ÇÖZÜMLER

Tam Sayıların ve Rasyonel Sayıların Kuvveti, Rasyonel Sayılarla Bölme

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge **CC BY-NC 4.0** lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabilir.

1. Bölüm Soru 1–5

1 Aşağıdaki üslü ifadelerin değerlerini bulunuz.

a) $(-4)^3$
b) -4^3
c) $(-4)^2$
d) -4^2 değerini bulup (c) ile karşılaştırınız. Parantez hangi durumda sonucu değiştirir?

a) $(-4)^3$
Eksi **parantez içindedir**; taban **−4**'tür.
$(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$
İşaret: negatif taban, üs **tek** → **negatif**
Değer: $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$
= −64

b) -4^3
Eksi **parantez dışındadır**; üs yalnızca 4'e aittir.
$-4^3 = -(4 \cdot 4 \cdot 4) = -(64)$
= −64

İki sonuç AYNI çıktı!

c) $(-4)^2$
$(-4)^2 = (-4) \cdot (-4)$
İşaret: negatif taban, üs **çift** → **pozitif**
= 16

d) -4^2 ve karşılaştırma
$-4^2 = -(4 \cdot 4) =$ **−16**

Şimdi iki çifti yan yana koyalım:
Üs tek (3): $(-4)^3 = -64$ ve $-4^3 = -64$ → **EŞİT**
Üs çift (2): $(-4)^2 = 16$ ama $-4^2 = -16$ → **FARKLI**

Sonuç: Parantez, üs ÇİFT olduğunda sonucu değiştirir; üs TEK olduğunda değiştirmez.

Sebebi: Üs tek olduğunda $(-4)^3$ zaten negatif çıkar; başa konan eksi de aynı şeyi yapar. Üs çift olduğunda ise $(-4)^2$ pozitif çıkarken baştaki eksi sonucu negatife çevirir.

Yine de kural şudur: Bu "aynı çıkma" durumu bir rastlantıdır; her ifadede önce **eksinin nerede olduğuna** bakmak gerekir.

a) −64 b) −64 c) 16 d) −16; parantez yalnız ÇİFT üste fark eder

2 Aşağıdaki üslü ifadeler veriliyor.

I. $(-5)^4$
II. -5^4
III. $(-7)^3$
IV. $(-1)^0$
V. -3^0
VI. $(-2/3)^6$

Bu ifadeleri değeri pozitif olanlar ve değeri negatif olanlar diye ikiye ayırıp her birinin sebebini yazınız.

Her ifadeyi tek tek inceleyelim.

I. $(-5)^4$
Eksi parantez içinde → taban −5. Üs **4, yani çift**.
Negatif taban + çift üs → **POZİTİF** (değeri 625)

II. -5^4
Eksi parantez dışında → üs yalnız 5'e ait.
$-5^4 = -(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) = -625$ → **NEGATİF**

III. $(-7)^3$
Eksi parantez içinde → taban −7. Üs **3, yani tek**.
Negatif taban + tek üs → **NEGATİF** (değeri −343)

IV. $(-1)^0$
Sıfır hariç her sayının 0. kuvveti 1'dir.
$(-1)^0 = 1$ → **POZİTİF**

V. -3^0
Eksi parantez dışında; önce üslü ifade hesaplanır: $3^0 = 1$
$-3^0 = -(1) = -1$ → **NEGATİF**

VI. $(-2/3)^6$
Negatif rasyonel taban, üs **6, yani çift**.
Rasyonel sayılarda da işaret kuralı aynıdır → **POZİTİF** (değeri 64/729)

Sınıflandırma
Pozitif olanlar: I, IV, VI
Negatif olanlar: II, III, V

Dikkat çeken ikili: IV ve V. İkisi de sıfırıncı kuvvet içeriyor ama sonuçları zıt. Sebep yine parantez: IV'te eksi tabanın parçası, V'te ise ifadenin başında duran ayrı bir işaret.

Kontrol listesi:
1. Eksi parantez içinde mi dışında mı?
2. Taban negatifse üs tek mi çift mi?
3. Üs 0 mı? (Sıfır hariç her sayı için sonuç 1)

Pozitif: I, IV, VI · Negatif: II, III, V

3 Ayşe, -6^2 ifadesinin değerini şöyle bulmuştur:

> 1. adım: Burada taban −6'dır.
> 2. adım: $-6^2 = (-6) \cdot (-6)$
> 3. adım: İşaretler aynı olduğundan sonuç pozitiftir.
> 4. adım: Sonuç **36**'dır.

a) Ayşe hangi adımda hata yapmıştır?
b) İfadenin doğru değerini bulunuz.
c) $(-6)^2$ ifadesinin değeri kaçtır?
d) Bu iki ifade hangi durumda eşit değer alır? Bir örnekle gösteriniz.

a) Hata 1. adımdadır.

-6^2 ifadesinde eksi işareti **parantez dışındadır**. Bu durumda taban **−6 değil, 6**'dır; üs yalnızca **6**'ya aittir.

Ayşe tabanı yanlış belirlediği için 2., 3. ve 4. adımların hepsi bu hatanın üzerine kurulmuştur.

b) Doğru değer

Eksi işareti, üslü ifadenin **tamamının önünde** duran bir işarettir. Önce üslü ifade hesaplanır, sonra başına eksi konur:

$-6^2 = -(6^2) = -(6 \cdot 6) =$ **−36**

Okunuşu da bunu söyler: "altının karesinin eksisi". Ayşe'nin okuduğu ise "eksi altının karesi"dir; bu farklı bir ifadedir.

c) $(-6)^2$ ifadesinin değeri

Burada eksi **parantez içindedir**; taban gerçekten **−6**'dır.

$(-6)^2 = (-6) \cdot (-6)$
İşaretler aynı → sonuç pozitif
= 36

Ayşe'nin bulduğu 36 sayısı, aslında bu ifadenin cevabıdır. Yani Ayşe **başka bir sorunun** doğru cevabını vermiştir.

d) İki ifade ne zaman eşit olur?

