KONU ANLATIMI · CEVAPLI

Cisimlerin Farklı Yönlerden Görünümleri ve Görünümlerden Yapı Oluşturma

Kazanımlar: MAT.7.2.1. Eş küplerle oluşturulmuş yapıların farklı yönlerden görünümlerini çizebilme · MAT.7.2.2. Farklı yönlerden görünümleri verilen yapıları oluşturabilme

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge **CC BY-NC 4.0** lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabilir.

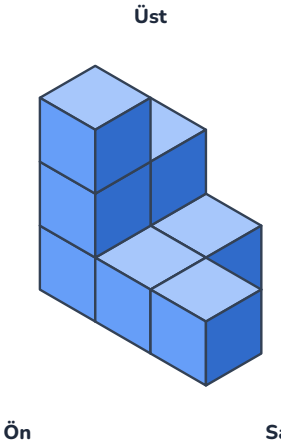
Yapıyı ve Bakış Yönlerini Tanıma

Eş küplerle oluşturulmuş bir yapıya **altı farklı yönden** bakılabilir:

- **Ön** ve **arka** (birbirinin karşısı)
- **Sağ** ve **sol** (birbirinin karşısı)
- **Üst** ve **alt** (birbirinin karşısı)

Bir yönden bakıldığında görülen şekle o yöndeki **görünüm** denir. Görünüm çizilirken **bakış açısına dik olan yüzeyler** çizilir; derinlik gösterilmez.

Bu yüzden görünümler **iki boyutlu**dur ve kareli kâğıda çizilir. Yapının kendisi ise **üç boyutlu**dur ve izometrik kâğıda çizilir.



Eş küplerle oluşturulmuş örnek yapının izometrik çizimi. Ön, sağ ve üst yönler işaretlenmiştir.

Yapıyı okuyalım. Bu yapı **8 eş küpten** oluşuyor. Küplerin yerini üç bilgiyle anlatabiliriz: her küp kaçıncı **sütunda** (soldan sağa), kaçıncı **sırada** (önden arkaya) ve kaçıncı **katta** bulunuyor?

- **En alt katta 5 küp** var: ön sırada soldan sağa üç küp, arka sırada ise yalnız soldaki iki küp.
- **İkinci katta 2 küp** var: en soldaki sütunda, biri önde biri arkada.
- **Üçüncü katta 1 küp** var: en soldaki, en öndeki küpün üzerinde.

İzometrik çizimde her küpün **üç yüzü** görünür: üst yüzü, ön yüzü ve sağ yüzü. Arkada kalan küpler kısmen ya da tamamen gizlenebilir; bu yüzden **çizime bakarak küp saymak** her zaman güvenilir değildir.

Şimdi bu yapının altı görünümünü inceleyelim.

Görünümleri Çizme

Bir görünüm çizilirken şu soru sorulur: **"O yönden bakan bir göz, hangi kareleri görür?"**

Her görünümde bir kare, o doğrultuda **en az bir küp** varsa boyanır. Arkada kaç küp olduğu görünümü değiştirmez; görünüm yalnız **siluet**tir.

Görünümlerin eksenleri şöyle okunur:
- **Önden / arkadan:** yatayda soldan sağa, dikeyde kat sayısı
- **Sağdan / soldan:** yatayda önden arkaya, dikeyde kat sayısı
- **Üstten / alttan:** yatayda soldan sağa, dikeyde önden arkaya

Yani üst ve alt görünümlerde **kat bilgisi kaybolur**; buna karşılık ön, arka, sağ ve sol görünümlerde **derinlik bilgisi kaybolur**.



Örnek yapının altı görünümü: önden, arkadan, sağdan, soldan, üstten ve alttan. Her görünüm kareli kâğıt üzerinde boyalı karelerle gösterilmiştir.

Görünümleri tek tek okuyalım.

