ÇÖZÜMLER

Cisimlerin Farklı Yönlerden Görünümleri ve Görünümlerden Yapı Oluşturma

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge **CC BY-NC 4.0** lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabilir.

1. Bölüm Soru 1–5

1 Zeminde yan yana **dört eş küp** dizilmiştir. Soldan ikinci ve üçüncü küplerin üzerine birer küp daha konulmuştur. Yapıda başka küp yoktur.

a) Önden görünümde kaç kare boyalıdır?
b) Üstten görünümde kaç kare boyalıdır?
c) Sağdan görünümde kaç kare boyalıdır?
d) Yapıdaki küp sayısı ile önden görünümdeki kare sayısı neden eşittir? Açıklayınız.

Önce yapıyı sütun sütun yazalım. Yapı **tek sıra** derinliğindedir; yani arkada hiç küp yoktur.

Soldan sağa sütun yükseklikleri:
1, 2, 2, 1

Toplam küp sayısı: 1 + 2 + 2 + 1 = **6 küp**

a) Önden görünüm
Önden bakınca her sütunun yüksekliği kadar kare görünür:
1 + 2 + 2 + 1 = **6 kare**

b) Üstten görünüm
Yukarıdan bakınca kat bilgisi kaybolur; yalnız taban planı görünür. Yapı zeminde yan yana dört kare kaplıyor:
4 kare

c) Sağdan görünüm
Sağdan bakınca yatay eksen **önden arkaya** olur. Yapı tek sıra derinliğinde olduğu için sağdan görünüm **tek sütunluk**tur.

O sütunun yüksekliği, yapının en yüksek noktasıdır: **2 kat**
2 kare

d) Küp sayısı neden önden görünümdeki kare sayısına eşit?
Çünkü yapı **tek sıra** derinliğindedir; hiçbir küp başka bir küpün arkasında saklanmıyor.

Önden bakan göz her küpü ayrı ayrı görüyor, bu yüzden kare sayısı küp sayısına eşit oldu.

Uyarı: Bu eşitlik yalnız tek sıralık yapılarda geçerlidir. Yapı iki sıra derin olsaydı, arkadaki küpler önden görünmez ve kare sayısı küp sayısından küçük olurdu.

Genel kural: **Önden görünümdeki kare sayısı, küp sayısından büyük olamaz.**

a) 6 kare b) 4 kare c) 2 kare d) Yapı tek sıra derinliğinde olduğu için

2 Eş küplerle oluşturulmuş bir yapıya aşağıdaki işlemler uygulanıyor.

I. Bir küpün üzerine küp koymak
II. Bir küpün arkasına küp koymak
III. Bir küpün sağına küp koymak
IV. İki katlı bir yığının en üstteki küpünü çıkarmak
V. Zeminde duran, üzerinde başka küp olmayan bir küpü çıkarmak
VI. İki katlı bir yığının üstteki küpünü alıp yapının yanındaki boş bir yere, zemine koymak

a) Bu işlemleri üstten görünümü değiştirenler ve değiştirmeyenler diye ikiye ayırınız.
b) Ayırırken kullandığınız ölçütü bir cümleyle yazınız.
c) Hangi işlemlerde önden görünüm de değişmez?

a) Sınıflandırma

Üstten görünüm, yapının **taban planı**dır. O hâlde şu soruyu soracağız: **Yapının zeminde kapladığı kareler değişti mi?**

I. Bir küpün üzerine küp koymak
Yeni küp, altındaki küple aynı kareye düşer. Taban planı aynı → **DEĞİŞMEZ**

II. Bir küpün arkasına küp koymak
Taban planına yeni bir kare eklenir → **DEĞİŞİR**

III. Bir küpün sağına küp koymak
Taban planına yeni bir kare eklenir → **DEĞİŞİR**

IV. İki katlı yığının üstteki küpünü çıkarmak
Altta hâlâ bir küp var; o kare boyalı kalır → **DEĞİŞMEZ**

V. Zeminde duran yalnız bir küpü çıkarmak
O karede başka küp kalmaz; taban planından bir kare eksilir → **DEĞİŞİR**

VI. Üstteki küpü alıp yandaki boş yere koymak
Eski yerde altta küp kaldığı için o kare boyalı kalır; ama yeni yere bir kare eklenir → **DEĞİŞİR**

Değiştirenler: II, III, V, VI
Değiştirmeyenler: I, IV

b) Ölçüt

Üstten görünüm ancak yapının **zeminde kapladığı kareler** değişirse değişir; yalnız yükseklik değişiyorsa değişmez.

c) Önden görünümün de değişmediği işlemler

Tek tek bakalım:
- **I:** Bir sütun yükseldi → önden değişir
- **II:** Yeni küp bir küpün tam arkasında, önden gizlenir → önden **değişmez**
- **III:** Yeni sütun eklendi → önden değişir
- **IV:** Bir sütun alçaldı → önden değişir
- **V:** Bir sütun yok oldu → önden değişir
- **VI:** Hem eski yerde alçalma hem yeni yerde sütun → önden değişir

devamı →

2 *(çözümün devamı)*

Cevap: Yalnız II. işlemde önden görünüm değişmez.

Dikkat: II. işlem üstten görünümü değiştiriyor ama önden görünümü değiştirmiyor; I. işlem ise tam tersi. Bu, iki görünümün **farklı bilgiler** taşıdığını gösteriyor.

a) Değişir: II, III, V, VI · Değişmez: I, IV c) Yalnız II

3 Bir yapının **üstten görünümü** 3 sütun ve 2 sıradan oluşan tam dolu bir dikdörtgendir.

Önden görünümünde sütunlar soldan sağa **2, 3, 1** kat yüksekliğindedir.

