KONU ANLATIMI · CEVAPLI

Tam Sayıların ve Rasyonel Sayıların Kuvveti, Rasyonel Sayılarla Bölme

Kazanımlar: MAT.7.1.8. Tam sayıların ve rasyonel sayıların tam sayı kuvvetlerini hesaplayabilme · MAT.7.1.9. Rasyonel sayılarla bölme işlemini yapabilme ve problem çözebilme

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge **CC BY-NC 4.0** lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabilir.

Tam Sayıların Kuvveti

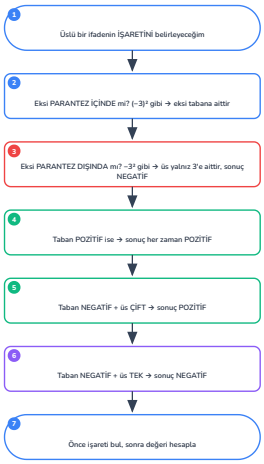
Bir tam sayının kendisi ile **tekrarlı çarpımı**, üslü nicelik olarak ifade edilir.

$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (**n** tane a)

- **Taban:** Üslü ifadede tekrarlı çarpılan sayıdır (yukarıda **a**).
- **Üs (kuvvet):** Tabandaki sayının çarpımda **kaç kez** kullanıldığını gösteren, tabanın sağ üst köşesinde yazan sayıdır (yukarıda **n**).
- **Üslü ifadenin değeri:** Tekrarlı çarpımın sonucudur.

3^4 ifadesi "üç üssü dört" veya "üçün dördüncü kuvveti" şeklinde okunur.

Kural	Açıklama	Örnek
Pozitif taban	Pozitif tam sayıların **bütün** kuvvetlerinin değeri pozitiftir	$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$
Negatif taban, çift üs	Negatif tam sayıların **çift** kuvvetleri **pozitiftir**	$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$
Negatif taban, tek üs	Negatif tam sayıların **tek** kuvvetleri **negatiftir**	$(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$
Sıfırıncı kuvvet	Sıfır hariç her tam sayının **0. kuvveti 1**'e eşittir	$15^0 = 1$ · $(-7)^0 = 1$
Birinci kuvvet	Her tam sayının **1. kuvveti kendisine** eşittir	$6^1 = 6$ · $(-101)^1 = -101$



Bir üslü ifadenin değerinin işaretinin nasıl belirleneceğini gösteren akış şeması. Önce eksi işaretinin parantez içinde olup olmadığına, sonra tabanın işaretine, en son üssün tek mi çift mi olduğuna bakılır.

NOT **Üslü ifadelerde kuvvet ve parantezin yeri, ifadenin anlamını ve değerini değiştirebilir.**

- $(-3)^2$ ifadesi **iki tane (−3)'ün çarpımı** anlamına gelir:
  $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = \mathbf{+9}$
- $\mathbf{-3^2}$ ifadesinde üs **sadece 3'e** aittir. Bu ifade **iki tane 3'ün çarpımının negatifi** anlamına gelir:
  $-3^2 = -(3 \cdot 3) = \mathbf{-9}$

Aynı rakamlarla yazılan iki ifade, yalnızca parantez yüzünden **zıt işaretli** sonuç verdi. Bu, konunun en sık hata yapılan noktasıdır.

ÖRNEK **Değeri negatif olanları bulalım.**

$(-3)^3$ → taban negatif, üs **tek** → **negatif** (−27)
$(-2)^7$ → taban negatif, üs **tek** → **negatif**
-3^4 → eksi parantez dışında → **negatif** (−81)
$(-1)^6$ → taban negatif, üs **çift** → **pozitif** (1)
$(-2022)^0$ → 0. kuvvet → **pozitif** (1)
-15^0 → $15^0 = 1$, başındaki eksi kalır → **negatif** (−1)
-7^4 → eksi parantez dışında → **negatif**
$(-12)^2$ → üs çift → **pozitif**
$(-15)^1$ → 1. kuvvet kendisi → **negatif** (−15)
-4^{10} → eksi parantez dışında → **negatif**

