KONU ANLATIMLI SORU ÇÖZÜMLERİ

Çok Adımlı İşlemler ve Rasyonel Sayılarla Problem Çözme

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge **CC BY-NC 4.0** lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabilir.

ÇÖZÜMLÜ SORU 1 İşlem önceliği ve parantezin yeri

Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.
a) $-4^2 + (-4)^2$
b) $24 : (-2)^3 \cdot 3$
c) $10 - [3 \cdot (2 - 5) + 5]$
d) Bulduğunuz üç sonucu **küçükten büyüğe** sıralayınız.

1 a) İki üslü ifadenin farkı parantezden geliyor

-4^2 ifadesinde eksi **parantez dışındadır**; üs yalnızca 4'e aittir.

$-4^2 = -(4 \cdot 4) =$ **-16**

$(-4)^2$ ifadesinde eksi **parantez içindedir**; taban -4'tür. Üs çift olduğu için sonuç pozitiftir.

$(-4)^2 = (-4) \cdot (-4) =$ **$+16$**

Toplayalım:

$-16 + 16 =$ **0**

2 b) Çarpma ve bölme soldan sağa

Önce üslü işlemi hesaplayalım:

$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) =$ **-8**

İfade şu hâle geldi: $24 : (-8) \cdot 3$

Burada hem bölme hem çarpma var. İkisi de **aynı önceliktedir**, bu yüzden **soldan sağa** gidilir. Soldaki işlem bölmedir:

$24 : (-8) =$ **-3**

Sonra çarpma:

$(-3) \cdot 3 =$ **-9**

Uyarı: Önce $8 \cdot 3 = 24$ yapıp $24 : 24 = 1$ demek **yanlıştır**. Çarpmanın bölmeden önce geldiği gibi bir kural yoktur.

3 c) İç içe parantezler

En içteki parantezden başlarız:

$2 - 5 =$ **-3** $\rightarrow$ $10 - [3 \cdot (-3) + 5]$

Köşeli parantezin içinde önce çarpma yapılır:

$3 \cdot (-3) =$ **-9** $\rightarrow$ $10 - [-9 + 5]$

Köşeli parantezin içindeki toplama:

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 1 **İşlem önceliği ve parantezin yeri** (devam)

$-9 + 5 = \mathbf{-4} \rightarrow 10 - (-4)$

Son adım:

$10 - (-4) = 10 + 4 = \mathbf{14}$

4 d) Sonuçları sıralayalım

Bulduğumuz üç değer:

a) **0** · b) **−9** · c) **14**

Negatif sayı her zaman sıfırdan ve pozitif sayılardan küçüktür:

−9 < 0 < 14

Küçükten büyüğe sıralama: **b, a, c**

Sonuç: −9 < 0 < 14

Sonuç: a) 0 b) −9 c) 14 d) −9 < 0 < 14

ÇÖZÜMLÜ SORU 2 **Kesir çizgisiyle verilen işlemler**

Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.
a) Payı 1/2 + 1/3, paydası 5/6 olan kesir
b) 3 − (payı 4, paydası 2 + 2/3 olan kesir)
c) (payı 2/3, paydası 4/9 olan kesir) − (payı 1/2, paydası 3/4 olan kesir)
d) (c) şıkkındaki iki kesirden hangisi daha büyüktür, kaç fazladır?

1 a) Önce pay, sonra payda, en son bölme

Ana bölme çizgisi, payı paydadan ayıran uzun çizgidir. Önce **payı** tek bir kesir hâline getirelim:

$1/2 + 1/3 = 3/6 + 2/6 = \mathbf{5/6}$

Payda zaten tek bir kesirdir: **5/6**

Şimdi bölme yapalım. Paydayı ters çevirip payla çarparız:

$(5/6) : (5/6) = (5/6) \cdot (6/5) = 30/30 = \mathbf{1}$

Sonuç: 1

Pay ile payda eşit olduğu için sonuç 1 çıktı. Bu, kesir çizgisinin bölme olduğunun doğrudan bir kanıtıdır.

