KONU ANLATIMLI SORU ÇÖZÜMLERİ

Cisimlerin Farklı Yönlerden Görünümleri ve Görünümlerden Yapı Oluşturma

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge **CC BY-NC 4.0** lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabilir.

ÇÖZÜMLÜ SORU 1 — Görünümleri çizme ve simetriyle kontrol

Konu anlatımındaki **sekiz küplü** yapıyı düşününüz.
a) Önden görünümde her sütunun kaç kat olduğunu yazınız.
b) Sağdan görünümde her sıranın kaç kat olduğunu yazınız.
c) Üstten görünümde kaç kare boyalıdır?
d) Arkadan ve soldan görünümleri çizmek için hangi kısa yolu kullanabilirsiniz?

1 a) Önden görünüm: sütun yükseklikleri

Önden bakarken yatay eksen **soldan sağa**, dikey eksen **kat sayısı**dır.

Her sütunda, o doğrultudaki **en yüksek** küpün katı görünür:

- **Sol sütun:** Bu sütunda üç katta da küp var → **3 kat**
- **Orta sütun:** Yalnız zeminde küp var → **1 kat**
- **Sağ sütun:** Yalnız zeminde küp var → **1 kat**

Önden görünüm, soldan sağa **3, 1, 1** kat yüksekliğinde üç sütundan oluşur. Toplam boyalı kare: 3 + 1 + 1 = **5 kare**

Uyarı: Orta sütunda aslında **iki** küp var (biri önde, biri arkada); ama ikisi de zeminde olduğu için önden bakınca **tek kare** görünüyorlar.

2 b) Sağdan görünüm: sıra yükseklikleri

Sağdan bakarken yatay eksen **önden arkaya** doğrudur. Bu, en sık karıştırılan noktadır: soldan sağa değil, önden arkaya!

Her sıra için o sıradaki en yüksek küpün katına bakalım:

- **Ön sıra:** Bu sırada üç katta da küp var → **3 kat**
- **Arka sıra:** Zeminde ve ikinci katta küp var → **2 kat**

Sağdan görünüm, önden arkaya **3, 2** kat yüksekliğindedir. Toplam boyalı kare: 3 + 2 = **5 kare**

Yapının yalnız **iki sıra** derinliğinde olduğuna dikkat et; bu yüzden sağdan görünüm iki sütun geniştir.

3 c) Üstten görünüm: taban planı

Üstten bakıldığında kat bilgisi tamamen kaybolur; yalnız yapının zeminde kapladığı alan görünür.

Yapının taban planı:

- Ön sırada soldan sağa **üç kare**

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 1 **Görünümleri çizme ve simetriyle kontrol** (devam)

- Arka sırada soldaki **iki kare**

Toplam: 3 + 2 = **5 kare**

Önemli karşılaştırma: Yapıda 8 küp var, ama üstten görünümde yalnız 5 kare boyalı. Aradaki 3 fark, üst katlardaki küplerden geliyor; onlar üstten bakınca alttaki küplerle **aynı kareye** düşüyor.

Genel kural: **Küp sayısı, üstten görünümdeki kare sayısından küçük olamaz.**

4 d) Kısa yol: simetri

Karşıt görünümler birbirinin simetriğidir. Bu yüzden arkadan ve soldan görünümleri sıfırdan çizmeye gerek yoktur.

Arkadan görünüm: Önden görünümün **dikey** bir doğruya göre simetriğidir. Sütunları sağdan sola okumak yeterlidir:
Önden: 3, 1, 1 → Arkadan: **1, 1, 3**

Soldan görünüm: Sağdan görünümün **dikey** bir doğruya göre simetriğidir:
Sağdan: 3, 2 → Soldan: **2, 3**

Alttan görünüm: Üstten görünümün **yatay** bir doğruya göre simetriğidir; sıralar önden arkaya değil, arkadan öne okunur.

Böylece altı görünümün tamamı, yalnız üç görünüm çizilerek elde edilmiş olur.