ÖRNEK **Değerleri hesaplayalım.**

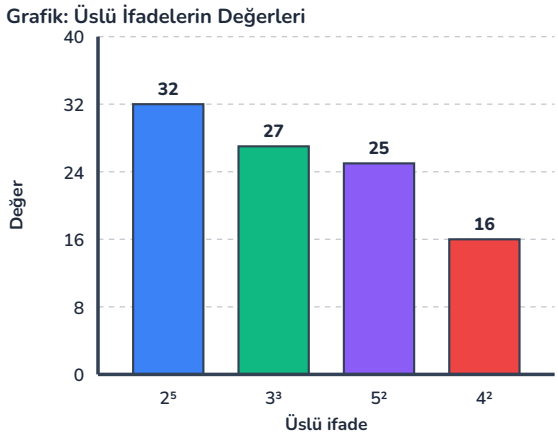
$2^1 = \mathbf{2}$ · $3^2 = 3 \cdot 3 = \mathbf{9}$ · $5^2 = 5 \cdot 5 = \mathbf{25}$
$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = \mathbf{64}$ · $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = \mathbf{16}$

$(-1)^4 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = \mathbf{1}$ (üs çift → pozitif)

Şimdi parantez farkına dikkat edelim:
$-7^2 = -(7 \cdot 7) = \mathbf{-49}$
$-4^2 = -(4 \cdot 4) = \mathbf{-16}$
$-1^0 = -(1^0) = -1 \cdot 1 = \mathbf{-1}$

Üçünde de eksi parantez dışındadır; üs yalnızca yanındaki sayıya aittir.

Üslü İfadeleri Karşılaştırma



2 üssü 5, 3 üssü 3, 5 üssü 2 ve 4 üssü 2 ifadelerinin değerlerini gösteren sütun grafiği. Sırasıyla 32, 27, 25 ve 16 değerleri elde edilir; en büyük değer 2 üssü 5'e aittir.

Grafiği okuyalım. Dört üslü ifadenin değeri şöyledir:
$2^5 = \mathbf{32}$ · $3^3 = \mathbf{27}$ · $5^2 = \mathbf{25}$ · $4^2 = \mathbf{16}$

Sıralama: $\mathbf{2^5 > 3^3 > 5^2 > 4^2}$

Dikkat edilecek nokta: **En küçük tabanlı ifade en büyük değeri verdi!** 2 sayısı dördünün içinde en küçük tabandır, ama üssü en büyük olduğu için sonuç en büyük çıktı.

Buradan çıkan ders şudur: **Tabanlar ve üsler farklıysa göz kararı karşılaştırma yapılamaz**; ifadelerin **değerleri hesaplanmalıdır**.

Durum	Kural	Örnek
Üsler eşit, tabanlar farklı	Pozitif tam sayılarda **tabanı büyük** olan daha büyüktür	$3^4 > 2^4$
Tabanlar eşit, üsler farklı	Pozitif tam sayılarda **üssü küçük** olan daha küçüktür	$7^5 < 7^6$ · $8^6 < 8^8$
Negatif taban	Çift kuvveti **pozitif**, tek kuvveti **negatif** olduğundan çift kuvvet büyüktür	$(-10)^6 > (-10)^7$
Taban −1	Çift üs 1, tek üs −1 verir	$(-1)^{500} > (-1)^{501}$
Sıfırıncı kuvvetler	Sıfırdan farklı her sayının 0. kuvveti 1'dir; **eşittirler**	$(-6)^0 = (-100)^0$
Değerleri eşit olanlar	Farklı yazılışlar aynı değeri verebilir	$(-2)^6 = 4^3$ (64 = 64)

10'un kuvvetleri ve basamak sayısı. 10'un kuvvetleriyle yapılan çarpımlarda sonucun kaç basamaklı olduğu, **hesaplamadan** da bulunabilir.

$\mathbf{10^2}$ = 100 → **3** basamaklıdır.
$\mathbf{3 \cdot 10^3}$ = 3000 → 3'ün sağına **3 tane 0** yazılır → **4** basamaklıdır.
$\mathbf{15 \cdot 10^4}$ = 150 000 → 15'in sağına **4 tane 0** yazılır → **6** basamaklıdır.
$\mathbf{32 \cdot 10^{10}}$ = 320 000 000 000 → 32'nin sağına **10 tane 0** yazılır → **12** basamaklıdır.

