ÇÖZÜMLER

Çok Adımlı İşlemler ve Rasyonel Sayılarla Problem Çözme

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge **CC BY-NC 4.0** lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabilir.

1. Bölüm Soru 1–5

1 Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

a) $9 - 4 \cdot 3$
b) $(9 - 4) \cdot 3$
c) $18 : 3^2 + 5$
d) (a) ve (b) şıklarında aynı sayılar kullanıldığı hâlde sonuçlar neden farklı çıkmıştır? Açıklayınız.

a) $9 - 4 \cdot 3$
Çarpma, çıkarmadan **önce** gelir.
Önce çarpma: $4 \cdot 3 = \mathbf{12}$
Sonra çıkarma: $9 - 12 = \mathbf{-3}$

Uyarı: Soldan sağa gidip $9 - 4 = 5$, sonra $5 \cdot 3 = 15$ demek yanlıştır. Soldan sağa kuralı yalnızca **aynı öncelikteki** işlemler için geçerlidir.

b) $(9 - 4) \cdot 3$
Parantez içindeki işlem her şeyden önce yapılır.
Parantez: $9 - 4 = \mathbf{5}$
Çarpma: $5 \cdot 3 = \mathbf{15}$

c) $18 : 3^2 + 5$
Önce üslü işlem: $3^2 = \mathbf{9}$
Sonra bölme: $18 : 9 = \mathbf{2}$
En son toplama: $2 + 5 = \mathbf{7}$

d) Neden farklı?
(a) şıkkında parantez yoktur; bu yüzden **çarpma önce** yapılır ve 9'dan 12 çıkarılır.
(b) şıkkında parantez, çıkarmayı çarpmanın **önüne** geçirmiştir; bu kez 5 sayısı 3 ile çarpılmıştır.

Parantez, işlem önceliği sırasını **değiştirme yetkisine** sahip tek işarettir. Bu yüzden aynı rakamlarla yazılan iki ifade, yalnızca parantez yüzünden −3 ve 15 gibi birbirinden çok uzak iki sonuç verebilir.

Sonuç: a) −3 b) 15 c) 7

a) −3 b) 15 c) 7

2 Aşağıda altı soru verilmiştir.

I. 48'in 3/4'ü kaçtır?
II. 3/4'ü 48 olan sayı kaçtır?
III. Bir sınıftaki 30 öğrencinin 2/3'ü kaç kişidir?
IV. Bir kitabın 2/9'u 18 sayfa ise kitap kaç sayfadır?
V. 5/6'nın 3/10'u kaçtır?
VI. Bir yolun 4/7'si 56 km ise yolun tamamı kaç km'dir?

a) Bu soruları çarpma gerektirenler ve bölme gerektirenler diye ikiye ayırınız.
b) Ayırırken kullandığınız ölçütü bir cümleyle yazınız.
c) Altı sorunun da sonucunu bulunuz.

a) Sınıflandırma

Ölçüt şudur: **bütün mü biliniyor, parça mı?**

Çarpma gerektirenler: I, III, V
Bu üç soruda bütün verilmiş, **parçası** soruluyor.

Bölme gerektirenler: II, IV, VI
Bu üç soruda parça verilmiş, **bütünü** soruluyor.

b) Ölçüt

Bütünden parçaya gidiliyorsa **çarpılır**, parçadan bütüne gidiliyorsa **bölünür**.

Bunu cümlenin kalıbından da anlayabilirsin: "...nın ...i kaçtır?" kalıbı çarpma, "...si ... olan sayı kaçtır?" kalıbı bölme gerektirir.

c) Sonuçlar

I. 48 · (3/4) = (48 : 4) · 3 = 12 · 3 = **36**

II. 48 : (3/4) = 48 · (4/3) = 16 · 4 = **64**

III. 30 · (2/3) = (30 : 3) · 2 = 10 · 2 = **20 kişi**

IV. 18 : (2/9) = 18 · (9/2) = 9 · 9 = **81 sayfa**

V. (5/6) · (3/10) = 15/60 = **1/4**

VI. 56 : (4/7) = 56 · (7/4) = 14 · 7 = **98 km**

I ile II'yi karşılaştıralım: İkisinde de 48 ve 3/4 sayıları geçiyor; ama birinde sonuç 36 (küçüldü), diğerinde 64 (büyüdü). Sebep, hangisinin bilinmeyen olduğudur.