Sağdan görünümünde sıralar önden arkaya **3, 2** kat yüksekliğindedir.

a) Üstten görünümde kaç kare vardır?
b) Yapıda en çok kaç küp olabilir?
c) Yapıda en az kaç küp olabilir?
d) En çok ile en az küp sayısı arasındaki fark kaçtır? Bu fark ne anlama gelir?

a) Üstten görünümdeki kare sayısı
3 sütun ve 2 sıradan oluşan tam dolu dikdörtgen:
3 · 2 = **6 kare**

Demek ki yapı zeminde 6 yerde duruyor ve her yerde **en az bir** küp var.

b) En çok küp sayısı
Her kareye, kendi sütununun ve kendi sırasının sınırlarından **küçük olanını** yazalım.

Ön sıra (sıra sınırı 3):
- Sol-ön: min(2, 3) = **2**
- Orta-ön: min(3, 3) = **3**
- Sağ-ön: min(1, 3) = **1**

Arka sıra (sıra sınırı 2):
- Sol-arka: min(2, 2) = **2**
- Orta-arka: min(3, 2) = **2**
- Sağ-arka: min(1, 2) = **1**

Toplam: 2 + 3 + 1 + 2 + 2 + 1 = **11 küp**

c) En az küp sayısı
Her kare en az 1 olmak zorunda; toplam en az 6. Şimdi hangi karelerin zorunlu olarak daha yüksek olduğunu bulalım.

Orta sütun 3 kat olmalı. Değer 3'ü yalnız **orta-ön** karesi alabilir (orta-arka en çok 2 olabilir). O hâlde **orta-ön = 3** zorunludur.

Ön sıra 3 kat olmalı. Bu koşulu orta-ön = 3 zaten sağlıyor ✓

devamı →

3 *(çözümün devamı)*

Sol sütun 2 kat olmalı ve **arka sıra 2 kat olmalı.** Bu iki koşulu **tek bir kareyle** sağlayabiliriz: **sol-arka = 2** yaparsak hem sol sütun hem arka sıra 2'ye ulaşır.

Geriye kalan kareler 1 olabilir:
sol-ön = 1, orta-arka = 1, sağ-ön = 1, sağ-arka = 1

Toplam: 1 + 3 + 1 + 2 + 1 + 1 = **9 küp**

Kontrol: Sütun maksimumları: sol max(1,2) = 2 ✓, orta max(3,1) = 3 ✓, sağ max(1,1) = 1 ✓
Sıra maksimumları: ön max(1,3,1) = 3 ✓, arka max(2,1,1) = 2 ✓

d) Fark ve anlamı
11 − 9 = **2**

Bu fark, üç görünümün yapıyı **tek biçimde belirlemediğini** gösterir. Aynı üç görünümü veren, küp sayısı 9 ile 11 arasında değişen birden çok yapı vardır.

Belirsizliğin kaynağı, görünümlerin yalnız **en yüksek** noktayı bildirmesidir; onun arkasındaki ya da önündeki karelerin yüksekliği serbest kalır.

a) 6 kare b) 11 küp c) 9 küp d) Fark 2; görünümler yapıyı tek biçimde belirlemiyor

4 Bir yapı şöyle kurulmuştur: Zeminde soldan sağa **üç küp**, ayrıca en soldaki küpün **arkasında bir küp** ve en soldaki küpün **üzerinde bir küp** vardır. Yapıda toplam 5 küp bulunur.

Deniz bu yapının sağdan görünümünü çizerken şöyle düşünmüştür:

"Önden görünümde sütunlar soldan sağa 2, 1, 1 kattı. Sağdan bakınca da üç sütun göreceğim; o hâlde sağdan görünüm de **2, 1, 1** olur."

a) Deniz'in düşüncesindeki hatayı açıklayınız.
b) Sağdan görünümün doğru biçimini yazınız.
c) Doğru sağdan görünümde kaç kare boyalıdır?
d) Bu hatayı yapmamak için akılda tutulması gereken kuralı bir cümleyle yazınız.

a) Hata nerede?
Deniz, sağdan görünümün yatay ekseninin de **soldan sağa** olduğunu sanmıştır. Bu yanlıştır.

Sağdan bakan bir göz, yapının **sağ yüzünü** görür. Bu yüzden gözün önünde uzanan doğrultu **önden arkaya** doğrudur, soldan sağa değil.

Deniz'in hatasını hemen ele veren bir işaret var: Yapı yalnız **iki sıra** derinliğindedir; o hâlde sağdan görünüm **en çok iki sütun** olabilir. Üç sütunlu bir sağdan görünüm baştan imkânsızdır.

b) Doğru sağdan görünüm
Yapıyı sıra sıra inceleyelim:

Ön sıra: Soldan sağa üç küp var; ayrıca en soldakinin üzerinde bir küp daha var. Bu sıradaki en yüksek nokta **2 kat**tır.

devamı →

4 *(çözümün devamı)*

Arka sıra: Yalnız en soldaki küpün arkasındaki tek küp var. En yüksek nokta **1 kat**tır.

Sağdan görünüm, önden arkaya **2, 1** kat yüksekliğinde **iki sütundan** oluşur.

c) Boyalı kare sayısı
2 + 1 = **3 kare**

Deniz'in çizimi 2 + 1 + 1 = 4 kare olacaktı; hem sütun sayısı hem kare sayısı yanlıştı.

d) Akılda tutulacak kural
"Sağdan ve soldan görünümlerde yatay eksen **önden arkaya**dır; sütun sayısı yapının **derinliği** kadardır."