Pratik kural: Basamak sayısı = (katsayının basamak sayısı) + (10'un üssü)

Rasyonel Sayıların Kuvveti

Rasyonel sayıların kuvveti hesaplanırken **tam sayıların kuvvet alma kurallarından** yararlanılır. Kesir, üs kadar kez kendisiyle çarpılır; paylar payla, paydalar paydayla çarpılır.

Pozitif rasyonel sayıların **tüm** kuvvetleri pozitiftir.
Negatif rasyonel sayıların **çift** kuvvetleri pozitif, **tek** kuvvetleri negatiftir.

Yani işaret kuralı tam sayılardakiyle **tamamen aynıdır**.

ÖRNEK

$(1/3)^2$ = (1/3) · (1/3) = **1/9**

$(-2/5)^2$ = (−2/5) · (−2/5) = **4/25** (üs çift → pozitif)

$(-2/3)^3$ = (−2/3) · (−2/3) · (−2/3) = **−8/27** (üs tek → negatif)

$(-1/3)^4$ = (−1/3) · (−1/3) · (−1/3) · (−1/3) = **1/81** (üs çift → pozitif)

Kestirme yol: Önce işareti belirle, sonra pay ve paydanın kuvvetini ayrı ayrı al: $(-2/3)^3$ → işaret negatif, pay $2^3 = 8$, payda $3^3 = 27$ → **−8/27**

NOT

Tam sayılı kesirlerin kuvveti hesaplanırken tam sayılı kesir önce BİLEŞİK KESRE çevrilir.

$(-1\frac{1}{2})^5$ = ?
Önce çevirelim: $-1\frac{1}{2}$ = **−3/2**
$(-3/2)^5$ = (−3/2) · (−3/2) · (−3/2) · (−3/2) · (−3/2)
İşaret: üs **tek** → negatif
Pay: $3^5 = 243$ · Payda: $2^5 = 32$
= −243/32

Sık yapılan hata: Tam kısmı ve kesir kısmını ayrı ayrı kuvvete yükseltmek. $(-1\frac{1}{2})^5$ ifadesi **$(-1)^5 \cdot (\frac{1}{2})^5$ değildir**.

ÖRNEK

Ondalık gösterimli sayıların kuvveti. Sayı önce rasyonel sayıya çevrilir.

$(0,2)^4$ = $(2/10)^4$ = $(1/5)^4$ = 1/625

$(-0,4)^2$ = $(-4/10)^2$ = 16/100 = **4/25** (üs çift → pozitif)

$(-0,3)^3$ = $(-3/10)^3$ = **−27/1000** (üs tek → negatif)

$(-2,5)^3$ = $(-25/10)^3$ = $(-5/2)^3$ = **−125/8**
Burada önce **sadeleştirmek** işlemi çok kısalttı: 25/10 yerine 5/2 ile çalışmak, 25^3 = 15 625 gibi büyük bir sayıdan kurtardı.

ÖRNEK **Devirli ondalık gösterimlerin kuvveti.** Sayı önce rasyonel sayıya çevrilir.

$(-0,\overline{3})^3$ = $(-1/3)^3$ = **$-1/27$**

$(0,\overline{4})^2$ = $(4/9)^2$ = **16/81**

$(1,\overline{1})^2$ = $((11-1)/9)^2$ = $(10/9)^2$ = **100/81**

$(0,\overline{6})^4$ = $(6/9)^4$ = $(2/3)^4$ = **16/81**

$(-1,\overline{3})^3$ = $(-(13-1)/9)^3$ = $(-12/9)^3$ = $(-4/3)^3$ = **$-64/27$**

Her defasında **önce sadeleştirmek** hesabı kolaylaştırır.

Rasyonel Sayılarla Bölme İşlemi

Rasyonel sayılarla bölme işlemi yapılırken **iki yöntem** kullanılır.

1. Ortak payda algoritması: Rasyonel sayıların **paydalarını eşitleyip** payları ve paydaları kendi arasında bölme işlemidir.

2. Ters çevir çarp algoritması: Bölünen (birinci) sayı **aynen yazılır**, bölen (ikinci) sayı **ters çevrilip çarpılır**.



Rasyonel sayılarla bölme işleminin iki yolunu gösteren akış şeması. Tam sayılı kesirler önce bileşik kesre çevrilir; sonra ya paydalar eşitlenip paylar bölünür ya da bölen ters çevrilip çarpılır.