Çarpma: I, III, V · Bölme: II, IV, VI | 36, 64, 20, 81, 1/4, 98

3 Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

a) Payı 3/4 + 1/2, paydası 5/8 olan kesrin değeri
b) 5 – (payı 3, paydası 1/2 + 1/4 olan kesir)
c) (payı 3/5, paydası 9/10 olan kesir) ile (payı 1/4, paydası 1/3 olan kesir) sayılarının çarpımı
d) Üç sonucu büyükten küçüğe sıralayınız.

a) Önce pay, sonra bölme
Pay: 3/4 + 1/2 = 3/4 + 2/4 = **5/4**
Payda: **5/8**
Bölme: (5/4) : (5/8) = (5/4) · (8/5) = 40/20 = **2**

b) Önce paydayı bitir
Payda: 1/2 + 1/4 = 2/4 + 1/4 = **3/4**
Bölme: 3 : (3/4) = 3 · (4/3) = **4**
Dışarıdaki çıkarma: 5 − 4 = **1**

Uyarı: Kesir çizgisi bir parantez gibi çalışır. Önce onun değeri bulunur, çıkarma en sona bırakılır.

c) İki bölmeyi ayrı ayrı yapıp çarpalım
Birinci kesir: (3/5) : (9/10) = (3/5) · (10/9) = 30/45 = **2/3**
İkinci kesir: (1/4) : (1/3) = (1/4) · (3/1) = **3/4**
Çarpma: (2/3) · (3/4) = 6/12 = **1/2**

d) Sıralama
Bulduğumuz değerler: **2**, **1**, **1/2**
1/2 sayısı 1'den küçüktür, 1 de 2'den küçüktür.
2 > 1 > 1/2

Sıralama: **a, b, c**

Sonuç: a) 2 b) 1 c) 1/2

a) 2 b) 1 c) 1/2 | Sıralama: a > b > c

4 Emre, **12 − 8 : 4 · 2** işlemini aşağıdaki gibi çözmüştür.

12 − 8 : 4 · 2
= 12 − 8 : 8
= 12 − 1
= 11

a) Emre hangi adımda hata yapmıştır? Hatayı açıklayınız.
b) İşlemin doğru çözümünü adım adım yazınız.
c) Emre'nin sonucu ile doğru sonuç arasındaki fark kaçtır?
d) Emre'nin bu hatayı bir daha yapmaması için aklında tutması gereken kuralı bir cümleyle yazınız.

a) Hata nerede?
Emre **ilk adımda** hata yapmıştır. İkinci satıra geçerken önce **4 · 2 = 8** çarpmasını yapmıştır.

Yani Emre, çarpmanın bölmeden önce geldiğini sanmıştır. Oysa **çarpma ile bölme aynı önceliktedir**; aralarında bir üstünlük yoktur.

b) Doğru çözüm
İfadede çarpma ve bölme birlikte bulunduğu için **soldan sağa** gidilir. Soldaki işlem bölmedir:

12 − 8 : 4 · 2
= 12 − **2** · 2 (8 : 4 = 2)
= 12 − **4** (2 · 2 = 4)
= **8**

c) Fark
Emre'nin sonucu: 11
Doğru sonuç: 8
Fark: 11 − 8 = **3**

d) Akılda tutulacak kural
"Çarpma ve bölme aynı önceliktedir; ikisi de varsa **soldan sağa** sırayla yapılır."

Aynı kural toplama ve çıkarma için de geçerlidir. Örneğin 10 − 4 + 3 işleminde önce 4 + 3 yapılırsa 3 bulunur; doğrusu soldan sağa gidip 10 − 4 = 6, sonra 6 + 3 = **9** bulmaktır.

Doğru sonuç 8 · Fark 3

5 Bir mağazada etiket fiyatı **480 TL** olan bir montun fiyatı önce **1/4** oranında indiriliyor. Kasada ise indirimli fiyat üzerinden **1/6** oranında ikinci bir indirim daha yapılıyor.

a) Birinci indirimden sonraki fiyat kaç TL'dir?
b) Kasada ödenen son fiyat kaç TL'dir?
c) Yapılan toplam indirim, etiket fiyatının kaçta kaçıdır?
d) "İki indirimi toplarsak 1/4 + 1/6 = 5/12 eder; yani fiyatın 5/12'si kadar indirim yapılmıştır." diyen bir müşteri haklı mıdır? Gerekçesiyle açıklayınız.

a) Birinci indirimden sonraki fiyat
İndirim miktarı: 480 · (1/4) = **120 TL**
Yeni fiyat: 480 − 120 = **360 TL**

Aynı sonuca tek adımda da ulaşılabilir: fiyatın 1/4'ü inince geriye 3/4'ü kalır.
480 · (3/4) = **360 TL**

b) Kasada ödenen fiyat
İkinci indirim **360 TL üzerinden** yapılır:
360 · (1/6) = **60 TL**
Son fiyat: 360 − 60 = **300 TL**

Tek adımda: 360 · (5/6) = **300 TL**

c) Toplam indirim oranı
Toplam indirim tutarı: 480 − 300 = **180 TL**
Bu tutarın etiket fiyatına oranı:
180/480 = 18/48 = **3/8**

d) Müşteri haklı mıdır?
Haklı değildir.