Hızlı kontrol yöntemi: Çizmeden önce görünümün kaç sütun olması gerektiğini belirle:
- Önden ve arkadan görünüm → yapının **genişliği** kadar sütun
- Sağdan ve soldan görünüm → yapının **derinliği** kadar sütun
- Üstten ve alttan görünüm → genişlik × derinlik kadar kare alanı

a) Sağdan görünümde eksen önden arkayadır b) 2, 1 kat (iki sütun) c) 3 kare

5 Bir öğrenci şöyle diyor:

"Bir yapının üstten görünümünde **6 kare** varsa o yapı **kesinlikle 6 küpten** oluşur."

a) Öğrenci haklı mıdır? Gerekçesiyle açıklayınız.
b) Üstten görünümü 6 kare olan ve 6 küpten oluşan bir yapı tarif ediniz.
c) Üstten görünümü 6 kare olan ve 6'dan fazla küpten oluşan bir yapı tarif ediniz.
d) Üstten görünümü 6 kare olan bir yapıda en az kaç küp vardır? Bu sayıya neden "en az" diyoruz?

a) Öğrenci haklı mıdır?
Haklı değildir.

Üstten görünüm, yapının zeminde kapladığı **taban planını** gösterir. Yukarıdan bakıldığında **kat bilgisi tamamen kaybolur**; üst üste duran küplerin hepsi tek bir kareye düşer.

Bu yüzden 6 kare yalnız şunu söyler: Yapı 6 farklı yerde duruyor ve her yerde **en az bir** küp var. Üst katlarda kaç küp olduğu hakkında hiçbir bilgi vermez.

b) 6 kare, 6 küp
Yapı **tek katlı** olsun:
Zeminde 3 sütun ve 2 sıralık tam dolu bir dikdörtgen (3 · 2 = 6 küp), üst katlarda hiç küp yok.

Üstten görünüm: 6 kare ✓ · Küp sayısı: 6 ✓

c) 6 kare, 6'dan fazla küp
Aynı tabanı alalım, ama bu kez bazı küplerin üzerine küp koyalım.

devamı →

5 *(çözümün devamı)*

Örneğin zemindeki 6 küpün **hepsinin** üzerine birer küp daha koyalım:
Küp sayısı: 6 + 6 = **12 küp**

Üstten görünüm yine **6 kare**dir; çünkü taban planı hiç değişmedi ✓

Hatta bu yapıya kat eklemeye devam edilebilir: üstten görünüm 6 kare kalırken küp sayısı istenildiği kadar büyütülebilir. Demek ki **üst sınır yoktur**.

d) En az küp sayısı
Üstten görünümdeki boyalı her karenin üzerinde **en az bir** küp bulunmalıdır. Altı kare için en az altı küp gerekir.

En az 6 küp vardır.

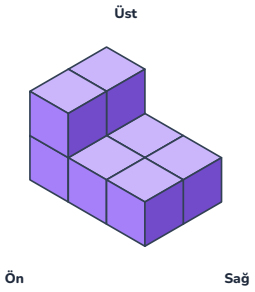
"En az" diyoruz; çünkü bu sayı **alt sınırdır**. Yapı tek katlıysa tam 6 küp olur; kat sayısı arttıkça küp sayısı büyür, ama asla 6'nın altına inemez.

Özet: Üstten görünümdeki kare sayısı, küp sayısı için bir **alt sınır** verir; kesin sayıyı vermez.

a) Haklı değil b) Tek katlı 3 × 2 yapı c) Her küpün üzerine küp: 12 küp d) En az 6 küp

2. Bölüm Soru 6–10

6 Aşağıda eş küplerle oluşturulmuş bir yapı verilmiştir.



a) Yapı kaç küpten oluşmaktadır?
b) Önden görünümde sütun yükseklikleri nelerdir?
c) Sağdan görünümde sıra yükseklikleri nelerdir?
d) Üstten görünümde kaç kare boyalıdır?
e) Küp sayısı ile üstten görünümdeki kare sayısı arasındaki fark ne anlama gelir?

a) Küp sayısı
Yapıyı kat kat sayalım.

Zemin katı: 3 sütun ve 2 sıradan oluşan tam dolu bir dikdörtgen:
3 · 2 = **6 küp**

İkinci kat: En soldaki sütunda, biri önde biri arkada **2 küp**

Toplam: 6 + 2 = **8 küp**

devamı →

6 *(çözümün devamı)*

b) Önden görünüm: sütun yükseklikleri
Her sütunun en yüksek noktasına bakalım:

- **Sol sütun:** zeminde ve ikinci katta küp var → **2 kat**
- **Orta sütun:** yalnız zeminde küp var → **1 kat**
- **Sağ sütun:** yalnız zeminde küp var → **1 kat**

Önden görünüm: **2, 1, 1** → toplam 4 kare

c) Sağdan görünüm: sıra yükseklikleri
Yatay eksen önden arkaya doğrudur; yapı iki sıra derinliğindedir.

- **Ön sıra:** Sol sütunda ikinci katta küp var → **2 kat**
- **Arka sıra:** Sol sütunda ikinci katta küp var → **2 kat**

Sağdan görünüm: **2, 2** → toplam 4 kare

d) Üstten görünüm
Taban planı 3 sütun ve 2 sıradan oluşan tam dolu bir dikdörtgendir:
3 · 2 = **6 kare**

e) Fark ne anlama gelir?
8 − 6 = **2**

Bu fark, **zemin katının üzerindeki küp sayısını** verir. Gerçekten de ikinci katta 2 küp vardı.