Üs TEK olduğunda iki ifade eşit değer alır.

Örnek — üs 3 alalım:
$(-6)^3 = (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) =$ **−216**
$-6^3 = -(6 \cdot 6 \cdot 6) = -(216) =$ **−216**
İkisi de **−216** ✓ EŞİT

Örnek — üs 2 (çift) alalım:
$(-6)^2 =$ **36** · $-6^2 =$ **−36** → FARKLI

devamı →

3 *(çözümün devamı)*

Sebebi: Üs tek olduğunda negatif tabanın kuvveti zaten negatif çıkar; baştaki eksi de aynı sonucu üretir. Üs çift olduğunda ise parantez içi pozitife dönerken baştaki eksi sonucu negatif yapar.

Güvenli alışkanlık: Her üslü ifadeye bakarken önce "eksi parantezin içinde mi?" sorusunu sor. Cevap hayırsa, üssü yalnızca yanındaki sayıya uygula.

a) 1. adım; taban 6'dır b) −36 c) 36 d) Üs tek olduğunda eşit olurlar: $(-6)^3 = -6^3 = -216$

4 Aşağıdaki üslü ifadelerin değerlerini bulunuz.

a) $(-2/3)^4$
b) $(1⅕)^3$
c) $(-0{,}5)^3$
d) (a) ve (c) şıklarında bulduğunuz değerlerin çarpımını hesaplayınız.

a) $(-2/3)^4$
İşaret: negatif taban, üs **çift** → **pozitif**
Pay: $2^4 = 16$ · Payda: $3^4 = 81$
= 16/81

b) $(1⅕)^3$
Önce bileşik kesre çevirelim:
$1⅕ = (1 \cdot 5 + 1)/5 =$ **6/5**
$(6/5)^3$
Pay: $6^3 = 216$ · Payda: $5^3 = 125$
= 216/125
Tam sayılı kesir olarak: 216 : 125 = 1 tam, kalan 91 → **1 tam 91/125**

c) $(-0{,}5)^3$
Önce kesre çevirip sadeleştirelim:
$-0{,}5 = -5/10 =$ **−1/2**
$(-1/2)^3$
İşaret: negatif taban, üs **tek** → **negatif**
Pay: $1^3 = 1$ · Payda: $2^3 = 8$
= −1/8

d) İki değerin çarpımı
(a) sonucu **16/81**, (c) sonucu **−1/8**'dir.
$(16/81) \cdot (-1/8)$
İşaretler farklı → sonuç **negatif**

devamı →

4 *(çözümün devamı)*

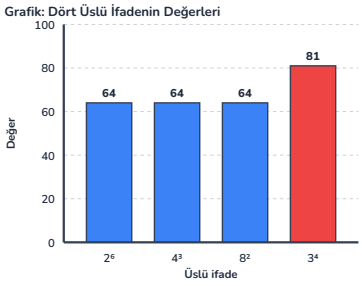
Sadeleştirelim: **16** ile **8** → 2 ve 1
= (2 · (−1))/(81 · 1) = **−2/81**

Kontrol: 16/81 ≈ 0,198 ve −1/8 = −0,125 → çarpım ≈ −0,0247
−2/81 ≈ −0,0247 ✓

Not: Sadeleştirmeyi çarpmadan **önce** yaptığımız için 16 · 1 = 16 ve 81 · 8 = 648 gibi büyük sayılarla uğraşmadık. (−16/648 sonucu da sadeleştirilince −2/81 verirdi.)

a) 16/81 b) 216/125 c) −1/8 d) −2/81

5 Aşağıdaki grafikte dört üslü ifadenin değerleri gösterilmiştir.



a) Dört ifadenin değerlerini tek tek hesaplayınız.
b) Hangi ifadeler birbirine eşittir?
c) En büyük değerli ifade hangisidir?
d) Bu grafik, üslü ifadeler hakkında hangi önemli bilgiyi göstermektedir?

a) Değerleri hesaplayalım

2^6 = 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 2
Adım adım: 2 · 2 = 4 → 4 · 2 = 8 → 8 · 2 = 16 → 16 · 2 = 32 → 32 · 2 = **64**

4^3 = 4 · 4 · 4 = 16 · 4 = **64**

8^2 = 8 · 8 = **64**

3^4 = 3 · 3 · 3 · 3 = 9 · 9 = **81**

b) Birbirine eşit olanlar

$2^6 = 4^3 = 8^2 = 64$

Üç ifadenin de tabanı ve üssü farklı olduğu hâlde değerleri **tamamen aynıdır**. Grafikte bu üç sütunun yükseklikleri de birebir eşittir.

Neden eşit çıktılar? Çünkü üçü de aslında **aynı tekrarlı çarpımdır**, sadece farklı gruplanmıştır:
2^6 = **2·2·2·2·2·2**
4^3 = (2·2)·(2·2)·(2·2) = **2·2·2·2·2·2**
8^2 = (2·2·2)·(2·2·2) = **2·2·2·2·2·2**
Üçünde de **altı tane 2** çarpılıyor.

c) En büyük değer

$3^4 = 81$ en büyüktür.

Diğer üçünün değeri 64'tür; 81 > 64 olduğundan 3^4 öne geçer.

Sıralama: $3^4 > 2^6 = 4^3 = 8^2$

devamı →

5 *(çözümün devamı)*

d) Grafiğin gösterdiği önemli bilgi

Bu grafik iki önemli şeyi birden gösteriyor:

1. Farklı taban ve üslere sahip ifadeler aynı değeri verebilir. 2^6, 4^3 ve 8^2 bakınca birbirinden çok farklı görünür, ama üçü de 64'tür. Demek ki üslü ifadeleri karşılaştırırken **görünüşlerine güvenilemez**.

2. Ne taban ne de üs tek başına belirleyicidir.

- **8^2**'nin tabanı en büyük (8) ama değeri en büyük değil.
- **2^6**'nın üssü en büyük (6) ama değeri yine en büyük değil.
- Kazanan **3^4**, ne en büyük tabana ne de en büyük üsse sahip; ikisinin **dengeli birleşimi** onu öne çıkarıyor.

