KONU ANLATIMLI SORU ÇÖZÜMLERİ

Tam Sayıların ve Rasyonel Sayıların Kuvveti, Rasyonel Sayılarla Bölme

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge **CC BY-NC 4.0** lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabilir.

ÇÖZÜMLÜ SORU 1 Parantezin yeri ve işaret

Aşağıdaki üslü ifadelerin değerlerini bulunuz.
a) $(-2)^4$
b) -2^4
c) $(-2)^5$
d) Bulduğunuz üç değeri ve $(-1)^0$ sayısını **küçükten büyüğe** sıralayınız.

1 a) Eksi parantez içinde, üs çift

$(-2)^4$ ifadesinde eksi **parantez içindedir**; yani taban **−2**'dir.

Üs 4 olduğuna göre −2 sayısı kendisiyle **4 kez** çarpılır:
$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$

İşaret: Negatif taban, **çift** üs → sonuç **pozitif**
Değer: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

$(-2)^4 = +16$

2 b) Eksi parantez dışında

-2^4 ifadesinde eksi **parantez dışındadır**. Üs yalnızca **2**'ye aittir; eksi işareti tüm ifadenin başındadır.

$-2^4 = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -(16)$

$-2^4 = -16$

(a) ile (b)'yi karşılaştıralım: Rakamlar aynı, ama sonuçlar **zıt işaretli**. Tek fark parantezin varlığıdır. Bu yüzden üslü ifadelerde parantezin yerine çok dikkat etmek gerekir.

3 c) Eksi parantez içinde, üs tek

$(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$

İşaret: Negatif taban, **tek** üs → sonuç **negatif**
Değer: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

$(-2)^5 = -32$

Kısa yoldan kontrol: $(-2)^5 = (-2)^4 \cdot (-2) = 16 \cdot (-2) = -32$ ✓

4 d) Dördünü sıralayalım

Önce $(-1)^0$ değerini bulalım. Sıfır hariç her sayının 0. kuvveti 1'dir:
$(-1)^0 = \mathbf{1}$

Elimizdeki dört değer:

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 1 **Parantezin yeri ve işaret** (devam)

$(-2)^4 = \mathbf{16}$

$-2^4 = \mathbf{-16}$

$(-2)^5 = \mathbf{-32}$

$(-1)^0 = \mathbf{1}$

Küçükten büyüğe sıralayalım. Önce negatifler (mutlak değeri büyük olan daha küçüktür), sonra pozitifler:

$-32 < -16 < 1 < 16$

Yani: **$(-2)^5 < -2^4 < (-1)^0 < (-2)^4$**

Sonuç: a) 16 b) −16 c) −32 d) $(-2)^5 < -2^4 < (-1)^0 < (-2)^4$

Dikkat: İlk bakışın eksinin parantez içinde mi dışında mı olduğuna olsun; işareti bu belirler.

ÇÖZÜMLÜ SORU 2 **Rasyonel sayıların kuvveti**

Aşağıdaki üslü ifadelerin değerlerini bulunuz.
a) $(-3/4)^2$
b) $(-1\tfrac{2}{3})^3$
c) $(0{,}2)^3$
d) $(0{,}\overline{3})^2$

1 a) Negatif taban, çift üs

$(-3/4)^2 = (-3/4) \cdot (-3/4)$

İşaret: Negatif taban, üs **çift** → sonuç **pozitif**

Pay: $3^2 = 9$ · **Payda:** $4^2 = 16$

$= 9/16$

Kontrol: $(-0{,}75)^2 = 0{,}5625$ ve $9/16 = 0{,}5625$ ✓

2 b) Önce bileşik kesre çevir

Tam sayılı kesrin kuvveti alınmadan önce **bileşik kesre** çevrilmelidir:

$-1\tfrac{2}{3} = -(1 \cdot 3 + 2)/3 = \mathbf{-5/3}$

$(-5/3)^3 = (-5/3) \cdot (-5/3) \cdot (-5/3)$

İşaret: Negatif taban, üs **tek** → sonuç **negatif**

Pay: $5^3 = 125$ · **Payda:** $3^3 = 27$

$= -125/27$

Uyarı: Bu işlemi $(-1)^3 \cdot (\tfrac{2}{3})^3$ diye ayırmak **yanlıştır**. Tam sayılı kesir bir toplamdır, çarpım değildir.

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 2 **Rasyonel sayıların kuvveti** (devam)

3 c) Ondalık gösterimi kesre çevir

0,2 = 2/10 = **1/5** (önce sadeleştirmek işi kolaylaştırır)

$(1/5)^3 = (1/5) \cdot (1/5) \cdot (1/5)$

Pay: $1^3 = 1$ · **Payda:** $5^3 = 125$

= 1/125

Sadeleştirmeden yapsaydık: $(2/10)^3 = 8/1000 = 1/125$ ✓ Aynı sonuç, ama daha büyük sayılarla.