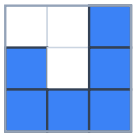
Genel kural: **Küp sayısı – üstten görünümdeki kare sayısı = zemin katı dışındaki küplerin sayısı**

Bu fark 0 ise yapı **tek katlıdır**; fark büyüdükçe yapı yükselir.

a) 8 küp b) 2, 1, 1 c) 2, 2 d) 6 kare e) Üst katlardaki küp sayısı

7 Aşağıda bir yapının önden, sağdan ve üstten görünümleri verilmiştir.

Önden görünüm



Sağdan görünüm



Üstten görünüm



a) Önden görünüme göre sütun yükseklikleri nelerdir?
b) Sağdan görünüme göre sıra yükseklikleri nelerdir?
c) Üstten görünümde kaç kare boyalıdır?
d) Yapıda kaç küp vardır? Taban planına kat sayılarını yazarak gösteriniz.

a) Sütun yükseklikleri (önden görünüm)
Soldan sağa üç sütun var:

- **Sol sütun:** alttan iki kare boyalı → **2 kat**
- **Orta sütun:** yalnız alt kare boyalı → **1 kat**
- **Sağ sütun:** üç kare de boyalı → **3 kat**

Yapının en yüksek noktası **3 kat**tır ve sağ sütundadır.

b) Sıra yükseklikleri (sağdan görünüm)
Yatay eksen önden arkaya; iki sütun var:

- **Ön sıra:** üç kare de boyalı → **3 kat**
- **Arka sıra:** alttan iki kare boyalı → **2 kat**

c) Üstten görünüm
Boyalı kareleri sayalım:
- Ön sırada soldan sağa **üç kare**
- Arka sırada yalnız soldaki **bir kare**

Toplam: **4 kare**

Demek ki sağ ve orta sütunların arkasında küp **yoktur**.

d) Küp sayısı
Taban planındaki dört kareye, kendi sütununun ve kendi sırasının yüksekliklerinden **küçüğünü** yazalım.

- **Sol-ön:** sütun 2, sıra 3 → min(2, 3) = **2**
- **Sol-arka:** sütun 2, sıra 2 → min(2, 2) = **2**
- **Orta-ön:** sütun 1, sıra 3 → min(1, 3) = **1**
- **Sağ-ön:** sütun 3, sıra 3 → min(3, 3) = **3**

Toplam: 2 + 2 + 1 + 3 = **8 küp**

Kontrol: Bulduğumuz yapının görünümlerini yeniden çıkaralım.
Sütun maksimumları: sol max(2,2) = 2 ✓, orta max(1) = 1 ✓, sağ max(3) = 3 ✓
Sıra maksimumları: ön max(2,1,3) = 3 ✓, arka max(2) = 2 ✓
Taban: 4 kare ✓

devamı →

7 *(çözümün devamı)*

Üç görünüm de tuttuğuna göre yapı doğru kuruldu. Bu örnekte en az ile en çok küp sayısı aynı çıkıyor; yani üç görünüm yapıyı **tek biçimde** belirliyor.

a) 2, 1, 3 b) 3, 2 c) 4 kare d) 8 küp

8 Bir yapı, ayrıt uzunluğu **3 cm** olan eş küplerle kurulmuştur. Bu yapının **üstten görünümü 5 kare**, **önden görünümü 7 kare**dir.

a) Görünümlerdeki bir karenin alanı kaç santimetrekaredir?
b) Üstten görünümün alanı kaç santimetrekaredir?
c) Önden görünümün alanı kaç santimetrekaredir?
d) Yapı en az kaç küpten oluşur? Gerekçesiyle açıklayınız.

a) Bir karenin alanı
Görünümlerdeki her kare, bir küpün bir yüzüne karşılık gelir. Küpün ayrıtı 3 cm olduğuna göre her yüz, kenarı 3 cm olan bir karedir.

Alan = 3 · 3 = **9 cm²**

b) Üstten görünümün alanı
Üstten görünümde 5 kare var:
5 · 9 = **45 cm²**

Bu aynı zamanda yapının **zeminde kapladığı alandır**.

c) Önden görünümün alanı
Önden görünümde 7 kare var:
7 · 9 = **63 cm²**

d) En az kaç küp?
İki ayrı alt sınırımız var:

1. Üstten görünümden: 5 boyalı karenin her birinin üzerinde en az bir küp olmalı → **en az 5 küp**

2. Önden görünümden: 7 boyalı karenin her biri için, o doğrultuda en az bir küp olmalı → **en az 7 küp**

İki alt sınırdan **büyük olanı** geçerlidir:
Yapı en az 7 küpten oluşur.

Neden büyük olanı? Çünkü her iki koşulun da aynı anda sağlanması gerekir. 5 küplük bir yapı önden görünümde 7 kare veremez.

Böyle bir yapı var mıdır? Evet. Örneğin tek sıra derinliğinde, sütun yükseklikleri 3, 2, 1, 1 olan bir yapının önden görünümü 7 kare, üstten görünümü 4 kare olur. Üstten görünümü 5 kare yapmak için bir küp arkaya alınır; böylece 7 küple her iki koşul da sağlanabilir.

a) 9 cm² b) 45 cm² c) 63 cm² d) En az 7 küp

9 Bir atölyede iki öğrenci ayrı ayrı yapı kurmuştur. Yapıların **önden görünümleri birbirinin aynısıdır**: yan yana **üç kare**.

Öğrencilerden biri, "Önden görünümlerimiz aynı olduğuna göre yapılarımız da aynıdır." diyor.

a) Öğrenci haklı mıdır? Gerekçesiyle açıklayınız.
b) Önden görünümü yan yana üç kare olan, küp sayıları farklı iki yapı tarif ediniz.
c) Bu iki yapıyı hangi görünüm ayırt eder?
d) İki yapının aynı olduğundan emin olmak için en az kaç görünüme bakmak gerekir?

a) Öğrenci haklı mıdır?
Haklı değildir.