Önce müşterinin söylediği oranın ne kadar ettiğine bakalım:
480 · (5/12) = **200 TL**
Oysa gerçek indirim **180 TL** oldu. Aradaki 20 TL'lik fark, müşterinin hatasının büyüklüğüdür.

Oranları da karşılaştıralım. Paydaları 24'te eşitleyelim:
Gerçek indirim: 3/8 = **9/24**
Müşterinin iddiası: 5/12 = **10/24**
9/24 ile 10/24 eşit değildir.

Sebebi: Birinci indirim **480 TL** üzerinden, ikinci indirim ise **360 TL** üzerinden yapılmıştır. İki kesir **farklı bütünlere** ait olduğu için doğrudan toplanamaz.

İkinci indirimin etiket fiyatına göre karşılığı şudur: 60/480 = **1/8**. Doğru toplama budur:
1/4 + 1/8 = 2/8 + 1/8 = **3/8** ✓

a) 360 TL b) 300 TL c) 3/8 d) Haklı değil

2. Bölüm Soru 6–10

6 Bir pastanede yapılan bir kek tarifi, kek başına **3/4 kg** un gerektirmektedir. Ustanın elinde **6 kg** un vardır.

Usta, "6 · (3/4) = 4,5 olduğuna göre 4 kek yapabilirim." diye düşünüyor.

a) Ustanın kurduğu işlem doğru mudur? Gerekçesiyle açıklayınız.
b) Doğru işlemi yazıp bu unla kaç kek yapılabileceğini bulunuz.
c) Tüm kekler yapıldıktan sonra geriye un kalır mı? Kalıyorsa kaç kilogram?
d) Usta 12 kek yapmak isteseydi kaç kilogram una ihtiyacı olurdu?

a) Ustanın işlemi doğru mudur?
Doğru değildir.

Usta **çarpma** yapmıştır. Çarpma, bütün bilindiğinde **parçayı** bulmak için kullanılır. Örneğin "6 kg unun 3/4'ü kaç kilogramdır?" sorusunun cevabı 4,5 kg olurdu.

Oysa burada sorulan bu değildir. Soru şudur: **6 kilogramın içinde kaç tane 3/4 kilogram vardır?** Bu bir **bölme** sorusudur.

Ustanın mantığındaki sorunu şöyle de görebiliriz: Bir kek 3/4 kg, yani **1 kg'dan az** un istiyor. O hâlde 6 kg unla yapılabilecek kek sayısı **6'dan fazla** olmalıdır. 4 sayısı 6'dan küçük olduğu için baştan mantıksızdır.

b) Doğru işlem
6 : (3/4) = 6 · (4/3) = 24/3 = **8 kek**

c) Geriye un kalır mı?
8 kek için gereken un:
8 · (3/4) = 24/4 = **6 kg**

Elindeki unun tamamı kullanılmıştır. **Geriye un kalmaz.**

Bölme işleminin sonucu tam sayı çıktığı için un tam olarak bitmiştir. Eğer sonuç örneğin 8,5 çıksaydı 8 kek yapılır, yarım kek kadar (3/8 kg) un artardı.

d) 12 kek için gereken un
Bu kez kek sayısı biliniyor, **un miktarı** soruluyor; yani çarpma yapılır:
12 · (3/4) = 36/4 = **9 kg**

Dikkat edilirse (b) şıkkında bölme, (d) şıkkında çarpma yapıldı. Aynı tarif, sorunun yönüne göre farklı işlem gerektirdi.

a) Yanlış, bölme gerekir b) 8 kek c) Un artmaz d) 9 kg

7 Bir otobüs birinci gün yolun **2/7**'sini, ikinci gün **kalan yolun 3/5**'ini gitmiştir. Üçüncü gün kalan **80 km**'yi giderek varış noktasına ulaşmıştır.