Sonuç: a) Sütunlar 3, 1, 1 kat b) Ön sıra 3, arka sıra 2 kat c) 5 kare d) Simetriyle bulunur

ÇÖZÜMLÜ SORU 2 **Görünümlerden yapı kurma ve küp sayma**

Konu anlatımında **önden, sağdan ve üstten görünümleri** verilen yapıyı düşününüz.
a) Üstten görünümde kaç kare boyalıdır? Bu sayı ne anlama gelir?
b) Önden görünüme göre sütun yükseklikleri nedir?
c) Sağdan görünüme göre sıra yükseklikleri nedir?
d) Yapıda kaç küp vardır? Adım adım gösteriniz.

1 a) Taban planını okuyalım

Üstten görünüm 2 sütun ve 2 sıradan oluşuyor ve **dört karenin tamamı** boyalı.

Bu sayı, yapının zeminde kapladığı **alanı** gösterir; yani yapı 4 birim kare üzerinde duruyor.

Ayrıca şunu da söyler: Yapıda **en az 4 küp** vardır. Çünkü boyalı her karenin üzerinde en az bir küp bulunmalıdır.

2 b) Sütun yüksekliklerini okuyalım

Önden görünüme bakalım. Soldan sağa iki sütun var:

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 2 **Görünümlerden yapı kurma ve küp sayma** (devam)

- **Sol sütun:** iki kat da boyalı → **2 kat**
- **Sağ sütun:** yalnız alt kat boyalı → **1 kat**

Yani yapının en yüksek noktası **2 kat**tır ve bu yükseklik sol sütundadır.

3 **c) Sıra yüksekliklerini okuyalım**

Sağdan görünüme bakalım. Yatay eksen **önden arkaya** doğrudur; iki sıra var:

- **Ön sıra:** iki kat da boyalı → **2 kat**
- **Arka sıra:** yalnız alt kat boyalı → **1 kat**

Demek ki ikinci kattaki küp **ön sıra**dır. Bu bilgi olmasaydı, ikinci kattaki küpün önde mi arkada mı olduğunu bilemezdik.

4 **d) Küp sayısını bulalım**

Taban planındaki her kareye, **kendi sütununun** ve **kendi sırasının** yüksekliklerinden **küçük olanını** yazalım.

- **Sol-ön:** Sütun 2 kat, sıra 2 kat → min(2, 2) = **2**
- **Sol-arka:** Sütun 2 kat, sıra 1 kat → min(2, 1) = **1**
- **Sağ-ön:** Sütun 1 kat, sıra 2 kat → min(1, 2) = **1**
- **Sağ-arka:** Sütun 1 kat, sıra 1 kat → min(1, 1) = **1**

Toplam küp sayısı:
2 + 1 + 1 + 1 = **5 küp**

Kontrol: Bu yapının görünümlerini yeniden çizelim.
Önden: 2, 1 ✓ · Sağdan: ön 2, arka 1 ✓ · Üstten: 4 kare ✓

Üç görünüm de tuttuğuna göre yapı doğru kurulmuştur. İkinci kattaki tek küp **sol-ön** karenin üzerindedir.

Sonuç: a) 4 kare b) Sol 2, sağ 1 kat c) Ön 2, arka 1 kat d) 5 küp

ÇÖZÜMLÜ SORU 3 **Küp eklendiğinde görünümlerin değişimi**

Zeminde yan yana duran **üç küpten** oluşan bir yapı veriliyor.
a) Ortadaki küpün üzerine bir küp konursa hangi görünümler değişir?
b) Ortadaki küpün arkasına bir küp konursa hangi görünümler değişir?
c) Sağdaki küpün sağına bir küp konursa hangi görünümler değişir?
d) Üç işlemi karşılaştırdığında hangi görünüm küpün yerini en iyi ele veriyor?
Gerekçelendiriniz.

1 **Başlangıçtaki yapının görünümleri**

Önce başlangıç durumunu yazalım. Zeminde yan yana üç küp var.