Önden görünüm bir **siluet**tir. Önden bakan göz, bir küpün arkasında kaç küp olduğunu göremez. Bu yüzden aynı önden görünüme sahip sayısız farklı yapı kurulabilir.

b) İki farklı yapı

Yapı 1: Zeminde yan yana üç küp. Derinlik tek sıra.
Küp sayısı: **3**
Önden görünüm: yan yana 3 kare ✓

Yapı 2: Zeminde yan yana üç küp; ayrıca bu üç küpün her birinin arkasına birer küp daha.
Küp sayısı: **6**
Önden görünüm: yine yan yana 3 kare ✓ (arkadaki küpler tamamen gizleniyor)

İki yapının küp sayıları farklı olduğu hâlde önden görünümleri birebir aynı.

c) Hangi görünüm ayırt eder?
Üstten görünüm ayırt eder:
- Yapı 1'in üstten görünümü: yan yana **3 kare**
- Yapı 2'nin üstten görünümü: 3 sütun ve 2 sıra, yani **6 kare**

Sağdan görünüm de ayırt eder:
- Yapı 1: **1 kare** (tek sıra derinlik)
- Yapı 2: yan yana **2 kare** (iki sıra derinlik)

Demek ki önden görünümün kaçırdığı bilgi **derinlik**tir; onu veren görünümler üstten ve sağdandır.

d) En az kaç görünüm gerekir?
Tek görünüm asla yetmez. İki görünüm çoğu durumda yeter; ama her zaman değil.

Güvenli olan **üç görünümdür**: **önden + sağdan + üstten**. Bu üçlü, yapının genişliğini, derinliğini ve yüksekliğini birlikte verir.

Yine de üç görünüm bile bazı yapıları tam olarak belirlemeyebilir; o durumlarda küp sayısı için **en az** ve **en çok** değerleri hesaplanır.

a) Haklı değil b) 3 küplü ve 6 küplü yapılar c) Üstten ve sağdan d) Güvenli olan üç görünüm

10 Ece, üstten görünümü verilen bir yapının **alttan görünümünü** çizecektir. Üstten görünüm şöyledir: 3 sütun ve 2 sıradan oluşan bir ızgarada, **ön sırada üç kare**, **arka sırada yalnız soldaki kare** boyalıdır.

Ece, alttan görünümü bulmak için bu şekli **dikey** bir doğruya göre yansıtmıştır.

a) Ece'nin hatasını açıklayınız.
b) Alttan görünümü doğru biçimde tarif ediniz.
c) Hangi görünüm çiftleri dikey bir doğruya göre simetriktir?
d) Ece'nin çizdiği şekil aslında hangi görünüme benzer?

a) Hata nerede?
Ece **yanlış simetri doğrusunu** kullanmıştır.

Üst ile alt görünüm **yatay** bir doğruya göre simetriktir, dikey bir doğruya göre değil.

Bunun sebebi şudur: Yapıya alttan bakıldığında sağ-sol yönü değişmez; değişen **ön-arka** yönüdür. Üstten bakarken önde olan kısım, alttan bakarken de yine ön taraftadır; ama çizim kâğıda aktarılırken ön-arka sırası **ters döner**.

b) Doğru alttan görünüm
Üstten görünümdeki sıraları **ters çevirelim**: ön sıra arkaya, arka sıra öne gelsin.

Üstten görünüm:
- Ön sıra: üç kare
- Arka sıra: yalnız soldaki kare

Alttan görünüm:
- **Ön sıra: yalnız soldaki kare**
- **Arka sıra: üç kare**

Boyalı kare sayısı ikisinde de **4**'tür; yalnız sıraların yeri değişti.

c) Dikey doğruya göre simetrik olan çiftler
- **Önden** ile **arkadan** görünüm
- **Sağdan** ile **soldan** görünüm

Bu iki çiftte sağ-sol yönü ters döner, bu yüzden simetri doğrusu dikeydir.

Yatay doğruya göre simetrik olan çift:
- **Üstten** ile **alttan** görünüm

d) Ece'nin çizdiği şekil neye benzer?
Ece dikey simetri aldığı için sıralar yerinde kaldı, sütunlar ters döndü. Onun çizdiği şekil:
- Ön sıra: üç kare
- Arka sıra: yalnız **sağdaki** kare

Bu şekil, aynı yapının üstten görünümünün **ayna görüntüsüdür**; yani yapının soldan sağa ters çevrilmiş hâlinin üstten görünümüdür.

Başka bir deyişle Ece, farklı bir yapının üstten görünümünü çizmiş oldu. Doğru cevaba ulaşamamasının sebebi budur.

a) Yanlış simetri doğrusu b) Sıralar ters çevrilir c) Ön-arka ve sağ-sol çiftleri

3. Bölüm Soru 11–15

11 Bir yapının **üstten görünümü** 3 sütun ve 3 sıradan oluşan tam dolu bir karedir.

Önden görünümünde sütunlar soldan sağa **3, 2, 1** kat yüksekliğindedir.

Sağdan görünümünde sıralar önden arkaya **1, 2, 3** kat yüksekliğindedir.

a) Yapıda en çok kaç küp olabilir?
b) Yapıda en az kaç küp olabilir?
c) Bu üç görünüm tek bir yapı belirliyor mu?
d) En çok küp durumunda ikinci katta kaç küp bulunur?

Taban planı 3 × 3 = **9 kare**dir. Her kareye bir yükseklik yazacağız.

Sütun sınırları (soldan sağa): **3, 2, 1**
Sıra sınırları (önden arkaya): **1, 2, 3**

a) En çok kaç küp?
Her kareye, kendi sütununun ve kendi sırasının sınırlarından **küçüğünü** yazalım.