Sonuç: Tabanlar ve üsler **ikisi birden** farklıysa karşılaştırma için tek güvenilir yol, ifadelerin **değerlerini hesaplamaktır**. Kısa yol aramak yanlış sonuca götürür.

a) 64, 64, 64, 81 b) $2^6 = 4^3 = 8^2 = 64$ c) $3^4 = 81$ d) Farklı yazılışlar aynı değeri verebilir; karşılaştırmada değerler hesaplanmalıdır

2. Bölüm Soru 6–10

6 Aşağıdaki bölme işlemlerini yapınız.

a) (3/5) : (9/10) işlemini iki farklı yolla yapınız.
b) (−7/12) : (−14/9)
c) 2,4 : (−0,6)
d) (a), (b) ve (c) sonuçlarının toplamını bulunuz.

a) 1. yol — ortak payda algoritması

(3/5) : (9/10)
Paydalar 5 ve 10; ortak payda **10**.
3/5 → pay ve payda 2 ile çarpılır → **6/10**
9/10 → zaten uygun

= (6/10) : (9/10) = 6 : 9 = 6/9
Sadeleştirelim (ikisi de 3'e bölünür):
= 2/3

a) 2. yol — ters çevir çarp

Bölünen aynen, bölen ters çevrilir:
= (3/5) · (10/9)
Sadeleştirelim: **3** ile **9** → 1 ve 3; **10** ile **5** → 2 ve 1
= (1 · 2)/(1 · 3) = **2/3** ✓

İki yol da aynı sonucu verdi.

b) (−7/12) : (−14/9)

devamı →

6 *(çözümün devamı)*

Ters çevir çarp:
= (−7/12) · (−9/14)
İşaretler aynı → sonuç **pozitif**
Sadeleştirelim: **7** ile **14** → 1 ve 2; **9** ile **12** → 3 ve 4
= (1 · 3)/(4 · 2) = **3/8**

c) 2,4 : (−0,6)

Ondalık gösterimleri kesre çevirelim:
2,4 = 24/10 · −0,6 = −6/10
= (24/10) · (−10/6)
İşaretler farklı → sonuç **negatif**
Sadeleştirelim: 10 ile 10 → 1 ve 1; 24 ile 6 → 4 ve 1
= **−4**

Pratik yol: Bölen ve bölünende virgül aynı sayıda kaydırılırsa sonuç değişmez: 2,4 : (−0,6) → 24 : (−6) = −4 ✓

d) Üç sonucun toplamı

2/3 + 3/8 + (−4)

Paydalar 3, 8 ve 1; ortak payda **24**:
2/3 = **16/24** · 3/8 = **9/24** · −4 = **−96/24**
= (16 + 9 + (−96))/24
= (25 − 96)/24
= −71/24

Tam sayılı kesir olarak: 71 : 24 = 2 tam, kalan 23 → **−2 tam 23/24**

Kontrol: 0,667 + 0,375 − 4 ≈ −2,958 ve −71/24 ≈ −2,958 ✓

a) 2/3 (iki yol da) b) 3/8 c) −4 d) −71/24

7 Bir öğrenci şöyle diyor:

"İki üslü ifadeden üssü büyük olan her zaman daha büyüktür."

a) Bu iddia doğru mudur? Bir karşıt örnek veriniz.
b) İddia hangi koşulda doğru olur?
c) Taban negatifse durum nasıl değişir? Örnekle gösteriniz.
d) Taban 1 olduğunda üs sonucu etkiler mi? Açıklayınız.

a) İddia YANLIŞTIR.

Karşıt örnek: 2^3 ile 3^2 ifadelerini alalım.

$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = \mathbf{8}$ (üs 3)
$3^2 = 3 \cdot 3 = \mathbf{9}$ (üs 2)

devamı →

7 *(çözümün devamı)*

Üssü büyük olan 2^3'tür, ama **8 < 9** olduğundan 2^3 daha **küçüktür**. İddia çürütüldü.

Sebebi: Bir üslü ifadenin değerini yalnızca üs değil, **taban ile üs birlikte** belirler. Tabanlar farklı olduğunda üsleri karşılaştırmak hiçbir şey söylemez.

b) İddianın doğru olduğu koşul

İddia, **tabanlar eşit** ve **taban 1'den büyük** olduğunda doğrudur.

Örnek: 7^5 ile 7^6
Tabanlar eşit (7) ve 7 > 1.
$7^6 = 7^5 \cdot 7$ olduğundan 7^6, 7^5'in **7 katıdır** → $\mathbf{7^6 > 7^5}$ ✓

Aynı şekilde $8^6 < 8^8$'dir; çünkü tabanlar eşittir ve üssü büyük olan daha büyüktür.

Not: Taban 1 ile 0 arasında bir rasyonel sayı olsaydı (örneğin 1/2) kural **tersine** dönerdi: $(1/2)^3 = 1/8$ iken $(1/2)^2 = 1/4$'tür; üssü büyük olan **küçük** çıkar. Bu yüzden "taban 1'den büyük" koşulu şarttır.

c) Taban negatifse

Taban negatif olduğunda üs, sayının **işaretini** de belirlediği için kural tamamen bozulur.

Örnek: $(-2)^2$ ile $(-2)^3$
$(-2)^2 =$ **4** (üs çift → pozitif)
$(-2)^3 =$ **−8** (üs tek → negatif)

Üssü büyük olan $(-2)^3$'tür, ama −8 < 4 olduğundan daha **küçüktür**.

İkinci örnek: $(-10)^6 > (-10)^7$
Birincisi pozitif, ikincisi negatiftir; pozitif bir sayı her zaman negatif bir sayıdan büyüktür.

Genel kural: Negatif tabanda **çift üslü ifade her zaman tek üslü ifadeden büyüktür** — üslerin kendi büyüklüğüne bakılmaksızın.

d) Taban 1 olduğunda

Üs sonucu HİÇ etkilemez.