a) Birinci günden sonra yolun kaçta kaçı kalmıştır?
b) İkinci gün gidilen yol, yolun tamamının kaçta kaçıdır?
c) Yolun tamamı kaç kilometredir?
d) Her gün gidilen yolu kilometre cinsinden yazıp toplamının yolun tamamına eşit olduğunu gösteriniz.

a) Birinci günden sonra kalan oran
Yolun tamamını 1 bütün kabul edelim.
Birinci gün gidilen: **2/7**
Kalan: 1 − 2/7 = 7/7 − 2/7 = **5/7**

b) İkinci gün gidilen yolun bütüne göre payı
İkinci gün gidilen, **kalanın** 3/5'idir. Kalan 5/7 olduğuna göre:
(5/7) · (3/5) = 15/35 = **3/7**

Uyarı: Buraya doğrudan 3/5 yazmak en sık yapılan hatadır. 3/5 kesri **kalana** aittir, yolun tamamına değil.

c) Yolun tamamı
Üçüncü güne kalan oranı bulalım:
1 − 2/7 − 3/7 = 7/7 − 5/7 = **2/7**

Bu 2/7'lik kısım **80 km** olarak verilmiştir. Parça biliniyor, bütün soruluyor; o hâlde **bölme** yapılır:
80 : (2/7) = 80 · (7/2) = 40 · 7 = **280 km**

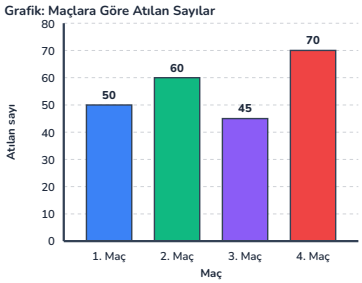
d) Günlere göre yol
Birinci gün: 280 · (2/7) = 40 · 2 = **80 km**
İkinci gün: 280 · (3/7) = 40 · 3 = **120 km**
Üçüncü gün: **80 km** (soruda verilmiş)
Toplam: 80 + 120 + 80 = **280 km** ✓

Toplam, yolun tamamına eşit çıktı. Bu, çözümün doğru olduğunu gösteren en güvenilir kontroldür.

Dikkat çekici bir nokta: Birinci ve üçüncü gün **aynı mesafe** (80 km) gidilmiştir; ama birinci gün bu mesafe yolun 2/7'si, üçüncü gün de yine 2/7'sidir. Kesirler eşit olduğu için mesafeler de eşittir.

a) 5/7 b) 3/7 c) 280 km d) 80 + 120 + 80 = 280

8 Aşağıdaki grafikte bir basketbol takımının dört maçta attığı sayılar gösterilmiştir.



a) İkinci maçta atılan sayı, dördüncü maçta atılanın kaçta kaçıdır?
b) Üçüncü maçta atılan sayı, birinci maçta atılanın kaçta kaçıdır?
c) Takımın dört maçta attığı toplam sayı kaçtır?
d) Hangi maçta atılan sayı, dört maçtaki toplamın 2/9'una eşittir?

Grafikten okunan değerler:
1. maç: **50** · 2. maç: **60** · 3. maç: **45** · 4. maç: **70**

a) İkinci maç, dördüncü maçın kaçta kaçı?
Aranan kesrin payı 2. maç, paydası 4. maçtır:
60/70
Pay ve paydayı 10'a bölerek sadeleştirelim:
60/70 = **6/7**

b) Üçüncü maç, birinci maçın kaçta kaçı?
45/50
Pay ve paydayı 5'e bölelim:
45/50 = **9/10**

Bu sonuç 1'den küçüktür; yani üçüncü maçta birinci maçtan **daha az** sayı atılmıştır. Grafikteki sütun yükseklikleri de bunu doğruluyor.

c) Toplam sayı
50 + 60 + 45 + 70
= 110 + 45 + 70
= 155 + 70
= **225**

d) Toplamın 2/9'u hangi maça eşit?
Önce toplamın 2/9'unu hesaplayalım. Bütün biliniyor, parça soruluyor; çarpma yapılır:
225 · (2/9) = (225 : 9) · 2 = 25 · 2 = **50**

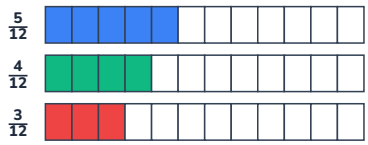
50 sayısı **birinci maçta** atılan sayıdır.

Cevap: 1. maç

Kontrol: 50/225 kesrini sadeleştirelim. Pay ve paydayı 25'e bölelim: 50/225 = 2/9 ✓

a) 6/7 b) 9/10 c) 225 d) 1. maç

9 Bir marangoz bir tahtayı üç parçaya ayırmıştır. Aşağıdaki model, her parçanın tahtanın tamamına göre payını göstermektedir. Üç şeritte de aynı bütün **12 eş parçaya** bölünmüştür.