Sol sütun (sınır 3):
• ön: min(3, 1) = **1**
• orta: min(3, 2) = **2**
• arka: min(3, 3) = **3**
Toplam: 6

Orta sütun (sınır 2):
• ön: min(2, 1) = **1**
• orta: min(2, 2) = **2**
• arka: min(2, 3) = **2**
Toplam: 5

Sağ sütun (sınır 1):
• ön: min(1, 1) = **1**
• orta: min(1, 2) = **1**
• arka: min(1, 3) = **1**
Toplam: 3

Genel toplam: 6 + 5 + 3 = **14 küp**

Kontrol: Sütun maksimumları 3, 2, 1 ✓ · Sıra maksimumları: ön max(1,1,1) = 1 ✓, orta max(2,2,1) = 2 ✓, arka max(3,2,1) = 3 ✓

b) En az kaç küp?
Dokuz karenin her biri en az **1** olmak zorunda; bu 9 küp eder. Şimdi zorunlu fazlalıkları bulalım.

Değer 3 nerede olabilir? Yalnız **sol sütunda** (diğer sütunların sınırı daha küçük) ve yalnız **arka sırada** (diğer sıraların sınırı daha küçük). O hâlde **sol-arka = 3** zorunludur. Bu tek kare hem sol sütunun 3 koşulunu hem arka sıranın 3 koşulunu sağlar.

devamı →

11 *(çözümün devamı)*

Değer 2 nerede gerekli? Orta sütunun 2 olması ve orta sıranın 2 olması gerekiyor. **Orta-orta** karesi bu iki koşulu birden sağlar: min(2, 2) = 2, o hâlde **orta-orta = 2** seçilebilir.

Kalan yedi kare **1** olabilir.

Toplam: 9 + (3 − 1) + (2 − 1) = 9 + 2 + 1 = **12 küp**

Kontrol: Sütun maksimumları: sol max(1, 1, 3) = 3 ✓, orta max(1, 2, 1) = 2 ✓, sağ max(1,1,1) = 1 ✓
Sıra maksimumları: ön max(1,1,1) = 1 ✓, orta max(1,2,1) = 2 ✓, arka max(3,1,1) = 3 ✓

c) Yapı tek mi?
En az 12, en çok 14 küp çıktı. İki sayı farklı olduğuna göre **bu üç görünüm tek bir yapı belirlemiyor**.

Belirsizliğin sebebi, görünümlerin yalnız **en yüksek** noktaları bildirmesidir. Bir sütunun ya da sıranın sınırı bir kez sağlandıktan sonra, aynı sütundaki diğer karelerin yüksekliği serbest kalır.

d) En çok durumda ikinci kattaki küp sayısı
İkinci katta küp bulunması için o karenin yüksekliğinin **en az 2** olması gerekir. En çok durumundaki yükseklikleri tarayalım:

- Sol sütun: 1, 2, 3 → 2 ve 3 olanlar: **2 kare**
- Orta sütun: 1, 2, 2 → **2 kare**
- Sağ sütun: 1, 1, 1 → **0 kare**

Toplam: 2 + 2 = **4 kare**

İkinci katta 4 küp bulunur.

Doğrulama: Üçüncü katta yalnız sol-arka karesi var (yükseklik 3) → 1 küp.
Zemin katı 9 küp + ikinci kat 4 küp + üçüncü kat 1 küp = **14 küp** ✓

a) 14 küp b) 12 küp c) Belirlemiyor d) 4 küp

---

12 Ayrıt uzunlukları eşit **27 küp** kullanılarak 3 × 3 × 3 ölçülerinde tam dolu bir küp yapı oluşturulmuştur.

a) Bu yapının altı görünümü nasıldır?
b) Hiçbir görünümü değiştirmeden yapıdan kaç küp çıkarılabilir? Hangi küp ya da küpler?
c) Bu küp çıkarıldıktan sonra yapıda kaç küp kalır?
d) Aynı soruyu 4 × 4 × 4 ölçülerinde tam dolu bir yapı için yanıtlayınız.

a) Altı görünüm
Yapı her yönden bakıldığında tam dolu bir kare gibi görünür.

Altı görünümün hepsi **3 × 3 = 9 karelik tam dolu bir kare**dir.

Bu, yapının simetrik olmasının doğal sonucudur.

devamı →

12 *(çözümün devamı)*

b) Kaç küp çıkarılabilir?
Bir küpün çıkarılması hiçbir görünümü değiştirmiyorsa, o küp **altı yönden de gizlenmiş** olmalıdır.

Bir küpün önden gizlenmesi için önünde başka bir küp olmalı; sağdan gizlenmesi için sağında, üstten gizlenmesi için üstünde başka bir küp olmalı. Aynı şey arka, sol ve alt yönleri için de geçerlidir.

3 × 3 × 3 yapıda küplerin yerlerini düşünelim. Her yönde 3 küp var; bir küpün **her iki yanında** da küp bulunması için o küp o yönde **ortada** olmalıdır.

Üç yönde de ortada olan tek küp vardır: **yapının tam merkezindeki küp**.

Cevap: Yalnız 1 küp çıkarılabilir; o da tam ortadaki küptür.

Yüzeydeki bütün küpler en az bir yönden görünür, bu yüzden çıkarılmaları en az bir görünümü değiştirir.

c) Kalan küp sayısı
27 − 1 = **26 küp**

Bu yapının altı görünümü hâlâ 9 karelik tam dolu karedir; ama içinde bir boşluk vardır. Görünümler bu boşluğu **hiçbir biçimde ele vermez**.

d) 4 × 4 × 4 yapı
Aynı akıl yürütmeyi uygulayalım. Bir küpün her yönde iki yanında da küp bulunması için, o küp her yönde **uç sıralarda olmamalıdır**.