1 sayısı kendisiyle kaç kez çarpılırsa çarpılsın sonuç yine 1'dir:
$1^2 = 1 \cdot 1 = 1$
$1^5 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$
$1^{100} = 1$
$1^0 = 1$

Yani $\mathbf{1^n = 1}$'dir; n ne olursa olsun.

Benzer bir durum 0 için de geçerlidir: n pozitif bir tam sayıysa $0^n = 0$'dır. (0^0 ise tanımsızdır.)

Özet: "Üssü büyük olan büyüktür" kuralı yalnızca **tabanlar eşit ve 1'den büyük** olduğunda geçerlidir. Taban negatifse, 1 ise, 0 ise ya da 0 ile 1 arasındaysa kural işlemez.

a) Yanlış; $2^3 = 8$ ama $3^2 = 9$ b) Tabanlar eşit ve taban 1'den büyükse c) Negatif tabanda çift üs her zaman büyüktür d) Etkilemez; $1^n = 1$

8 Mert, **(2/3) : (4/5)** işlemini şöyle yapmıştır:

> **1. adım: Bölme işleminde bir sayı ters çevrilir.**
> **2. adım: (2/3) : (4/5) = (3/2) · (4/5)**
> **3. adım: = 12/10**
> **4. adım: = 6/5**

a) Mert'in hatası nedir?
b) İşlemin doğru sonucunu bulunuz.
c) Cevabınızı çarpma ile kontrol ediniz.
d) Bölme sonuçlarını denetlemek için kullanılabilecek genel bir yöntem yazınız.

a) Hata: Yanlış sayıyı ters çevirmek.

Mert 2. adımda **bölüneni** (birinci sayıyı) ters çevirmiştir: 2/3 → 3/2.

Oysa ters çevir çarp algoritmasında:
• **Bölünen** (birinci sayı) **aynen yazılır**.
• **Bölen** (ikinci sayı) **ters çevrilip çarpılır**.

Mert tam tersini yapmış; bölüneni çevirip böleni olduğu gibi bırakmıştır.

b) Doğru çözüm

(2/3) : (4/5)
Bölünen aynen: **2/3**
Bölen ters çevrilir: 4/5 → **5/4**

= (2/3) · (5/4)
Sadeleştirelim: **2** ile **4** → 1 ve 2
= (1 · 5)/(3 · 2) = **5/6**

Mert'in bulduğu 6/5 ile doğru cevap 5/6 **birbirinin ters çevrilmişidir**. Bu, hatanın tam olarak nerede olduğunu da gösteriyor.

c) Çarpma ile kontrol

Bölme işleminin temel özelliği şudur:
Bölüm × Bölen = Bölünen

Bulduğumuz sonucu deneyelim:
(5/6) · (4/5) = ?
Sadeleştirelim: 5 ile 5 → 1 ve 1; 4 ile 6 → 2 ve 3
= (1 · 2)/(3 · 1) = **2/3** ✓

Bölünen sayıya ulaştık; cevabımız doğru.

Mert'in cevabını da deneyelim:
(6/5) · (4/5) = 24/25

24/25 ≠ 2/3 olduğundan Mert'in sonucu **yanlıştır** ✓

d) Genel kontrol yöntemi

devamı →

8 *(çözümün devamı)*

Yöntem 1 — Ters işlemle kontrol:
Bulduğun **bölümü bölenle çarp**. Sonuç **bölünene** eşit olmalıdır. Bu yöntem her bölme işleminde çalışır ve çok hızlıdır.

Yöntem 2 — Büyüklük tahmini:
Bölen **1'den küçükse** sonuç bölünenden **büyük** olmalıdır; bölen **1'den büyükse** sonuç bölünenden **küçük** olmalıdır.

Bu soruda bölen 4/5 < 1'dir. Öyleyse sonuç, bölünen olan 2/3'ten **büyük** çıkmalıdır.
Doğru cevap 5/6 ≈ 0,833; bölünen 2/3 ≈ 0,667 → gerçekten büyük ✓

Mert'in cevabı 6/5 = 1,2 de 2/3'ten büyüktür; bu yüzden ikinci yöntem tek başına Mert'in hatasını yakalayamazdı. Bu, **birinci yöntemin daha güvenilir** olduğunu gösterir.

a) Bölünen yerine böleni çevirmeliydi b) 5/6 c) (5/6)·(4/5) = 2/3 ✓ d) Bölüm × Bölen = Bölünen kontrolü

9 Aşağıdaki durumları inceleyiniz.

- Bir depoda **13½** litre su vardır ve bu su **3/4** litrelik şişelere doldurulacaktır.
- Bir markette **2,5** kg peynir **187,5** TL'dir.
- **12** metrelik bir kurdele **4/5** metrelik parçalara ayrılacaktır.

a) Depodaki suyla kaç şişe doldurulur?
b) 1 kg peynir kaç TL'dir?
c) Kurdeleden kaç parça elde edilir?
d) Kurdele 3/5 metrelik parçalara ayrılsaydı kaç parça olurdu? Sonucu (c) ile karşılaştırıp yorumlayınız.

a) Şişe sayısı

"13½ litrenin içinde kaç tane 3/4 litre var?" sorusu bir **bölme** işlemidir.