En kısa parçanın uzunluğu **45 cm**'dir.

a) Modeldeki üç kesri sadeleştirilmiş hâlleriyle yazınız.
b) Tahtanın tamamı kaç santimetredir?
c) Diğer iki parçanın uzunluklarını bulunuz.
d) En uzun parça, en kısa parçadan kaç santimetre fazladır?

Modelden okunan kesirler: **5/12**, **4/12** ve **3/12**.

Ön kontrol: 5/12 + 4/12 + 3/12 = 12/12 = 1. Üç parça gerçekten tahtanın tamamını oluşturuyor.

a) Sadeleştirilmiş kesirler

5/12 → pay ve payda ortak bölene sahip değil, **5/12** olarak kalır.
4/12 → pay ve paydayı 4'e bölelim: **1/3**
3/12 → pay ve paydayı 3'e bölelim: **1/4**

b) Tahtanın tamamı

En kısa parça, kesri en küçük olan parçadır: **3/12 = 1/4**
Bu parça **45 cm**'dir. Parça biliniyor, bütün soruluyor; bölme yapılır:
45 : (1/4) = 45 · 4 = **180 cm**

c) Diğer parçaların uzunlukları

Bütün bulundu, artık her parça çarpmayla bulunur.
Birinci parça: 180 · (5/12) = (180 : 12) · 5 = 15 · 5 = **75 cm**
İkinci parça: 180 · (1/3) = **60 cm**

Kontrol: 75 + 60 + 45 = **180 cm** ✓

d) En uzun ile en kısa parçanın farkı

En uzun parça 75 cm, en kısa parça 45 cm'dir.
75 − 45 = **30 cm**

Aynı sonucu kesirlerle de bulabiliriz: 5/12 − 3/12 = 2/12 = 1/6 → 180 · (1/6) = **30 cm** ✓

a) 5/12, 1/3, 1/4 b) 180 cm c) 75 cm ve 60 cm d) 30 cm

10 Bir çiftçi tarlasının **3/8**'ine buğday, **kalan kısmın 2/5**'ine mısır ekmiştir. Geriye **45 dönüm** boş tarla kalmıştır.

a) Mısır ekilen kısım, tarlanın tamamının kaçta kaçıdır?
b) Tarlanın tamamı kaç dönümdür?
c) "Buğday ekilen alan ile boş kalan alan birbirine eşittir." diyen bir kişi haklı mıdır? Gerekçelendiriniz.
d) Mısır ekilen alan kaç dönümdür?

a) Mısır ekilen kısmın payı
Tarlanın tamamını 1 bütün kabul edelim.
Buğday: **3/8**
Kalan: 1 − 3/8 = 8/8 − 3/8 = **5/8**

Mısır, **kalanın** 2/5'idir:
(5/8) · (2/5) = 10/40 = **1/4**

Paydayı 8'e çevirirsek 1/4 = **2/8** olur; böylece buğdayla aynı paydaya gelir ve karşılaştırma kolaylaşır.

b) Tarlanın tamamı
Boş kalan oran:
1 − 3/8 − 2/8 = 8/8 − 5/8 = **3/8**

Bu 3/8 bize **45 dönüm** olarak verilmiştir:
45 : (3/8) = 45 · (8/3) = 15 · 8 = **120 dönüm**

c) Kişi haklı mıdır?
Haklıdır.

Buğday ekilen alanın oranı **3/8**, boş kalan alanın oranı da **3/8**'dir. Paydalar ve paylar aynı olduğuna göre iki alan eşittir.

Sayısal olarak da gösterelim:
Buğday: 120 · (3/8) = 15 · 3 = **45 dönüm**
Boş kalan: **45 dönüm** (soruda verilmiş) ✓

d) Mısır ekilen alan
120 · (1/4) = **30 dönüm**

Genel kontrol: 45 + 30 + 45 = **120 dönüm** ✓

Not: Mısır için doğrudan 2/5 kullanıp 120 · (2/5) = 48 demek yanlış olurdu. 2/5 kesri **kalana** aittir; tarlanın tamamına göre karşılığı 1/4'tür.

a) 1/4 b) 120 dönüm c) Haklı, ikisi de 3/8 d) 30 dönüm

3. Bölüm Soru 11–15

11 Bir sayının **2/3**'ünün **3/5**'i **24**'tür.

a) Bu sayıyı bulunuz.
b) Bulduğunuz sayının 5/6'sı kaçtır?
c) Bulduğunuz sayının 1/4'ünden 7 çıkarılırsa sonuç kaç olur?
d) Hangi sayının 3/4'ü, bulduğunuz sayıya eşittir?

a) Sayıyı bulalım
Aranan sayıya **bütün** diyelim.