2 b) Paydadaki toplamayı bitirip bölelim

Önce paydadaki işlemi bitirelim:

$2 + 2/3 = 6/3 + 2/3 = \mathbf{8/3}$

Şimdi bölme:

$4 : (8/3) = 4 \cdot (3/8) = 12/8 = \mathbf{3/2}$

Son olarak dışarıdaki çıkarmayı yapalım:

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 2 **Kesir çizgisiyle verilen işlemler** (devam)

$3 - 3/2 = 6/2 - 3/2 =$ **3/2**

Sonuç: 3/2

Uyarı: Burada $3 - 4 = -1$ yapıp sonra bölmeye çalışmak **yanlış olur**. Kesir çizgisi bir parantez gibi çalışır; önce onun değeri bulunur.

3 **c) İki bölmeyi ayrı ayrı yapıp çıkaralım**

Birinci kesir:

$(2/3) : (4/9) = (2/3) \cdot (9/4) = 18/12 =$ **3/2**

İkinci kesir:

$(1/2) : (3/4) = (1/2) \cdot (4/3) = 4/6 =$ **2/3**

Çıkarma: Paydaları eşitleyelim (ortak payda 6):

$3/2 = 9/6$, $2/3 = 4/6$

$9/6 - 4/6 =$ **5/6**

Sonuç: 5/6

4 **d) Karşılaştırma ve fark**

(c) şıkkında bulduğumuz iki değer **3/2** ve **2/3**'tür.

3/2 kesri 1'den **büyük**, 2/3 kesri 1'den **küçüktür**. Bu yüzden hesap yapmadan da **3/2 daha büyüktür** denilebilir.

Fark zaten (c) şıkkında hesaplanmıştı:

$3/2 - 2/3 =$ **5/6**

Sonuç: 3/2 daha büyüktür ve 2/3'ten 5/6 fazladır.

Dikkat edilecek nokta: Bölme işleminde **değişme özelliği yoktur**. (2/3) : (4/9) ile (4/9) : (2/3) aynı sonucu vermez; ikincisi 2/3'tür.

Sonuç: a) 1 b) 3/2 c) 5/6 d) 3/2 daha büyüktür, farkı 5/6

ÇÖZÜMLÜ SORU 3 **Kalan üzerinden çok adımlı problem**

Ayşe bir kitabın sayfalarının **2/5**'ini pazartesi, **kalan sayfaların 3/8**'ini salı günü okumuştur. Geriye **45** sayfa kalmıştır.

a) Kitap kaç sayfadır?

b) Ayşe salı günü kaç sayfa okumuştur?

c) Pazartesi ile salı günü okunan sayfa sayılarını karşılaştırınız.

1 **a) Adım 1 — Pazartesiden sonra kalan oran**

Kitabın tamamını **1 bütün** kabul edelim.

Pazartesi okunan: **2/5**

Pazartesiden sonra kalan:

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 3 **Kalan üzerinden çok adımlı problem** (devam)

1 − 2/5 = 5/5 − 2/5 = **3/5**

Bundan sonraki kesir **kalanın** kesridir; yani 3/5'in içinden alınacaktır. Bu ayrımı kaçırmak bu tür soruların en sık hatasıdır.

2 **a) Adım 2 — Salı günü okunanın bütüne göre karşılığı**

Salı günü okunan, **kalanın 3/8**'idir:

(3/5) · (3/8) = 9/40

Yani salı günü okunan sayfalar, kitabın tamamının **9/40**'ıdır.

Uyarı: Burada doğrudan 3/8 demek yanlış olurdu. 3/8 kesri **kalana** aittir, kitabın tamamına değil.

3 **a) Adım 3 — Geriye kalan oran ve kitabın sayfa sayısı**

Geriye kalan oranı bulalım. Paydaları 40'ta eşitleyelim:

Pazartesi: 2/5 = 16/40

Salı: 9/40

Toplam okunan: 16/40 + 9/40 = **25/40**

Geriye kalan:

1 − 25/40 = 40/40 − 25/40 = 15/40 = **3/8**

Bu 3/8 bize **45 sayfa** olarak verilmiştir. Parça biliniyor, bütün soruluyor; o hâlde **bölme** yapılır:

45 : (3/8) = 45 · (8/3) = 15 · 8 = **120**

Kitap 120 sayfadır.

4 **b) Salı günü okunan sayfa sayısı**

Salı günü okunan, kitabın 9/40'ı idi:

120 · (9/40) = 3 · 9 = **27 sayfa**

Aynı sonucu ikinci bir yoldan da bulabiliriz:

Pazartesi okunan: 120 · (2/5) = 48 sayfa

Kalan: 120 − 48 = 72 sayfa

Salı okunan: 72 · (3/8) = **27 sayfa** ✓

Kontrol: 48 + 27 + 45 = **120** ✓

5 **c) İki günü karşılaştıralım**

Pazartesi **48**, salı **27** sayfa okunmuştur.