Önce tam sayılı kesri çevirelim: 13½ = (13 · 2 + 1)/2 = **27/2**

Şişe sayısı = (27/2) : (3/4)
Ters çevir çarp:
= (27/2) · (4/3)
Sadeleştirelim: **27** ile **3** → 9 ve 1; **4** ile **2** → 2 ve 1
= (9 · 2)/(1 · 1) = **18 şişe**

Kontrol: 18 · (3/4) = 54/4 = 13,5 ✓ Tam olarak depodaki su kadar.

b) 1 kg peynirin fiyatı

1 kg fiyatı = Toplam fiyat : Kütle
= 187,5 : 2,5

devamı →

9 *(çözümün devamı)*

Ondalık gösterimleri kesre çevirelim:
187,5 = 1875/10 · 2,5 = 25/10
= (1875/10) · (10/25)
Sadeleştirelim: 10 ile 10 → 1 ve 1; 1875 ile 25 → 75 ve 1
= **75 TL**

Pratik yol: Virgülleri aynı sayıda kaydıralım: 187,5 : 2,5 → 1875 : 25 = 75 ✓

Kontrol: 75 · 2,5 = 187,5 ✓

c) Kurdele parça sayısı

Parça sayısı = 12 : (4/5)
= 12 · (5/4)
Sadeleştirelim: 12 ile 4 → 3 ve 1
= 3 · 5 = **15 parça**

Kontrol: 15 · (4/5) = 60/5 = 12 ✓

d) 3/5 metrelik parçalar

Parça sayısı = 12 : (3/5)
= 12 · (5/3)
Sadeleştirelim: 12 ile 3 → 4 ve 1
= 4 · 5 = **20 parça**

Karşılaştırma ve yorum:

4/5 metrelik parçalarda **15** parça, 3/5 metrelik parçalarda **20** parça elde edildi. Kurdelenin uzunluğu değişmediği hâlde parça sayısı **arttı**.

Sebebi: 3/5 m < 4/5 m olduğundan her parça **daha kısadır**. Aynı uzunluktan daha kısa parçalar kesilirse doğal olarak **daha çok** parça çıkar.

Genel kural: Bölünen sabitken **bölen küçüldükçe bölüm büyür**. Bu, bölmenin en temel davranışlarından biridir ve bir cevabın makul olup olmadığını anlamak için kullanılabilir.

Ek gözlem: Bu yüzden bölen 1'den küçük olduğunda bölüm, bölünenden **büyük** çıkar. Burada 12 metrelik kurdeleden 15 ve 20 parça çıkması tam olarak bunun sonucudur.

a) 18 şişe b) 75 TL c) 15 parça d) 20 parça; bölen küçüldükçe bölüm büyür

10 Aşağıdaki bölme işlemleri veriliyor.

I. (−3/4) : (2/5)
II. (−1/2) : (−3/7)
III. 0 : (5/6)
IV. (5/6) : 0
V. (2/9) : (−4/3)
VI. 1 : (7/8)

Bu işlemleri sonucuna göre pozitif, negatif, sıfır ve tanımsız diye sınıflandırıp her birinin değerini (varsa) hesaplayınız.

Her işlemi tek tek inceleyelim.

I. (−3/4) : (2/5)
= (−3/4) · (5/2) = −15/8
İşaretler farklı → **NEGATİF** (değeri −15/8)

II. (−1/2) : (−3/7)
= (−1/2) · (−7/3) = 7/6
İşaretler aynı → **POZİTİF** (değeri 7/6)

III. 0 : (5/6)
= 0 · (6/5) = 0
→ **SIFIR**
Sıfırın, sıfır hariç bir rasyonel sayıya bölümü daima 0'dır.

IV. (5/6) : 0
Bölen sıfırdır → **TANIMSIZ**
"(5/6) : 0 = x" demek "0 · x = 5/6" olacak bir x aramak demektir. 0 ile çarpılan her sayı 0 verdiği için böyle bir x yoktur.

V. (2/9) : (−4/3)
= (2/9) · (−3/4)
Sadeleştirelim: 2 ile 4 → 1 ve 2; 3 ile 9 → 1 ve 3
= −1/6
İşaretler farklı → **NEGATİF** (değeri −1/6)

VI. 1 : (7/8)
= 1 · (8/7) = 8/7
→ **POZİTİF** (değeri 8/7)
Bu sonuç, 7/8 sayısının **çarpma işlemine göre tersidir**.

Sınıflandırma
Pozitif: II (7/6), VI (8/7)
Negatif: I (−15/8), V (−1/6)
Sıfır: III (0)
Tanımsız: IV

Dikkat edilecek iki nokta:

devamı →

10 *(çözümün devamı)*

1. III ile IV'ü karıştırmamak. Sıfır **bölünen** olduğunda sonuç 0'dır; sıfır **bölen** olduğunda işlem tanımsızdır. Sıfırın bölmedeki yeri her şeyi değiştirir.

2. İşaret kuralı bölmede de aynıdır. Çarpmada olduğu gibi: işaretler **aynıysa pozitif**, **farklıysa negatif**. Bölmeyi ters çevir çarpa dönüştürdüğümüz için bu şaşırtıcı değildir.

Pozitif: II (7/6), VI (8/7) · Negatif: I (−15/8), V (−1/6) · Sıfır: III · Tanımsız: IV

3. Bölüm Soru 11–15

11 Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

a) $(-2/3)^2 : (4/9)$
b) $(-1/2)^3 \cdot (-4)$
c) $(3/4)^2 : (-9/8)$
d) (a), (b) ve (c) sonuçlarının toplamını hesaplayınız.

a) $(-2/3)^2 : (4/9)$

1. adım — önce kuvveti hesapla. İşlem sırasında üslü ifadeler bölmeden önce gelir.
$(-2/3)^2 = (-2/3) \cdot (-2/3)$
İşaret: üs çift → pozitif
= **4/9**

2. adım — bölmeyi yap.
(4/9) : (4/9)
Ters çevir çarp:
= (4/9) · (9/4) = 36/36 = **1**

Bu beklenen bir sonuçtu: **Sıfırdan farklı bir sayının kendisine bölümü 1'dir.**

b) $(-1/2)^3 \cdot (-4)$

1. adım — kuvveti hesapla.
$(-1/2)^3 = (-1/2) \cdot (-1/2) \cdot (-1/2)$
İşaret: üs tek → negatif
Pay: $1^3 = 1$ · Payda: $2^3 = 8$
= **−1/8**