ÖRNEK **1. yol — ortak payda algoritması**

(1/2) : (1/6) = ?
Paydaları eşitleyelim (ortak payda 6): 1/2 = **3/6**
= (3/6) : (1/6) = 3 : 1 = **3**

1⅓ : (2/3) = ?
Önce bileşik kesre çevirelim: 1⅓ = **4/3**
Paydalar zaten eşit: (4/3) : (2/3) = 4 : 2 = **2**

Bu yöntemin mantığı şudur: Paydalar eşitlendiğinde iki sayı da **aynı büyüklükteki parçalardan** oluşur. Artık soru "3 parçanın içinde kaç tane 1 parça var?" hâline gelir.

ÖRNEK **2. yol — ters çevir çarp algoritması**

(−9/10) : (−3/2) = ?
Bölünen aynen yazılır, bölen ters çevrilir:
= (−9/10) · (−2/3)
İşaretler aynı → sonuç **pozitif**
= (9 · 2)/(10 · 3) = 18/30 = **3/5**

(−3/4) : (9/10) = ?
= (−3/4) · (10/9)
Sadeleştirelim: 3 ile 9 → 1 ve 3; 10 ile 4 → 5 ve 2
= (−1 · 5)/(2 · 3) = **−5/6**

Kritik uyarı: Ters çevrilen yalnızca **bölen**, yani **ikinci** sayıdır. Birinci sayıyı da ters çevirmek en sık yapılan hatadır.

Özel Durum	Kural	Örnek
1'in bir sayıya bölümü	O sayının **çarpma işlemine göre tersine** eşittir	1 : (−11/2) = 1 · (−2/11) = −2/11
Bir sayının 1'e bölümü	Sayının **kendisine** eşittir	(−11/2) : 1 = −11/2
Sıfırın bir sayıya bölümü	Sıfır hariç bir sayıya bölünen 0'ın sonucu **0**'dır	0 : (4/13) = 0
Bir sayının sıfıra bölümü	**TANIMSIZDIR**	(4/13) : 0 → tanımsız

NOT **Rasyonel sayılarla bölme işleminin HİÇBİR ÖZELLİĞİ YOKTUR.**

Bölme işleminin **değişme, birleşme, etkisiz eleman, yutan eleman, ters eleman** ve **dağılma** özellikleri **yoktur**.

Değişme için karşıt örnek:
(1/2) : (1/4) = **2** ama (1/4) : (1/2) = **1/2**
2 ≠ 1/2 olduğundan değişme özelliği yoktur.

Etkisiz eleman için:
a : 1 = a ✓ ama 1 : a = 1/a ≠ a
Etkisiz eleman **iki yönlü** çalışmalıdır; bölmede çalışmaz.

Bu yüzden bölme işlemini **çarpmaya çevirmek** (ters çevir çarp) yalnızca bir kolaylık değil, çarpmanın özelliklerinden yararlanabilmenin de tek yoludur.

Bölme işlemi farklı sembollerle gösterilebilir. Tam sayılarda olduğu gibi rasyonel sayılarda da:

a : b = a ÷ b = a/b biçiminde yazılabilir.

Kesir çizgisiyle verilen bölmeler. Pay ve paydası kesir olan ifadelerde **büyük kesir çizgisi bölme işaretidir**:

(6/5) bölü (3/20) → **(6/5) : (3/20)** = (6/5) · (20/3) = 120/15 = **8**

(−9/20) bölü (18/5) → **(−9/20) : (18/5)** = (−9/20) · (5/18) = −45/360 = **−1/8**

(36/5) bölü (−9/10) → (36/5) · (−10/9) = −360/45 = **−8**

(−22/3) bölü (−11/15) → (−22/3) · (−15/11) = 330/33 = **10**

ÖRNEK **"İçinde kaç tane var?" soruları bölmedir.**

2'nin içinde kaç tane 1/4 vardır?
2 : (1/4) = (2/1) · (4/1) = **8 tane**

8/5'in içinde kaç tane 1/10 vardır?
(8/5) : (1/10) = (8/5) · (10/1) = 80/5 = **16 tane**

15/4'ün kaç katı 30'dur?
30 : (15/4) = 30 · (4/15) = 120/15 = **8 kat**

7/8 rasyonel sayısı en küçük hangi doğal sayıyla çarpılırsa sonuç pozitif bir tam sayı olur?
Paydayı 1 yapacak sayıyı arıyoruz: (7/8) · **8** = 7 ✓
Cevap: **8**

