle)
$= (-15/6) + (-2/6) =$ **−17/6** ✓

İki yol da aynı sonucu verdi.

ÖRNEK **İki tersi birlikte kullanmak.**

Toplama işlemine göre tersi 8/7 olan sayının çarpma işlemine göre tersi kaçtır?
Toplama işlemine göre tersi 8/7 olan sayı: **−8/7**
(−8/7)'nin çarpma işlemine göre tersi: **−7/8**

3/5'in toplama işlemine göre tersi ile çarpma işlemine göre tersinin toplamı kaçtır?
Toplama işlemine göre tersi: **−3/5**
Çarpma işlemine göre tersi: **5/3**
Toplam: (−3/5) + (5/3) → ortak payda 15 → (−9/15) + (25/15) = **16/15**



Rasyonel sayılarla işlem yaparken izlenecek yolu gösteren akış şeması. Önce tam sayılı kesirler bileşik kesre çevrilir; toplama ve çıkarmada paydalar eşitlenir, çarpmada eşitlenmez; çıkarma toplamaya dönüştürülür ve sonuç en sade hâline getirilir.

NOT **İki tersi karıştırma:**
- **Toplama işlemine göre tersi** → **işaret** değişir: 3/5 → −3/5 (toplamları **0**)
- **Çarpma işlemine göre tersi** → **pay ve payda** yer değiştirir: 3/5 → 5/3 (çarpımları **1**)

Hangisinin istendiğini anlamak için sonuca bak: **sıfır** isteniyorsa toplama tersi, **bir** isteniyorsa çarpma tersidir.

Etkinlikler

ETKİNLİK 1 **Aşağıdaki ifadelerden doğru olanların yanına "D", yanlış olanların yanına "Y" yazınız.**

a) D Rasyonel sayılarla toplama yapılırken paydalar eşit değilse eşitlenir.

b) Y Rasyonel sayılarla çarpma yapılırken de paydalar eşitlenir.

c) D Negatif rasyonel sayılarda eksi işareti paya dâhildir.

d) D −1½ sayısı −3/2'ye eşittir.

e) Y −1½ sayısı −1 + ½ biçiminde yazılabilir.

f) Y Rasyonel sayılarla çıkarma işleminin değişme özelliği vardır.

g) D Çarpma işleminin toplama üzerine dağılma özelliği vardır.

devamı →

ETKİNLİK 1 **Aşağıdaki ifadelerden doğru olanların yanına "D", yanlış olanların yanına "Y" yazınız.** (devam)

h) D Toplama işleminin etkisiz elemanı 0, çarpma işleminin etkisiz elemanı 1'dir.

ı) Y 3/5'in çarpma işlemine göre tersi −3/5'tir.

i) D Çarpımları 1 olan iki rasyonel sayı birbirinin çarpma işlemine göre tersidir.

j) D 0 sayısının çarpma işlemine göre tersi yoktur.

k) Y "a'nın b'si" ifadesi a + b işlemiyle hesaplanır.

ETKİNLİK 2 **Aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri doldurunuz.**

Rasyonel Sayı	Toplama İşlemine Göre Tersi	Çarpma İşlemine Göre Tersi	İki Tersin Toplamı
2/3	**−2/3**	**3/2**	**−4/6 + 9/6 = 5/6**
−5/4	**5/4**	**−4/5**	**25/20 − 16/20 = 9/20**
7	**−7**	**1/7**	**−49/7 + 1/7 = −48/7**
−1/6	**1/6**	**−6**	**1/6 − 36/6 = −35/6**
3/10	**−3/10**	**10/3**	**−9/30 + 100/30 = 91/30**
0	**0**	**Yoktur**	**Hesaplanamaz**

ETKİNLİK 3 **Aşağıdaki toplama ve çıkarma işlemlerini yapıp sonuçları en sade hâliyle yazınız.**

a) 3/7 + 9/14 **Ortak payda 14 → 6/14 + 9/14 = 15/14**

b) (−5/4) + (−1/4) **((−5) + (−1))/4 = −6/4 = −3/2**

c) 5/12 + (−3/4) **Ortak payda 12 → 5/12 + (−9/12) = −4/12 = −1/3**

d) (−7/20) + 7/10 **Ortak payda 20 → (−7/20) + 14/20 = 7/20**

e) 3/8 − 5/8 **(3 − 5)/8 = −2/8 = −1/4**

f) 13/14 − 3/7 **Ortak payda 14 → 13/14 − 6/14 = 7/14 = 1/2**

g) 11/6 − (−5/9) **= 11/6 + 5/9 → ortak payda 18 → 33/18 + 10/18 = 43/18**

h) (−17/18) − (−5/9) **= (−17/18) + 10/18 = (−17 + 10)/18 = −7/18**

ı) 1⅛ + ½ **9/8 + 4/8 = 13/8**

i) (−1½) + (−1⅜) **(−3/2) + (−11/8) → ortak payda 8 → (−12/8) + (−11/8) = −23/8**