2. adım — çarpmayı yap.
$(-1/8) \cdot (-4) = (-1/8) \cdot (-4/1)$
İşaretler aynı → pozitif
Sadeleştirelim: 4 ile 8 → 1 ve 2
= **1/2**

c) $(3/4)^2 : (-9/8)$

1. adım — kuvveti hesapla.
$(3/4)^2 = 9/16$

devamı →

11 *(çözümün devamı)*

2. adım — bölmeyi yap.
(9/16) : (−9/8) = (9/16) · (−8/9)
İşaretler farklı → **negatif**
Sadeleştirelim: **9** ile **9** → 1 ve 1; **8** ile **16** → 1 ve 2
= (1 · (−1))/(2 · 1) = **−1/2**

d) Üç sonucun toplamı

Sonuçlarımız: **1**, **1/2** ve **−1/2**

1 + 1/2 + (−1/2)

Akıllı yol: **1/2** ile **−1/2** birbirinin **toplama işlemine göre tersidir**; toplamları 0'dır.
= 1 + [1/2 + (−1/2)]
= 1 + 0
= 1

Kontrol (payda eşitleyerek):
1 = 2/2 · 1/2 · −1/2
= (2 + 1 − 1)/2 = 2/2 = **1** ✓

İşlem sırası hatırlatması: Bu üç soruda da önce **üslü ifade**, sonra **çarpma/bölme**, en son **toplama** yapıldı. Sıra bozulursa sonuç da bozulur.

a) 1 b) 1/2 c) −1/2 d) 1

12 Bir öğrenci şöyle diyor:

"Bölme, çarpmaya çevrilebildiğine göre çarpmanın bütün özellikleri bölmede de geçerlidir."

a) Değişme özelliği için bir karşıt örnek veriniz.
b) Birleşme özelliği için bir karşıt örnek veriniz.
c) Etkisiz eleman özelliği bölmede neden yoktur?
d) Öğrencinin mantığı nerede kırılıyor? Açıklayınız.

Karar: İddia YANLIŞTIR. Rasyonel sayılarla bölme işleminin **hiçbir özelliği yoktur**.

a) Değişme özelliği için karşıt örnek

1/2 ve 1/4 sayılarını alalım.

(1/2) : (1/4) = (1/2) · (4/1) = 4/2 = **2**
(1/4) : (1/2) = (1/4) · (2/1) = 2/4 = **1/2**

2 ≠ 1/2 olduğundan **değişme özelliği yoktur**.

Üstelik iki sonuç birbirinin **çarpma tersidir**; bu bir rastlantı değildir: a : b ile b : a daima birbirinin tersi olur.

b) Birleşme özelliği için karşıt örnek

8, 4 ve 2 sayılarını alalım.

devamı →

12 *(çözümün devamı)*

Önce ilk ikisini bölelim:
(8 : 4) : 2 = 2 : 2 = **1**

Şimdi son ikisini önce bölelim:
8 : (4 : 2) = 8 : 2 = **4**

1 ≠ 4 olduğundan **birleşme özelliği yoktur**.

Bu, bölmede **parantezlerin yerinin** sonucu tamamen değiştirdiğini gösterir. Çarpmada ise (8 · 4) · 2 = 8 · (4 · 2) = 64 olurdu.

c) Etkisiz eleman neden yok?

Etkisiz eleman, bir işlemde sayıyı **hangi taraftan** uygulanırsa uygulansın değiştirmeyen elemandır. Yani **iki yönlü** çalışmalıdır.

Bölmede 1 sayısını deneyelim:
Sağdan: a : 1 = a ✓ (örnek: (3/5) : 1 = 3/5)
Soldan: 1 : a = 1/a × (örnek: 1 : (3/5) = 5/3 ≠ 3/5)

Bir yönde çalışıp diğer yönde çalışmadığı için 1 sayısı bölmenin **etkisiz elemanı değildir**. Başka hiçbir sayı da olamaz; çünkü a : x = a koşulu x = 1'i zorunlu kılar, ama o da soldan çalışmaz.

Karşılaştırma: Çarpmada 1 gerçekten etkisiz elemandır: a · 1 = 1 · a = a ✓ İki yönlü çalışır.

d) Mantık nerede kırılıyor?

Öğrencinin kullandığı doğru bilgi şudur: **a : b = a · (1/b)**

Yani bölme gerçekten de bir çarpmaya çevrilebilir. Ama buradaki kritik nokta şudur: **Çevrilen ifade artık aynı sayılarla yapılmıyor.**

Bölmede a ve b vardı; çarpmaya çevirince a ve **1/b** oldu. Yani **ikinci sayı değişti**. Özellikler ise sayıların **kendi aralarındaki** davranışını anlatır.

Somut olarak: Değişme özelliği a : b ile b : a'yı karşılaştırır. Bunları çarpmaya çevirelim:
a : b = a · (1/b)
b : a = b · (1/a)

Bunlar **farklı çarpımlardır**; birinde b tersleniyor, diğerinde a. Çarpmanın değişme özelliği a · (1/b) = (1/b) · a der — ki bu doğrudur — ama bu bize a : b = b : a demez.

Özet: Bölmeyi çarpmaya çevirmek bir **hesaplama kolaylığıdır**; özellikleri bölmeye **taşımaz**. Aynı durum çıkarma ve toplama arasında da vardır: çıkarma toplamaya çevrilir ama çıkarmanın da hiçbir özelliği yoktur.

a) (1/2):(1/4) = 2 ama (1/4):(1/2) = 1/2 b) (8:4):2 = 1 ama 8:(4:2) = 4 c) 1 yalnız sağdan çalışır d) Çarpmaya çevirince ikinci sayı değişir

13 Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a) $(0,\overline{6})^2$
b) $(-0,\overline{8})^3$
c) $(1,\overline{2})^2 : (0,\overline{4})$
d) $0,\overline{4}$ sayısının çarpma işlemine göre tersini bulup bunun $1 : 0,\overline{4}$ işlemiyle ilişkisini açıklayınız.