ÖRNEK **Ondalık gösterimli bölmeler — bir alışveriş problemi.**

3,5 kg şeker 91 TL ise 1 kg şeker kaç TL'dir?
1 kg fiyatı = Toplam fiyat : Kütle
= 91 : 3,5
Ondalık gösterimleri kesre çevirelim: 3,5 = 35/10
= 91 : (35/10) = 91 · (10/35)
Sadeleştirelim: 91 ile 35 → ikisi de 7'ye bölünür → 13 ve 5
= (13 · 10)/5 = 130/5 = **26 TL**

2,5 kg toz şeker 72,6 TL ise 1 kg kaç TL'dir?
= 72,6 : 2,5 = (726/10) : (25/10) = (726/10) · (10/25) = 726/25 = **29,04 TL**

Bu tür problemlerde "bir birimin fiyatı" daima **bölme** ile bulunur.

Etkinlikler

ETKİNLİK 1 **Aşağıdaki ifadelerden doğru olanların yanına "D", yanlış olanların yanına "Y" yazınız.**

a) D Pozitif tam sayıların bütün kuvvetlerinin değeri pozitiftir.

b) Y Negatif tam sayıların çift kuvvetleri negatiftir.

c) Y $(-3)^2$ ile -3^2 ifadeleri aynı değeri verir.

d) D Sıfır hariç her tam sayının sıfırıncı kuvveti 1'e eşittir.

e) D -1^0 ifadesinin değeri −1'dir.

f) D Tam sayılı kesirlerin kuvveti alınırken kesir önce bileşik kesre çevrilir.

g) D Negatif rasyonel sayıların tek kuvvetleri negatiftir.

h) Y Ters çevir çarp algoritmasında bölünen sayı ters çevrilir.

ı) D Bir rasyonel sayının 1'e bölümü kendisine eşittir.

i) D Sıfırın, sıfır hariç bir rasyonel sayıya bölümü 0'dır.

j) Y Bir rasyonel sayının 0'a bölümü 0'dır.

k) Y Rasyonel sayılarla bölme işleminin değişme özelliği vardır.

ETKİNLİK 2 **Aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri doldurunuz.**

Üslü İfade	Tekrarlı Çarpım	İşareti	Değeri
$(3/2)^3$	(3/2)·(3/2)·(3/2)	Pozitif	27/8
$(-3/2)^2$	(−3/2)·(−3/2)	Pozitif (üs çift)	9/4
$(-3/2)^3$	(−3/2)·(−3/2)·(−3/2)	Negatif (üs tek)	−27/8
$(-1¼)^2$	(−5/4)·(−5/4)	Pozitif	25/16
$(-2/5)^4$	(−2/5) dört kez çarpılır	Pozitif	16/625
$(-1/2)^5$	(−1/2) beş kez çarpılır	Negatif	−1/32
$(-4/3)^4$	(−4/3) dört kez çarpılır	Pozitif	256/81
$(-1/3)^6$	(−1/3) altı kez çarpılır	Pozitif	1/729

ETKİNLİK 3 **Aşağıdaki üslü ifadelerin değerlerini bulunuz.**

a) $(3/5)^2$ **$(3/5)\cdot(3/5) = 9/25$**

b) $(2\tfrac{2}{3})^2$ **$(8/3)^2 = (8\cdot8)/(3\cdot3) = 64/9$**

c) $(-7/10)^2$ **Üs çift → pozitif → 49/100**

d) $(-3\tfrac{1}{3})^2$ **$(-10/3)^2 = 100/9$**

e) $(0{,}2)^4$ **$(2/10)^4 = (1/5)^4 = 1/625$**

f) $(-0{,}4)^2$ **$(-4/10)^2 = 16/100 = 4/25$**

g) $(1\tfrac{1}{4})^3$ **$(5/4)^3 = 125/64$**

h) $(-5/3)^3$ **Üs tek → negatif → $-125/27$**

ı) $(-0{,}3)^3$ **$(-3/10)^3 = -27/1000$**

i) $(-2{,}5)^3$ **$(-25/10)^3 = (-5/2)^3 = -125/8$**

ETKİNLİK 4 **Aşağıdaki bölme işlemlerini yapıp sonuçları en sade hâliyle yazınız.**