- **Önden görünüm:** yan yana **3 kare** (hepsi 1 kat)

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 3 **Küp eklendiğinde görünümlerin değişimi** (devam)

- **Sağdan görünüm: 1 kare** (tek sıra, tek kat)
- **Üstten görünüm:** yan yana **3 kare**

Her değişikliği bu duruma göre karşılaştıracağız.

2 **a) Ortadaki küpün ÜZERİNE küp koymak**

Önden görünüm: Ortadaki sütun artık 2 kat. Daha önce o sütunda yalnız bir kare vardı, şimdi üstüne bir kare daha eklendi → **DEĞİŞİR**

Sağdan görünüm: Sağdan bakınca yapının en yüksek noktası görünür. Önce 1 kattı, şimdi 2 kat → **DEĞİŞİR**

Üstten görünüm: Yukarıdan bakınca yeni küp, altındaki küple **aynı kareye** düşer. Taban planı aynı kaldı → **DEĞİŞMEZ**

Cevap: Önden ve sağdan görünüm değişir.

3 **b) Ortadaki küpün ARKASINA küp koymak**

Önden görünüm: Yeni küp, ortadaki küpün tam arkasında duruyor. Önden bakan göz onu **göremez**; ortadaki kare zaten boyalıydı → **DEĞİŞMEZ**

Sağdan görünüm: Yapı artık iki sıra derinliğinde. Sağdan görünümün yatay ekseni önden arkaya olduğu için bir kare daha eklenir → **DEĞİŞİR**

Üstten görünüm: Taban planına yeni bir kare eklendi → **DEĞİŞİR**

Cevap: Sağdan ve üstten görünüm değişir.

(a) ile (b) şıkkını karşılaştıralım: İkisinde de bir küp eklendi, ama etkilenen görünümler farklı oldu. Belirleyici olan, küpün **hangi yöne** eklendiğidir.

4 **c) Sağdaki küpün SAĞINA küp koymak**

Önden görünüm: Yan yana kare sayısı 3'ten 4'e çıkar → **DEĞİŞİR**

Sağdan görünüm: Yapı hâlâ tek sıra derinliğinde ve tek kat. Sağdan bakan göz yine tek kare görür → **DEĞİŞMEZ**

Üstten görünüm: Taban planında yan yana kare sayısı 4 olur → **DEĞİŞİR**

Cevap: Önden ve üstten görünüm değişir.

5 **d) Hangi görünüm küpün yerini en iyi ele verir?**

Üç işlemi bir arada değerlendirelim:

- **Üzerine koymak:** üstten görünüm değişmedi
- **Arkasına koymak:** üstten görünüm **değişti**
- **Sağına koymak:** üstten görünüm **değişti**

Üstten görünüm, küpün nereye eklendiğini en iyi ayırt eden görünümdür: Yatay düzlemdeki her hareketi (sağa, sola, öne, arkaya) yakalar; yalnız **dikey** hareketi kaçırır.

Buna karşılık önden görünüm hem dikey hem yatay hareketi yakalar, ama **derinlik** yönündeki hareketi kaçırır.

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 3 **Küp eklendiğinde görünümlerin değişimi** (devam)

Sonuç: Bir yapıyı belirlemek için en güçlü ikili **üstten + önden** görünümdür. Yine de bu ikisi her zaman yetmez; belirsizlik kalırsa **sağdan** görünüme de bakılır.

Bu yüzden ders kitaplarında ve sınavlarda genellikle tam olarak bu üç görünüm verilir.

Sonuç: a) Ön ve sağ değişir b) Sağ ve üst değişir c) Ön ve üst değişir d) Üstten görünüm

ÇÖZÜMLÜ SORU 4 **Küp sayısının en az ve en çok değeri**

Bir yapının **üstten görünümü** 3 sütun ve 2 sıradan oluşan tam dolu bir dikdörtgendir. **Önden görünümü** soldan sağa 3, 2, 1 kat yüksekliğindedir. **Sağdan görünümü** ise önden arkaya 3, 3 kat yüksekliğindedir.
a) Üstten görünümde kaç kare vardır?
b) Sütun yükseklikleri nelerdir?
c) Yapıda en çok kaç küp olabilir?
d) Yapıda en az kaç küp olabilir? Bu üç görünüm tek bir yapı belirliyor mu?