"Bütünün 2/3'ünün 3/5'i" ifadesi iki ardışık çarpma demektir. Önce bu iki kesrin çarpımını bulalım:
(2/3) · (3/5) = 6/15 = **2/5**

Yani verilen 24 sayısı, aranan sayının **2/5**'idir.

Parça biliniyor, bütün soruluyor; bölme yapılır:
24 : (2/5) = 24 · (5/2) = 12 · 5 = **60**

Kontrol: 60'ın 2/3'ü = 40 · 40'ın 3/5'i = 24 ✓

b) Sayının 5/6'sı
Bütün biliniyor, parça soruluyor; çarpma yapılır:
60 · (5/6) = (60 : 6) · 5 = 10 · 5 = **50**

c) Sayının 1/4'ünden 7 çıkaralım
Önce 1/4'ünü bulalım:
60 · (1/4) = **15**
Sonra çıkarma:
15 − 7 = **8**

Uyarı: İşlem önceliği gereği önce çarpma, sonra çıkarma yapılır. Önce 60 − 7 = 53 deyip sonra dörde bölmek yanlış olur.

d) 3/4'ü 60 olan sayı
Bu kez 60 sayısı **parça** durumundadır; aranan sayı bütündür. Bölme yapılır:
60 : (3/4) = 60 · (4/3) = 20 · 4 = **80**

Kontrol: 80 · (3/4) = 60 ✓

Dikkat edilirse (b) şıkkında sonuç 60'tan küçük (50), (d) şıkkında ise 60'tan büyük (80) çıktı. Sebebi, birinde çarpma diğerinde bölme yapılmasıdır.

a) 60 b) 50 c) 8 d) 80

12 Bir kütüphanedeki kitapların **1/3**'ü roman, **kalan kitapların 1/4**'ü şiir kitabıdır. Kütüphanede toplam **600** kitap vardır.

Deniz bu soruyu şöyle çözmüştür:

Roman: 600 · (1/3) = 200
Şiir: 600 · (1/4) = 150
Geriye kalan: 600 − 200 − 150 = 250

a) Deniz hangi adımda hata yapmıştır? Hatanın sebebini açıklayınız.
b) Doğru çözümü adım adım yazınız.
c) Deniz'in bulduğu sonuç ile doğru sonuç arasındaki fark kaçtır?
d) Şiir kitaplarının sayısı, kütüphanedeki kitapların kaçta kaçıdır?

a) Hata nerede?
Deniz **ikinci adımda** hata yapmıştır. 1/4 kesrini **600** ile çarpmıştır.

Oysa soruda "**kalan kitapların** 1/4'ü" denilmektedir. Bu kesir kütüphanedeki bütün kitaplara değil, **romanlar çıktıktan sonra kalan** kitaplara aittir.

Kesirlerde bütünün ne olduğu her zaman söylenmelidir. Bütün değiştiği hâlde eski bütünle çarpmak, bu konudaki en yaygın hatadır.

b) Doğru çözüm

1. adım — Roman sayısı
600 · (1/3) = **200 roman**

2. adım — Kalan kitap sayısı
600 − 200 = **400 kitap**

3. adım — Şiir kitabı sayısı
Şiir, **kalanın** 1/4'üdür:
400 · (1/4) = **100 şiir kitabı**

4. adım — Geriye kalan kitaplar
600 − 200 − 100 = **300 kitap**

Aynı sonucu kalan üzerinden de bulabiliriz: 400 − 100 = **300** ✓

c) Fark
Deniz'in bulduğu: 250
Doğru sonuç: 300
Fark: 300 − 250 = **50 kitap**

d) Şiir kitaplarının bütüne göre payı
100/600 kesrini sadeleştirelim. Pay ve paydayı 100'e bölelim:
100/600 = **1/6**

Bunu kesirlerle de gösterebiliriz: Kalan oran 2/3 idi, şiir bunun 1/4'ü:
(2/3) · (1/4) = 2/12 = **1/6** ✓

Deniz'in kullandığı 1/4 ile doğru olan 1/6 arasındaki fark, sonuçtaki 50 kitaplık sapmanın sebebidir.