a) $1 : (1/3)$ **$1 \cdot (3/1) = 3$**

b) $2 : 6$ **$(2/1) \cdot (1/6) = 2/6 = 1/3$**

c) $(1/2) : (1/4)$ **$(1/2) \cdot (4/1) = 4/2 = 2$**

d) $(1/4) : (1/2)$ **$(1/4) \cdot (2/1) = 2/4 = 1/2$ — (c) ile karşılaştır: bölmede değişme yoktur!**

e) $(16/3) : (4/9)$ **$(16/3) \cdot (9/4) = (4 \cdot 3)/1 = 12$**

f) $(-3/4) : (9/10)$ **$(-3/4) \cdot (10/9) = -5/6$**

g) $0{,}2 : (1/2)$ **$(2/10) \cdot (2/1) = 4/10 = 2/5$**

h) $(-1{,}2) : (12/10)$ **$(-12/10) \cdot (10/12) = -1$**

ı) $(9/16) : 3{,}6$ **$(9/16) : (36/10) = (9/16) \cdot (10/36) = 90/576 = 5/32$**

i) $(12/5) : (-4/15)$ **$(12/5) \cdot (-15/4) = -180/20 = -9$**

ETKİNLİK 5 **Aşağıdaki soruları çözünüz.**

a) 2'nin içinde kaç tane 1/4 vardır? **$2 : (1/4) = 2 \cdot 4 = 8$ tane**

b) 8/5'in içinde kaç tane 1/10 vardır? **$(8/5) : (1/10) = (8/5) \cdot 10 = 80/5 = 16$ tane**

c) 7/8 rasyonel sayısı en küçük hangi doğal sayıyla çarpılırsa sonuç pozitif bir tam sayı olur? **Paydayı 1 yapan sayı aranır: $(7/8) \cdot 8 = 7$ → cevap 8**

d) 15/4'ün kaç katı 30'dur? **$30 : (15/4) = 30 \cdot (4/15) = 8$ kat**

e) Pay kısmı 6/5, payda kısmı 3/20 olan bölmenin sonucu kaçtır? **$(6/5) : (3/20) = (6/5) \cdot (20/3) = 8$**

f) Pay kısmı −22/3, payda kısmı −11/15 olan bölmenin sonucu kaçtır? **$(-22/3) \cdot (-15/11) = 330/33 = 10$**

g) 4,5 kg deterjan 84,5 TL ise 1 kg deterjan kaç TL'dir? **$84{,}5 : 4{,}5 = (845/10) \cdot (10/45) = 845/45 = 169/9 \approx 18{,}8$ TL**

h) $15 \cdot 10^4$ işleminin sonucu kaç basamaklıdır? **$15 \cdot 10^4 = 150\,000$; 15'in sağına 4 tane 0 yazılır → 6 basamaklı**

Konu Özeti

ÖZET Üslü ifadede **taban** tekrarlı çarpılan sayı, **üs** ise kaç kez çarpıldığını gösterir. İşaret kuralı basittir: **pozitif taban her zaman pozitif**; **negatif taban çift üste pozitif, tek üste negatif**. Ama önce **eksinin parantez içinde mi dışında mı** olduğuna bakılmalıdır: $(-3)^2 = 9$ iken $-3^2 = -9$'dur. Sıfır hariç her sayının **0. kuvveti 1**, her sayının **1. kuvveti kendisidir**. Rasyonel sayılarda da aynı kurallar geçerlidir; tam sayılı kesirler ve ondalık gösterimler önce **kesre çevrilir**, mümkünse **sadeleştirilir**. Karşılaştırmada tabanlar eşitse üsse, üsler eşitse tabana bakılır; ikisi de farklıysa **değerler hesaplanır**. **Bölmede** iki yol vardır: **paydaları eşitleyip payları bölmek** ya da **böleni ters çevirip çarpmak** — ters çevrilen daima **ikinci** sayıdır. 1'e bölünen sayı kendisi, 1'in bir sayıya bölümü o sayının **çarpma tersidir**; 0 bölünen olabilir ama **bölen olamaz** (tanımsız). Son olarak: **bölme işleminin hiçbir özelliği yoktur** — ne değişme, ne birleşme, ne etkisiz eleman, ne dağılma.