Hatırlatma: Devri virgülden hemen sonra başlayan ve tek basamaklı olan devirli ondalık gösterimler **9** paydalı kesre çevrilir. Tam kısmı olanlarda pay, "tüm sayı – tam kısım" biçiminde yazılır.

a) $(0,\overline{6})^2$

Önce kesre çevirelim:
$0,\overline{6} = 6/9 =$ **2/3** (sadeleştirdik)

$(2/3)^2 = (2 \cdot 2)/(3 \cdot 3) =$ **4/9**

Not: Sadeleştirmeden 6/9 ile devam etseydik $(6/9)^2 = 36/81$ çıkardı; sadeleştirince yine 4/9 olurdu. Önce sadeleştirmek daha kısa.

b) $(-0,\overline{8})^3$

Kesre çevirelim:
$-0,\overline{8} =$ **−8/9**

$(-8/9)^3$
İşaret: negatif taban, üs **tek** → **negatif**
Pay: $8^3 = 512$ · Payda: $9^3 = 729$
= −512/729

c) $(1,\overline{2})^2 : (0,\overline{4})$

1. adım — sayıları kesre çevir.
$1,\overline{2} = (12 - 1)/9 =$ **11/9**
$0,\overline{4} =$ **4/9**

2. adım — önce kuvveti hesapla.
$(11/9)^2 = 121/81$

3. adım — bölmeyi yap.
$(121/81) : (4/9) = (121/81) \cdot (9/4)$
Sadeleştirelim: **9** ile **81** → 1 ve 9
$= (121 \cdot 1)/(9 \cdot 4) =$ **121/36**

Tam sayılı kesir olarak: 121 : 36 = 3 tam, kalan 13 → **3 tam 13/36**

Kontrol: 1,222... ≈ 1,222 → karesi ≈ 1,494; 0,444... ≈ 0,444 → 1,494 : 0,444 ≈ 3,36
121/36 ≈ 3,361 ✓

d) $0,\overline{4}$ sayısının çarpma tersi

$0,\overline{4} =$ **4/9**

devamı →

13 *(çözümün devamı)*

Çarpma işlemine göre ters, pay ile paydanın yer değiştirmesiyle bulunur:
Tersi = 9/4

Kontrol: (4/9) · (9/4) = 36/36 = 1 ✓

1 : 0,$\overline{4}$ işlemiyle ilişkisi

Şimdi bölmeyi yapalım:
1 : (4/9) = 1 · (9/4) = **9/4**

İki sonuç **tamamen aynı** çıktı.

Bu bir rastlantı değildir. Konuda gördüğümüz kural tam olarak bunu söyler:
1 sayısının bir rasyonel sayıya bölümü, o sayının çarpma işlemine göre tersine eşittir.

Neden böyle? Ters çevir çarp algoritmasını uygulayalım:
1 : a = 1 · (1/a) = 1/a
1/a ifadesi ise zaten a sayısının çarpma tersidir.

Pratik faydası: Bir sayının çarpma tersini bulmak istediğinde, onu 1'e bölmek de aynı kapıya çıkar. Özellikle ondalık gösterimli sayılarda bu yol bazen daha kolaydır.

a) 4/9 b) −512/729 c) 121/36 d) Tersi 9/4; 1 : 0,4̄ işlemi de 9/4 verir — ikisi aynı şeydir

14 Bir öğrenci şöyle diyor:

"$(-1)^n$ ifadesinin değeri her zaman −1'dir; çünkü taban −1'dir."

a) Bu iddia doğru mudur? İki örnekle gösteriniz.
b) $(-1)^{2026}$ ve $(-1)^{2025}$ değerlerini bulunuz.
c) Taban 0 olduğunda üs sonucu nasıl etkiler?
d) Hangi tabanlarda üs sonucu hiç değiştirmez? Bulduklarınızı gerekçelendiriniz.

a) İddia YANLIŞTIR.

$(-1)^n$ ifadesinin değeri, n'nin **tek mi çift mi** olduğuna göre değişir.

Örnek 1 — n çift:
$(-1)^2 = (-1) \cdot (-1) =$ **+1**
$(-1)^4 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) =$ **+1**

Örnek 2 — n tek:
$(-1)^3 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) =$ **−1**
$(-1)^5 =$ **−1**

Demek ki değer **her zaman −1 değildir**; üs çift olduğunda **+1**'dir.

Genel kural:
$(-1)^n =$ **+1** (n çift ise)
$(-1)^n =$ **−1** (n tek ise)

devamı →

14 *(çözümün devamı)*

b) Büyük üsler

$(-1)^{2026}$

2026 sayısı **çifttir** (son rakamı 6, yani 2'ye bölünür).

→ **= +1**

$(-1)^{2025}$

2025 sayısı **tektir** (son rakamı 5).

→ **= −1**

Bu kadar büyük üsleri hesaplamak imkânsız görünse de işaret kuralı sayesinde sonuç tek bakışta bulunur. Bakılacak tek şey **üssün son rakamının çift mi tek mi** olduğudur.

c) Taban 0 olduğunda

0 sayısı kendisiyle kaç kez çarpılırsa çarpılsın sonuç yine 0'dır:
$0^1 = 0 \cdot 0^2 = 0 \cdot 0 = 0 \cdot 0^5 = 0$

Yani **n pozitif bir tam sayıysa $0^n = 0$**'dır; üs sonucu değiştirmez.

Ancak bir istisna vardır: 0^0 ifadesi **TANIMSIZDIR**.

Neden? İki kural burada çakışır:
• "Her sayının 0. kuvveti 1'dir" kuralı $0^0 = 1$ der.
• "0'ın her kuvveti 0'dır" kuralı $0^0 = 0$ der.
İki kural farklı sonuç verdiği için bu ifadeye bir değer atanmaz.