4 küplük bir kenarda uçlar 1. ve 4. sıralardır; geriye **2** seçenek kalır (2. ve 3. sıralar).

Üç yön için:
2 · 2 · 2 = **8 küp**

Cevap: 4 × 4 × 4 yapıda 8 küp çıkarılabilir. Bu küpler, yapının tam içindeki 2 × 2 × 2 çekirdeği oluşturur.

Kalan küp sayısı: 64 − 8 = **56 küp**

Genel kural: n × n × n bir yapıda gizlenmiş küp sayısı **$(n-2)^3$**'tür.
n = 3 için $(3-2)^3 = 1$ ✓ · n = 4 için $(4-2)^3 = 8$ ✓

a) Altısı da 3 × 3 tam kare b) 1 küp (merkez) c) 26 küp d) 8 küp

13 Aşağıdaki dört yapının tabanı 2 sütun ve 2 sıradan oluşan tam dolu bir karedir. Her karenin üzerindeki kat sayıları şöyledir:

Yapı I: sol-ön 2, sağ-ön 1, sol-arka 1, sağ-arka 1
Yapı II: sol-ön 1, sağ-ön 1, sol-arka 2, sağ-arka 1
Yapı III: sol-ön 2, sağ-ön 1, sol-arka 2, sağ-arka 1
Yapı IV: sol-ön 1, sağ-ön 2, sol-arka 1, sağ-arka 1

a) Her yapının küp sayısını bulunuz.
b) Önden görünümleri aynı olan yapıları gruplayınız.
c) Sağdan görünümleri aynı olan yapıları gruplayınız.
d) Üstten görünümleri için ne söylenebilir?
e) Bu üç görünüm dört yapıyı birbirinden ayırt etmeye yeter mi?

a) Küp sayıları
Kat sayılarını toplayalım.

- **Yapı I:** 2 + 1 + 1 + 1 = **5 küp**
- **Yapı II:** 1 + 1 + 2 + 1 = **5 küp**
- **Yapı III:** 2 + 1 + 2 + 1 = **6 küp**
- **Yapı IV:** 1 + 2 + 1 + 1 = **5 küp**

b) Önden görünümler
Önden görünüm, her **sütunun** en yüksek değerini verir.

- **Yapı I:** sol max(2, 1) = 2, sağ max(1, 1) = 1 → **(2, 1)**
- **Yapı II:** sol max(1, 2) = 2, sağ max(1, 1) = 1 → **(2, 1)**
- **Yapı III:** sol max(2, 2) = 2, sağ max(1, 1) = 1 → **(2, 1)**
- **Yapı IV:** sol max(1, 1) = 1, sağ max(2, 1) = 2 → **(1, 2)**

Önden görünümleri aynı olanlar: I, II ve III
Ayrı olan: IV

Dikkat: I, II ve III yapıları farklı küp sayılarına sahip olabilir (5, 5, 6), yine de önden görünümleri birebir aynıdır.

c) Sağdan görünümler
Sağdan görünüm, her **sıranın** en yüksek değerini verir.

- **Yapı I:** ön max(2, 1) = 2, arka max(1, 1) = 1 → **(2, 1)**
- **Yapı II:** ön max(1, 1) = 1, arka max(2, 1) = 2 → **(1, 2)**
- **Yapı III:** ön max(2, 1) = 2, arka max(2, 1) = 2 → **(2, 2)**
- **Yapı IV:** ön max(1, 2) = 2, arka max(1, 1) = 1 → **(2, 1)**

Sağdan görünümleri aynı olanlar: I ve IV
Ayrı olanlar: II ve III

devamı →

13 *(çözümün devamı)*

d) Üstten görünümler
Dört yapının da tabanı 2 × 2 tam doludur ve her karede en az bir küp vardır.

Dördünün de üstten görünümü aynıdır: 4 karelik tam dolu bir kare.

Yani üstten görünüm bu dört yapıyı **hiç ayırt etmez**.

e) Üç görünüm yeter mi?
Her yapının (önden, sağdan) ikilisini yazalım:

- **I:** (2,1) ve (2,1)
- **II:** (2,1) ve (1,2)
- **III:** (2,1) ve (2,2)
- **IV:** (1,2) ve (2,1)

Dört ikili de birbirinden **farklı**dır.

Cevap: Evet, önden ile sağdan görünüm birlikte dört yapıyı ayırt etmeye yeter.

Buradan çıkan ders: Tek bir görünüm yapıları gruplara ayırır; ancak **birden çok görünüm birlikte** kullanıldığında ayırt etme gücü artar. Bu örnekte üstten görünüm hiçbir katkı sağlamadı; çünkü dört yapının tabanı da aynıydı.

a) 5, 5, 6, 5 b) I, II, III c) I ve IV d) Dördü de aynı e) Yeter

14 Ayrıt uzunluğu **2 cm** olan eş küplerle bir yapı kurulmuştur. Bu yapının **üstten görünümü 6 kare**, **önden görünümü 8 kare**, **sağdan görünümü 5 kare**dir.

a) Bir küpün bir yüzünün alanı kaç santimetrekaredir?
b) Üç görünümün alanlarını ayrı ayrı bulunuz.
c) Yapı en az kaç küpten oluşur?
d) Bir küpün hacmi kaç santimetreküptür?
e) Yapının hacmi en az kaç santimetreküptür?

a) Bir yüzün alanı
Küpün ayrıtı 2 cm olduğuna göre her yüzü, kenarı 2 cm olan bir karedir.

Alan = 2 · 2 = **4 cm²**

b) Görünümlerin alanları
Her görünümde kare sayısını 4 cm² ile çarpalım.