devamı →

12 *(çözümün devamı)*

b) Şiir 100, geriye 300 c) Fark 50 d) 1/6

13 Aşağıdaki dört ifade veriliyor.

I. 36 : (1/2)
II. 36 · 2
III. 36 : 2 · 4
IV. 36 · (1/2) : (1/4)

a) Dört ifadenin de değerini bulunuz.
b) Bu ifadeleri değerlerine göre gruplayınız. Hangileri birbirine eşittir?
c) "Bölme işlemi her zaman sonucu küçültür." diyen bir arkadaşınıza hangi örneği göstererek cevap verirsiniz?
d) 36 sayısını hangi sayıya bölersek sonuç 144 olur?

a) Değerler

I. 36 : (1/2)
Bölmede ikinci sayı ters çevrilip çarpılır:
36 · (2/1) = **72**
Anlamı: 36'nın içinde 72 tane yarım vardır.

II. 36 · 2
Doğrudan çarpma: **72**

III. 36 : 2 · 4
Çarpma ile bölme aynı önceliktedir, soldan sağa gidilir:
36 : 2 = 18 → 18 · 4 = **72**

IV. 36 · (1/2) : (1/4)
Yine soldan sağa:
36 · (1/2) = 18 → 18 : (1/4) = 18 · 4 = **72**

b) Gruplama
Dört ifadenin de değeri **72**'dir; yani **hepsi birbirine eşittir**.

Tek bir grup oluşur: {I, II, III, IV}

Bu ilginç bir sonuçtur: Farklı işlemler kullanılmasına rağmen hepsi aynı sayıya ulaşmıştır. Sebebi, "1/2'ye bölmek" ile "2 ile çarpmak" işlemlerinin aynı anlama gelmesidir.

c) "Bölme her zaman küçültür" iddiası
Bu iddia **yanlıştır**. En açık karşı örnek **I. ifadedir**:
36 : (1/2) = **72**
Bölünen 36 iken sonuç 72 çıktı; yani sonuç **büyüdü**.

devamı →

13 *(çözümün devamı)*

Kural şudur:
- **1'den büyük** bir sayıya bölmek sonucu küçültür.
- **1'e** bölmek sonucu değiştirmez.
- **1'den küçük pozitif** bir sayıya bölmek sonucu **büyütür**.

Bunun sezgisel açıklaması şudur: Bölme "içinde kaç tane var?" sorusudur. Bölen küçüldükçe bir bütünün içine daha çok sayıda sığar.

d) 36'yı hangi sayıya bölersek 144 bulunur?
Aranan sayıya **k** diyelim: 36 : k = 144

Sonuç 144, bölünen 36'nın **4 katıdır**. Demek ki 36'nın içinde k sayısından 144 tane vardır; o hâlde k, 1'den küçük olmalıdır.

k = 36 : 144 = 36/144
Pay ve paydayı 36'ya bölelim:
36/144 = **1/4**

Kontrol: 36 : (1/4) = 36 · 4 = 144 ✓

a) Dördü de 72 b) Hepsi eşit c) 36 : (1/2) = 72 d) 1/4

14 Bir hastanede görev yapan **240** sağlık çalışanının **5/8**'i hemşiredir. Hemşirelerin **2/5**'i gece vardiyasında çalışmaktadır. Hemşire olmayan çalışanların ise **1/3**'ü doktordur.

a) Hastanede kaç hemşire çalışmaktadır?
b) Gece vardiyasında çalışan hemşire sayısı kaçtır?
c) Hastanede kaç doktor çalışmaktadır?
d) Doktor sayısı, gece vardiyasındaki hemşire sayısının kaçta kaçıdır?
e) Doktor sayısı, tüm çalışanların kaçta kaçıdır?

a) Hemşire sayısı
Bütün (240) biliniyor, parçası soruluyor; çarpma yapılır:
240 · (5/8) = (240 : 8) · 5 = 30 · 5 = **150 hemşire**

b) Gece vardiyasındaki hemşireler
Bu kez bütün, **hemşire sayısıdır** (150). 2/5 kesri hemşirelere aittir:
150 · (2/5) = (150 : 5) · 2 = 30 · 2 = **60 hemşire**

Uyarı: Burada 240 · (2/5) = 96 demek yanlış olurdu. Her kesrin kendi bütünü vardır.