Zaten "sıfırıncı kuvvet" kuralı da "**sıfır hariç** her tam sayının 0. kuvveti 1'dir" diye öğrenilir; bu "sıfır hariç" ifadesi tam olarak bu yüzden vardır.

d) Üssün sonucu hiç değiştirmediği tabanlar

1. Taban 1:
$1^1 = 1 \cdot 1^2 = 1 \cdot 1 = 1 \cdot 1^{100} = 1 \cdot 1^0 = 1$
$1^n = 1$; n ne olursa olsun sonuç değişmez ✓
Gerekçe: 1 ile çarpmak hiçbir sayıyı değiştirmez (çarpmanın etkisiz elemanıdır). Kaç kez çarpılırsa çarpılsın 1 olarak kalır.

2. Taban 0 (n pozitif tam sayı iken):
$0^n = 0$ ✓
Gerekçe: 0, çarpmanın yutan elemanıdır; çarpıma giren her şeyi 0 yapar.
Ama: n = 0 durumu tanımsız olduğu için bu taban "tam olarak" kurala uymaz; bu yüzden en güvenli cevap **1**'dir.

Peki −1 neden listede yok?
$(-1)^n$ ifadesinin değeri n'ye göre +1 ve −1 arasında gidip gelir. Değer sadece iki seçenek arasında değişse bile **değişiyor** demektir; bu yüzden −1 bu listeye giremez.

Özet cevap: Üssün sonucu hiç değiştirmediği tek güvenli taban **1**'dir. 0 tabanı da pozitif üsler için sabit sonuç verir ama 0^0 tanımsız olduğundan tam bir istisna sayılmaz.

a) Yanlış; $(-1)^2 = 1$, $(-1)^3 = -1$ b) $(-1)^{2026} = 1$, $(-1)^{2025} = -1$ c) $0^n = 0$ (n pozitif); 0^0 tanımsız d) Yalnız taban 1

15 Aşağıdaki kartlar veriliyor.

Taban kartları: −2 · 1/2 · 3
Üs kartları: 0 · 2 · 3

Her taban kartı bir üs kartıyla eşleştirilerek üslü ifadeler kurulacaktır. Her kart **yalnızca bir kez** kullanılabilir.

a) Değeri en büyük olan tek bir ifade kurunuz ve değerini bulunuz.
b) Değeri negatif olan bir ifade kurunuz. Kaç farklı yolla kurulabilir?
c) Değeri 1 olan bir ifade kurunuz.
d) Üç kartı da birer kez kullanarak üç ifade kurup değerlerini büyükten küçüğe sıralayınız.

a) En büyük değerli ifade

Bir ifadenin değerini büyütmek için hem **taban** hem **üs** büyük olmalıdır. Kartlar arasında en büyük taban **3**, en büyük üs **3**'tür.

$\mathbf{3^3} = 3 \cdot 3 \cdot 3 = \mathbf{27}$

Diğer olasılıkları da kontrol edelim:
$3^2 = 9$ · $3^0 = 1$
$(-2)^3 = -8$ · $(-2)^2 = 4$ · $(-2)^0 = 1$
$(1/2)^3 = 1/8$ · $(1/2)^2 = 1/4$ · $(1/2)^0 = 1$

Dokuz olasılık içinde en büyüğü gerçekten $\mathbf{3^3 = 27}$'dir ✓

b) Değeri negatif olan ifade

Bir üslü ifadenin değerinin negatif olabilmesi için **taban negatif** ve **üs tek** olmalıdır.

Taban kartları arasında tek negatif olan **−2**'dir.
Üs kartları arasında tek olan yalnızca **3**'tür. (0 ve 2 çifttir; 0 zaten sonucu 1 yapar.)

$\mathbf{(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8}$

Kaç farklı yolla kurulabilir? Yalnızca 1 yolla.

Gerekçe: Negatif sonuç için taban zorunlu olarak −2, üs ise zorunlu olarak tek bir sayı olmalıdır. Elimizdeki tek tek üs 3'tür. Diğer eşleştirmeler pozitif verir:
$(-2)^2 = 4$ (üs çift → pozitif)
$(-2)^0 = 1$ (sıfırıncı kuvvet → 1)

c) Değeri 1 olan ifade

Üs kartı 0 kullanılırsa taban ne olursa olsun sonuç 1 çıkar (sıfır hariç her sayının 0. kuvveti 1'dir).

Üç seçenek de geçerlidir:
$\mathbf{3^0 = 1}$ · $\mathbf{(-2)^0 = 1}$ · $\mathbf{(1/2)^0 = 1}$

Başka bir yol var mı? Üs kartlarından 2 ve 3 ile sonucu 1 yapmak için taban 1 ya da −1 olmalıydı; bu tabanlar kartlarda yok. Yani değeri 1 yapan tek yol **0 üs kartını kullanmaktır**.

d) Üç ifadeyi kurup sıralayalım

devamı →

15 *(çözümün devamı)*

Her kartı bir kez kullanacağız. (a) şıkkında 3^3'ün en büyük olduğunu bulmuştuk; onu koruyalım. Geriye −2 ve 1/2 tabanları ile 0 ve 2 üsleri kalır.

Seçtiğimiz eşleştirme:
$3^3 = 27$
$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$
$(1/2)^0 = 1$

Büyükten küçüğe sıralama:
$3^3 > (-2)^2 > (1/2)^0$
$27 > 4 > 1$

Alternatif bir eşleştirme:
$3^2 = 9 \cdot (-2)^3 = -8 \cdot (1/2)^0 = 1$
Sıralama: $9 > 1 > -8$

Gözlem: Aynı kartlarla farklı eşleştirmeler yapılabilir ve sonuçlar tamamen değişir. En büyük değeri elde etmek için **en büyük tabanla en büyük üssü** eşleştirmek gerekir; çünkü üs, değeri tabandan çok daha hızlı büyütür. Bunu görmek için karşılaştıralım:
$3^3 = 27$ ama $3^2 = 9$ → üssü 1 artırmak değeri **3 katına** çıkardı.

a) $3^3 = 27$ b) $(-2)^3 = -8$; tek yol c) Üs 0 ile: $3^0 = (-2)^0 = (1/2)^0 = 1$ d) $3^3 = 27 > (-2)^2 = 4 > (1/2)^0 = 1$