- **Üstten görünüm:** 6 · 4 = **24 cm²**
- **Önden görünüm:** 8 · 4 = **32 cm²**
- **Sağdan görünüm:** 5 · 4 = **20 cm²**

devamı →

14 *(çözümün devamı)*

c) En az küp sayısı
Her görünüm bir **alt sınır** verir:

- Üstten 6 kare → en az **6** küp
- Önden 8 kare → en az **8** küp
- Sağdan 5 kare → en az **5** küp

Üç koşul da aynı anda sağlanmalıdır; bu yüzden **en büyük** alt sınır geçerlidir.

Yapı en az 8 küpten oluşur.

Neden en büyüğü? 6 küplük bir yapı önden görünümde 8 kare veremez; çünkü önden görünen her kare için ayrı bir küp gerekir.

d) Bir küpün hacmi
Küpün hacmi, ayrıt uzunluğunun üç kez çarpımıdır:
$2 \cdot 2 \cdot 2 =$ **$8\ cm^3$**

e) Yapının en az hacmi
Yapıda en az 8 küp bulunduğuna göre:

$8 \cdot 8 =$ **$64\ cm^3$**

Yapının hacmi en az 64 santimetreküptür.

Not: Buradaki "en az" ifadesi önemlidir. Görünümler küp sayısını kesin olarak vermediği için hacim de kesin olarak bulunamaz; yalnız bir alt sınır elde edilir.

Gerçek hacmi bulmak için yapının kendisini, yani her karenin üzerindeki kat sayısını bilmek gerekir.

a) 4 cm^2 b) 24, 32, 20 cm^2 c) En az 8 küp d) 8 cm^3 e) En az 64 cm^3

15 Aşağıdaki koşulların tamamını sağlayan bir yapı tasarlayınız.

- Yapı **7 eş küpten** oluşmalıdır.
- **Üstten görünümü 5 kare** olmalıdır.
- **Önden görünümü 4 kare** olmalıdır.
- Yapı **en fazla 2 kat** yüksekliğinde olmalıdır.

a) Yapınızın taban planını ve her karedeki kat sayısını yazınız.
b) Yapının önden, sağdan ve üstten görünümlerini tarif ediniz.
c) Dört koşulun da sağlandığını gösteriniz.
d) Aynı koşulları sağlayan farklı bir yapı daha bulunabilir mi? Açıklayınız.

Bu soruda tek bir doğru cevap yoktur; koşulları sağlayan her yapı kabul edilir. Aşağıda örnek bir çözüm ve yapının nasıl bulunduğu verilmiştir.

Önce koşulları çözümleyelim.
Üstten görünüm 5 kare olduğuna göre yapı zeminde **5 yerde** duruyor; yani en az 5 küp var. Toplam 7 küp olduğuna göre zemin katının üzerinde **7 − 5 = 2 küp** daha var.
Yapı en fazla 2 kat olduğuna göre bu 2 küp ikinci kattadır; yani **iki karenin yüksekliği 2**, kalan üç karenin yüksekliği **1**'dir.

a) Örnek yapı
Taban planı: 3 sütun ve 2 sıralık bir ızgarada, **sağ-arka karesi boş**, diğer 5 kare dolu.

Kat sayıları:
- **Sol-ön: 2**
- **Sol-arka: 2**
- Orta-ön: 1
- Orta-arka: 1
- Sağ-ön: 1

(Sağ-arka: boş)

Toplam küp: 2 + 2 + 1 + 1 + 1 = **7**

b) Görünümler

Önden görünüm (sütun maksimumları):
- Sol: max(2, 2) = **2**
- Orta: max(1, 1) = **1**
- Sağ: max(1) = **1**

Kare sayısı: 2 + 1 + 1 = **4**

Sağdan görünüm (sıra maksimumları):
- Ön: max(2, 1, 1) = **2**
- Arka: max(2, 1) = **2**

Kare sayısı: 2 + 2 = **4**

Üstten görünüm: 5 boyalı kare (sağ-arka boş)

devamı →

15 *(çözümün devamı)*

c) Koşulların kontrolü

- Küp sayısı 7 ✓
- Üstten görünüm 5 kare ✓
- Önden görünüm 4 kare ✓
- En yüksek nokta 2 kat ✓

Dört koşul da sağlandı.

d) Başka yapı var mı?
Evet, vardır.

Önden görünümün 4 kare olması için sütun maksimumları toplamı 4 olmalıdır. Üç sütunlu bir tabanda bu toplam **2 + 1 + 1** biçiminde dağılır; yani bir sütun 2 kat, diğer ikisi 1 kat olur.

İki katlı karelerin **ikisinin de aynı sütunda** bulunması gerekir (aksi hâlde iki sütun birden 2 kat olur ve önden görünüm 5 kare eder).

O hâlde 2 katlı sütunun hangisi olduğunu değiştirerek yeni yapılar elde ederiz:

- **Orta sütun** 2 katlı olsun: orta-ön = 2, orta-arka = 2, kalanlar 1
- **Sağ sütun** 2 katlı olsun: sağ-ön = 2, sağ-arka = 2, kalanlar 1
  (bu durumda boş kare başka bir yere alınır)

Ayrıca tabanın biçimi de değiştirilebilir; örneğin 5 kare bir L biçiminde de dizilebilir.

Sonuç: Koşullar bir yapıyı tek biçimde belirlemiyor; birden çok çözüm vardır. Bu, görünümlerin bir yapıyı her zaman tek biçimde belirlemediği gerçeğinin bir başka görünümüdür.

Örnek: 5 kare taban, sol sütunda iki kare 2 katlı, toplam 7 küp (başka çözümler de vardır)