Fark: 48 − 27 = **21 sayfa**

Pazartesi günü salı gününden 21 sayfa fazla okunmuştur.

Oranlarla da bakılabilir: pazartesi 16/40, salı 9/40. Paydalar eşit olduğundan payları karşılaştırmak yeterlidir: 16 > 9.

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 3 **Kalan üzerinden çok adımlı problem** (devam)

Sonuç: Kitap 120 sayfa, salı günü 27 sayfa okunmuş, pazartesi 21 sayfa daha fazla okunmuştur.

Sonuç: a) 120 sayfa b) 27 sayfa c) Pazartesi 48, salı 27; pazartesi 21 sayfa fazla

ÇÖZÜMLÜ SORU 4 **Kesirlerle geometri problemi**

Bir dikdörtgenin uzun kenarı **24 cm**, kısa kenarı **15 cm**'dir. Uzun kenar, kendi uzunluğunun **1/4**'ü kadar kısaltılıyor; kısa kenar ise kendi uzunluğunun **2/5**'i kadar uzatılıyor.
a) Yeni kenar uzunluklarını bulunuz.
b) Yeni dikdörtgenin alanını bulunuz.
c) Alan ne kadar değişmiştir?
d) Çevre ne kadar değişmiştir?

1 **a) Yeni kenar uzunlukları**

Uzun kenar: Kendi uzunluğunun 1/4'ü kadar **kısaltılıyor**. Önce kısaltma miktarını bulalım:

$24 \cdot (1/4) = \mathbf{6\ cm}$

Yeni uzunluk: $24 - 6 = \mathbf{18\ cm}$

Kısa kenar: Kendi uzunluğunun 2/5'i kadar **uzatılıyor**:

$15 \cdot (2/5) = \mathbf{6\ cm}$

Yeni uzunluk: $15 + 6 = \mathbf{21\ cm}$

Dikkat: Her kesir **kendi kenarının** uzunluğuyla çarpılır. 1/4'ü 15 ile ya da 2/5'i 24 ile çarpmak yanlış olur.

2 **b) Yeni alan**

Dikdörtgenin alanı, kenar uzunluklarının çarpımıdır:

Yeni alan $= 18 \cdot 21 = \mathbf{378\ cm^2}$

İşlemi adım adım yapalım:

$18 \cdot 21 = 18 \cdot 20 + 18 \cdot 1 = 360 + 18 = \mathbf{378}$

3 **c) Alandaki değişim**

Önce eski alanı bulalım:

Eski alan $= 24 \cdot 15 = \mathbf{360\ cm^2}$

Değişim:

$378 - 360 = \mathbf{18\ cm^2}$

Alan 18 cm² artmıştır.

Bu sonuç şaşırtıcı gelebilir: bir kenar kısaldı, diğeri uzadı; üstelik ikisi de **6 cm** değişti. Buna rağmen alan aynı kalmadı.

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 4 **Kesirlerle geometri problemi** (devam)

Sebebi şudur: **Kenarlardaki eşit değişim, alanda eşit değişim yaratmaz.** Alan iki kenarın çarpımı olduğu için, hangi kenarın ne kadar değiştiği kadar **diğer kenarın ne olduğu** da sonucu etkiler.

4 **d) Çevredeki değişim**

Dikdörtgenin çevresi, kenar uzunlukları toplamının 2 katıdır.

Eski çevre = 2 · (24 + 15) = 2 · 39 = **78 cm**

Yeni çevre = 2 · (18 + 21) = 2 · 39 = **78 cm**

Çevre değişmemiştir.

Çünkü bir kenar 6 cm kısalırken diğeri 6 cm uzadı; kenarlar toplamı aynı kaldı. Çevre bir **toplama** işlemi olduğu için bu değişimler birbirini götürdü.

Sonuç: Çevre aynı kaldığı hâlde alan 18 cm² arttı. Bu, çevre ile alanın birbirinden bağımsız iki büyüklük olduğunu gösteren güzel bir örnektir.

Sonuç: a) 18 cm ve 21 cm b) 378 cm² c) 18 cm² artmıştır d) Çevre değişmemiştir (78 cm)