c) Doktor sayısı
Önce hemşire olmayanları bulalım:
240 − 150 = **90 kişi**

Doktorlar, hemşire olmayanların 1/3'üdür:
90 · (1/3) = **30 doktor**

devamı →

14 *(çözümün devamı)*

Aynı sonuca kesirlerle de ulaşılabilir: Hemşire olmayanların oranı 1 − 5/8 = 3/8'dir.
Doktorların tüm çalışanlara oranı:
(3/8) · (1/3) = 3/24 = **1/8** → 240 · (1/8) = **30** ✓

d) Doktor sayısının gece vardiyasındaki hemşirelere oranı
Aranan kesrin payı doktor sayısı, paydası gece vardiyasındaki hemşire sayısıdır:
30/60
Pay ve paydayı 30'a bölelim:
30/60 = **1/2**

Yani doktor sayısı, gece vardiyasındaki hemşire sayısının **yarısıdır**.

e) Doktor sayısının tüm çalışanlara oranı
30/240
Pay ve paydayı 30'a bölelim:
30/240 = **1/8**

Bu sonuç (c) şıkkında kesirlerle bulduğumuz oranla aynıdır ✓

Özet tablo:
Hemşire: 150 · Gece vardiyası: 60 · Doktor: 30 · Diğer çalışanlar: 90 − 30 = **60**
Kontrol: 150 + 30 + 60 = **240** ✓

a) 150 b) 60 c) 30 d) 1/2 e) 1/8

15 Aşağıdaki koşulların tamamını sağlayan bir problem yazınız.

- Problemde önce bir bütünün **bir kesir kadarı** alınmalıdır.
- Sonra **kalanın** bir kesri alınmalıdır.
- En sonda geriye kalan miktar **sayı olarak** verilip bütün sorulmalıdır.
- Bütün, **200'den küçük** bir doğal sayı olmalıdır.

a) Problemini yazınız.
b) Problemini adım adım çözünüz.
c) Bulduğun bütünü kullanarak her adımı sayıya çevirip cevabını kontrol ediniz.
d) Problemi kurarken sayıları neden bu şekilde seçtiğinizi açıklayınız.

Bu soruda tek bir doğru cevap yoktur; koşulları sağlayan her problem kabul edilir. Aşağıda örnek bir çözüm verilmiştir.

a) Örnek problem

"Bir kavanozdaki bilyelerin 1/5'i mavi, kalan bilyelerin 1/4'ü yeşildir. Geriye 72 bilye kalmıştır. Kavanozda başlangıçta kaç bilye vardır?"

b) Çözüm

devamı →

15 *(çözümün devamı)*

1. adım — Mavi bilyelerin payı
Bütün: **1**
Mavi: **1/5**

2. adım — Kalan oran
1 − 1/5 = 5/5 − 1/5 = **4/5**

3. adım — Yeşil bilyelerin bütüne göre payı
Yeşil, kalanın 1/4'üdür:
(4/5) · (1/4) = 4/20 = **1/5**

4. adım — Geriye kalan oran
1 − 1/5 − 1/5 = 5/5 − 2/5 = **3/5**

5. adım — Bütünü bulma
Geriye kalan 3/5 bize 72 bilye olarak verilmiştir. Parça biliniyor, bütün soruluyor; bölme yapılır:
72 : (3/5) = 72 · (5/3) = 24 · 5 = **120 bilye**

120 sayısı 200'den küçük bir doğal sayıdır; koşul sağlanmıştır ✓

c) Kontrol
Mavi: 120 · (1/5) = **24**
Kalan: 120 − 24 = **96**
Yeşil: 96 · (1/4) = **24**
Geriye kalan: 120 − 24 − 24 = **72** ✓

Geriye kalan sayı problemde verilen 72 ile aynı çıktı; problem tutarlıdır.

d) Sayılar neden böyle seçildi?

1. Paydalar **5** ve **4** seçildi; çünkü bu sayılar 120'yi kalansız böler ve her adımda tam sayı bilye elde edilir. Bilye sayısı kesirli çıkarsa problem gerçekçi olmazdı.

2. Geriye kalan miktar olarak **72** seçildi; çünkü 72 sayısı 3'e tam bölünür ve 72 : (3/5) işlemi tam sayı verir.

3. Kesirler **1'den küçük** seçildi; böylece her adımda gerçekten bir miktar geriye kalır ve problem üçüncü adıma kadar sürebilir.

Problem kurarken izlenecek pratik yol: Önce bütünü seç (burada 120), sonra kesirleri bu sayıyı bölen paydalardan seç, en son geriye kalan miktarı hesaplayıp problemin içine yaz. Böylece çözümün tam sayılarla ilerlemesi garanti olur.

Örnek: 120 bilye (koşulları sağlayan her problem geçerlidir)