4 d) Devirli ondalık gösterimi kesre çevir

$0,\overline{3}$ sayısı, virgülden sonra 3 rakamının sonsuza kadar tekrar ettiği sayıdır.

Devri virgülden hemen sonra başlayan ve tek basamaklı olan bu sayı, **9** paydalı bir kesre çevrilir:

$0,\overline{3} = 3/9 =$ **1/3**

Şimdi kuvveti alalım:

$(1/3)^2 = (1/3) \cdot (1/3) =$ **1/9**

Not: Sonuç 1/9 = $0,\overline{1}$ olarak da yazılabilir.

Sonuç: a) 9/16 b) −125/27 c) 1/125 d) 1/9

Dikkat: Kuvvet almadan önce sayıyı her zaman en sade kesir hâline getir; hem işlem kısalır hem hata riski düşer.

ÇÖZÜMLÜ SORU 3 **Bölmenin iki yolu ve özel durumlar**

a) (−8/9) : (4/3) işlemini **ortak payda algoritmasıyla** yapınız.
b) Aynı işlemi **ters çevir çarp algoritmasıyla** yapınız.
c) 1 : (−5/7) ve (−5/7) : 1 işlemlerinin sonuçlarını bulup karşılaştırınız.
d) 0 : (3/8) ve (3/8) : 0 işlemlerini inceleyiniz.

1 a) Ortak payda algoritması

(−8/9) : (4/3)

1. adım — paydaları eşitle. Paydalar 9 ve 3; ortak payda **9**'dur.

−8/9 → zaten 9 paydalı

4/3 → pay ve payda 3 ile çarpılır → **12/9**

2. adım — payları kendi arasında böl.

(−8/9) : (12/9) = (−8) : 12

3. adım — sonucu sadeleştir.

= −8/12

8 ve 12'nin ikisi de 4'e bölünür:

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 3 **Bölmenin iki yolu ve özel durumlar** (devam)

= −2/3

2 **b) Ters çevir çarp algoritması**

(−8/9) : (4/3)

Bölünen aynen yazılır, bölen ters çevrilir:

Bölünen: −8/9 → aynen

Bölen: 4/3 → ters çevrilir → **3/4**

= (−8/9) · (3/4)

Sadeleştirelim: **8** ile **4** → 2 ve 1; **3** ile **9** → 1 ve 3

= ((−2) · 1)/(3 · 1) = **−2/3** ✓

İki yol da aynı sonucu verdi. Ters çevir çarp yöntemi genellikle daha kısadır; çünkü payda eşitleme adımı yoktur ve sadeleştirme imkânı sunar.

3 **c) 1 ile bölme — iki yön**

1 : (−5/7) = ?

Bölen ters çevrilir:

= 1 · (−7/5) = **−7/5**

Bu sonuç, −5/7 sayısının **çarpma işlemine göre tersidir**. Yani:

1 sayısının bir rasyonel sayıya bölümü, o sayının çarpma işlemine göre tersine eşittir.

(−5/7) : 1 = ?

= (−5/7) · (1/1) = **−5/7**

Bu da sayının **kendisidir**. Yani:

Bir rasyonel sayının 1'e bölümü, o sayının kendisine eşittir.

Karşılaştırma: −7/5 ≠ −5/7 olduğundan iki işlem **farklı** sonuç verdi. Bu, bölme işleminin **değişme özelliği olmadığının** bir kanıtıdır.

Ayrıca bölmenin **etkisiz elemanı da yoktur**: a : 1 = a doğrudur ama 1 : a = a değildir. Etkisiz eleman iki yönlü çalışmalıdır.

4 **d) Sıfırla ilgili iki durum**

0 : (3/8) = ?

Bölen ters çevrilir:

= 0 · (8/3) = **0**

Sıfırın, sıfır hariç bir rasyonel sayıya bölümü **0**'dır. Mantığı şudur: "0'ın içinde kaç tane 3/8 var?" sorusunun cevabı **hiç**, yani 0'dır.

(3/8) : 0 = ?

Bölen ters çevrilmek istenirse 0 sayısının tersi gerekir. Ancak **0'ın çarpma işlemine göre tersi yoktur**.

= (3/8) · (1/0) → **1/0 tanımsızdır**

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 3 **Bölmenin iki yolu ve özel durumlar** (devam)

(3/8) : 0 TANIMSIZDIR.

Gerekçesi: Bölme işlemi bir çarpma sorusudur. "3/8 : 0 = x" demek, "0 · x = 3/8" olacak bir x aramak demektir. Oysa 0 ile çarpılan her sayı **0** verir; hiçbir x bu eşitliği sağlayamaz.

Özet: 0 bölünen olabilir, ama **bölen olamaz**.