ETKİNLİK 4 **Aşağıdaki çarpma işlemlerini sadeleştirerek yapınız ve sonuçları en sade hâliyle yazınız.**

a) 1/2 · 1/3 **(1 · 1)/(2 · 3) = 1/6**

b) (−3/4) · (1/5) **((−3) · 1)/(4 · 5) = −3/20**

c) 16/5 · 15/8 **16 ile 8 → 2 ve 1; 15 ile 5 → 3 ve 1 → (2 · 3)/(1 · 1) = 6**

d) (−7/2) · (−1/6) **İşaretler aynı → pozitif → (7 · 1)/(2 · 6) = 7/12**

e) 1⅔ · (−9/2) **(5/3) · (−9/2) → 9 ile 3 → 3 ve 1 → (5 · (−3))/(1 · 2) = −15/2**

f) 4 · (−3/8) **4 ile 8 → 1 ve 2 → (1 · (−3))/(1 · 2) = −3/2**

g) 0,3 · 0,5 **3/10 · 5/10 = 15/100 = 3/20**

h) (−0,2) · (−1,4) **(−2/10) · (−14/10) = 28/100 = 7/25**

ı) 7/4'ün 8/21'i kaçtır? **7/4 · 8/21 → 7 ile 21 → 1 ve 3; 8 ile 4 → 2 ve 1 → (1 · 2)/(1 · 3) = 2/3**

i) 9/20'nin 8/15'i kaçtır? **9/20 · 8/15 → 9 ile 15 → 3 ve 5; 8 ile 20 → 2 ve 5 → (3 · 2)/(5 · 5) = 6/25**

ETKİNLİK 5 **Aşağıdaki eşitliklerde sembollere karşılık gelen rasyonel sayıları bulup kullanılan özelliği yazınız.**

a) (−3/7) + 0 = ♦ **♦ = −3/7 — Etkisiz eleman özelliği**

b) (−9/2) + ▲ = 0 **▲ = 9/2 — Ters eleman özelliği (toplama)**

c) 5/6 + (−1/3) = ★ + 5/6 **★ = −1/3 — Değişme özelliği**

d) 8/5 · ★ = 1 **★ = 5/8 — Ters eleman özelliği (çarpma)**

e) 11/4 · ■ = 0 **■ = 0 — Yutan eleman özelliği**

f) 3/2 · [5/3 − 2/9] = 3/2 · 5/3 − 3/2 · ♦ **♦ = 2/9 — Dağılma özelliği**

g) [1/7 · (3/14)] · 3/7 = 1/7 · [■ · 3/7] **■ = 3/14 — Birleşme özelliği**

h) Toplama işlemine göre tersi 6/5 olan sayının çarpma işlemine göre tersi kaçtır?
Toplama tersi 6/5 olan sayı −6/5'tir; onun çarpma tersi −5/6'dır.

Konu Özeti

ÖZET Rasyonel sayılarla **toplama ve çıkarmada paydalar eşitlenir**, paylar **işaretleriyle birlikte** toplanır; negatif sayılarda eksi **paya** dâhildir ve tam sayılı kesirlerde **sayının tamamına** aittir (−1½ = −3/2). **Çıkarma**, çıkanın ters işaretlisi eklenerek toplamaya çevrilir; çıkarmanın **hiçbir özelliği yoktur**. **Çarpmada payda EŞİTLENMEZ**; paylar payla, paydalar paydayla çarpılır ve işaret tam sayılardaki kuralla belirlenir. Tam sayılı kesirler önce **bileşik kesre** çevrilir, sadeleştirme çarpma **sırasında** yapılırsa sayılar küçük kalır. "**...in ...i**" ifadeleri çarpma demektir. Toplamanın **dört**, çarpmanın **altı** özelliği vardır; toplamada etkisiz eleman **0**, çarpmada **1**'dir. Son olarak iki tersi karıştırma: toplama tersinde **işaret** değişir (toplamları 0), çarpma tersinde **pay ve payda** yer değiştirir (çarpımları 1) — ve **0'ın çarpma tersi yoktur**.