1 **a) Üstten görünümdeki kare sayısı**

Üstten görünüm 3 sütun ve 2 sıradan oluşan **tam dolu** bir dikdörtgendir.

Kare sayısı: 3 · 2 = **6 kare**

Demek ki yapı zeminde 6 birim kare kaplıyor ve **6 farklı yerde** en az birer küp var.

2 **b) Sütun ve sıra yükseklikleri**

Önden görünüm (soldan sağa sütunlar):

- Sol sütun: **3 kat**
- Orta sütun: **2 kat**
- Sağ sütun: **1 kat**

Sağdan görünüm (önden arkaya sıralar):

- Ön sıra: **3 kat**
- Arka sıra: **3 kat**

İki sıranın da 3 kat olması, yapının hem önde hem arkada 3 katlık bir noktaya sahip olduğunu söylüyor.

3 **c) En çok kaç küp?**

Taban planındaki altı kareye **olabilecek en büyük** yükseklikleri yazalım. Her kare, kendi sütununun ve kendi sırasının sınırını aşamaz; o hâlde ikisinin **küçüğü** alınır.

Ön sıra (sıra sınırı 3):

- Sol-ön: min(3, 3) = **3**
- Orta-ön: min(2, 3) = **2**
- Sağ-ön: min(1, 3) = **1**

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 4 **Küp sayısının en az ve en çok değeri** (devam)

Arka sıra (sıra sınırı 3):

- Sol-arka: min(3, 3) = **3**
- Orta-arka: min(2, 3) = **2**
- Sağ-arka: min(1, 3) = **1**

Toplam:

3 + 2 + 1 + 3 + 2 + 1 = **12 küp**

Kontrol: Bu yerleşimde önden görünüm soldan sağa 3, 2, 1; sağdan görünüm önden arkaya 3, 3 olur. Verilenlerle uyuşuyor ✓

Yapıda en çok 12 küp olabilir.

4 d) En az kaç küp ve yapı tek mi?

En az sayıyı ararken de her kare üstten görünümde boyalı olduğu için **en az 1** olmak zorundadır. Şimdi zorunlu yükseklikleri bulalım.

Sıra koşulları: Ön sıranın 3 kat olması için ön sırada en az bir kare 3 olmalı; arka sıranın 3 kat olması için arka sırada da en az bir kare 3 olmalı.

3 değerini yalnız **sol sütundaki** kareler alabilir (orta sütun en çok 2, sağ sütun en çok 1 kat).

O hâlde **sol-ön = 3** ve **sol-arka = 3** olmak **zorundadır**.

Sütun koşulu: Orta sütunun 2 kat olması için orta sütundaki iki kareden **en az birinin** 2 olması yeterlidir; diğeri 1 kalabilir.

En az durumu:

- Sol-ön = 3, Sol-arka = 3 (zorunlu)
- Orta-ön = 2, Orta-arka = 1 (ya da tersi)
- Sağ-ön = 1, Sağ-arka = 1

Toplam: 3 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 = **11 küp**

Sonuç: Yapıda en az 11, en çok 12 küp vardır.

En az ile en çok farklı çıktığına göre bu üç görünüm **tek bir yapı belirlemiyor**. Belirsizlik orta sütundadır: 2 katlık küp önde de olabilir arkada da; hatta ikisi birden 2 kat olabilir.

Bu, görünümlerin bir yapıyı her zaman tek biçimde belirlemediğini gösteren güzel bir örnektir.

Sonuç: a) 6 kare b) Sütunlar 3, 2, 1 kat c) En çok 12 küp d) En az 11 küp; üç görünüm tek bir yapı belirlemez