Sonuç: a) −2/3 b) −2/3 c) 1 : (−5/7) = −7/5, (−5/7) : 1 = −5/7; farklıdırlar d) 0 : (3/8) = 0, (3/8) : 0 tanımsız

Dikkat: Ters çevrilen daima BÖLENDİR. Birinci sayıyı ters çevirmek en sık yapılan hatadır.

ÇÖZÜMLÜ SORU 4 **Kesir çizgisi, ondalık bölme ve problem**

a) Pay kısmı −9/14, payda kısmı 3/7 olan kesir çizgisiyle verilen bölmenin sonucunu bulunuz.
b) 3,6 : 0,45 işleminin sonucunu bulunuz.
c) 4,2 kg peynir 273 TL ise 1 kg peynir kaç TL'dir?
d) Bölme işleminin **dağılma özelliği** var mıdır? Bir örnekle inceleyiniz.

1 **a) Kesir çizgisi bölme işaretidir**

Pay kısmı −9/14, payda kısmı 3/7 olan ifade şu bölmedir:
(−9/14) : (3/7)

Ters çevir çarp yapalım:
= (−9/14) · (7/3)

Sadeleştirelim: **9** ile **3** → 3 ve 1; **7** ile **14** → 1 ve 2
= ((−3) · 1)/(2 · 1) = **−3/2**

Kontrol: −9/14 ≈ −0,643 ve 3/7 ≈ 0,429 → bölüm ≈ −1,5 ✓

2 **b) Ondalık gösterimleri kesre çevir**

3,6 : 0,45 = ?

Ondalık gösterimleri rasyonel sayıya çevirelim:
3,6 = **36/10** · 0,45 = **45/100**

= (36/10) : (45/100)
Bölen ters çevrilir:
= (36/10) · (100/45)

Sadeleştirelim: **100** ile **10** → 10 ve 1; **36** ile **45** → ikisi de 9'a bölünür → 4 ve 5
= (4 · 10)/(1 · 5) = 40/5 = **8**

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 4 **Kesir çizgisi, ondalık bölme ve problem** (devam)

Kontrol: 0,45 · 8 = 3,6 ✓

Pratik ipucu: Bölen ve bölünenin virgülü **aynı sayıda basamak** kaydırılırsa sonuç değişmez. 3,6 : 0,45 → 360 : 45 = 8 ✓

3 **c) Birim fiyat problemi**

1 kg'ın fiyatı = Toplam fiyat : Kütle

= 273 : 4,2

Ondalık gösterimi kesre çevirelim: 4,2 = **42/10**

= 273 : (42/10) = 273 · (10/42)

Sadeleştirelim: **273** ile **42** → ikisi de 21'e bölünür (273 = 21 · 13, 42 = 21 · 2) → 13 ve 2

= (13 · 10)/2 = 130/2 = **65 TL**

Mantık kontrolü: 4,2 kg peynir 273 TL ise 1 kg bunun yaklaşık dörtte biri kadar olmalı: 273 : 4 ≈ 68 TL. Bulduğumuz 65 TL bu tahminle uyumlu ✓

Doğrulama: 65 · 4,2 = 273 ✓

4 **d) Bölmenin dağılma özelliği var mı?**

Cevap: YOKTUR. Rasyonel sayılarla bölme işleminin **hiçbir özelliği** yoktur; dağılma da bunlara dâhildir.

Dağılma özelliği olsaydı şu eşitlik sağlanmalıydı:

a : (b + c) = a : b + a : c

Deneyelim. a = 1, b = 1/2, c = 1/2 alalım.

Sol taraf:

1 : (1/2 + 1/2) = 1 : 1 = **1**

Sağ taraf:

1 : (1/2) + 1 : (1/2)

= 1 · (2/1) + 1 · (2/1)

= 2 + 2 = **4**

1 ≠ 4 olduğundan **dağılma özelliği yoktur**.

Peki hiçbir şey dağılmaz mı? Bir tek şu yönde çalışır:

(b + c) : a = b : a + c : a

Çünkü bu, aslında **çarpmanın** dağılmasıdır: (b + c) · (1/a) = b · (1/a) + c · (1/a)

Ama sorulan yön — bölenin toplam olduğu yön — **asla çalışmaz**. Bu yüzden "bölmenin dağılma özelliği vardır" demek yanlıştır.

Özet: Bölmenin değişme, birleşme, etkisiz eleman, yutan eleman, ters eleman ve dağılma özelliklerinin **hiçbiri** yoktur.

Sonuç: a) −3/2 b) 8 c) 65 TL d) Yoktur; 1 : (1/2 + 1/2) = 1 ama 1 : (1/2) + 1 : (1/2) = 4

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 4 **Kesir çizgisi, ondalık bölme ve problem** (devam)

Dikkat: Ondalık bölmelerde bölen ile bölüneni aynı sayıda basamak kaydırmak (3,6 : 0,45 → 360 : 45) işlemi çok kısaltır.