Önden görünüm: Soldaki sütunda üç kat da dolu; ortadaki ve sağdaki sütunlarda yalnız alt kat dolu. Buradan yapının en yüksek noktasının **3 kat** olduğunu anlıyoruz. Boyalı kare sayısı: 3 + 1 + 1 = **5**

Sağdan görünüm: Yatay eksen bu kez **önden arkaya** doğrudur. Ön sırada üç kat, arka sırada iki kat görünüyor; yani yapı arkaya doğru **alçalıyor**. Boyalı kare sayısı: 3 + 2 = **5**

Üstten görünüm: Yukarıdan bakıldığında kat bilgisi tamamen kaybolur; yalnız yapının zemindeki **ayak izi** görünür. Burada ön sırada soldan sağa üç kare, arka sırada soldaki iki kare var. Boyalı kare sayısı: **5**

Önemli nokta: **Üstten görünümdeki kare sayısı, yapının kapladığı taban alanını verir; küp sayısını vermez.** Bu yapının üstten görünümünde 5 kare var, ama yapıda 8 küp var.

NOT **Karşıt görünümler birbirinin simetriğidir.**

- **Ön** ile **arka** görünüm, **dikey** bir doğruya göre simetriktir.
- **Sağ** ile **sol** görünüm, **dikey** bir doğruya göre simetriktir.
- **Üst** ile **alt** görünüm, **yatay** bir doğruya göre simetriktir.

Yukarıdaki görsellerde bunu kolayca doğrulayabilirsin: Önden görünümdeki sütunları sağdan sola okursan arkadan görünümü elde edersin.

Bu kuralın iki pratik sonucu vardır:
1. Bir yapının altı görünümünü çizmek için aslında **üçünü** çizmek yeterlidir; diğer üçü simetriyle bulunur.
2. Simetrik olması gereken iki görünüm birbirinin simetriği değilse, çizimlerden **birinde hata** vardır. Bu, çözümü kontrol etmenin en hızlı yoludur.

Görünüm	Yatay Eksen	Dikey Eksen	Kaybolan Bilgi
Önden	Soldan sağa	Kat sayısı	Derinlik (önden arkaya)
Arkadan	Sağdan sola	Kat sayısı	Derinlik (önden arkaya)
Sağdan	Önden arkaya	Kat sayısı	Genişlik (soldan sağa)
Soldan	Arkadan öne	Kat sayısı	Genişlik (soldan sağa)
Üstten	Soldan sağa	Önden arkaya	Yükseklik (kat sayısı)
Alttan	Soldan sağa	Arkadan öne	Yükseklik (kat sayısı)

ÖRNEK **Bir görünümdeki karenin ne anlama geldiğini düşünelim.**

Önden görünümde **soldaki sütunun en üst karesi** boyalı. Bu ne demektir?

Bu, "soldaki sütunda, üçüncü katta **en az bir** küp vardır" demektir. O katta arkada kaç küp olduğunu önden görünüm **söylemez**.

Şimdi tersini düşünelim: Önden görünümde bir kare **boyalı değilse**, o doğrultuda **hiç küp yoktur**.

Bu ayrım çok önemlidir:
- **Boyalı kare:** "en az bir küp var" (kaç tane olduğu bilinmez)
- **Boş kare:** "hiç küp yok" (kesin bilgi)

Yani görünümler **yokluk** hakkında kesin, **varlık** hakkında ise yalnız kısmi bilgi verir.

ETKİNLİK 1 **Aşağıdaki ifadelerden doğru olanların yanına "D", yanlış olanların yanına "Y" yazınız.**

a) D Bir yapının görünümü çizilirken bakış açısına dik olan yüzeyler çizilir.

b) Y Görünümler üç boyutlu çizimlerdir.

c) D Önden görünüm ile arkadan görünüm dikey bir doğruya göre simetriktir.

d) Y Üstten görünüm ile alttan görünüm dikey bir doğruya göre simetriktir.

e) Y Üstten görünümdeki kare sayısı, yapıdaki küp sayısına eşittir.

f) D Üstten görünümdeki kare sayısı, yapının zeminde kapladığı alanı gösterir.

g) D Bir görünümde boyalı olmayan kare, o doğrultuda hiç küp olmadığını gösterir.

h) Y Bir görünümde boyalı olan kare, o doğrultuda tam olarak bir küp olduğunu gösterir.

ı) D Altı görünümü çizmek için üç görünümü çizmek ve simetriden yararlanmak yeterlidir.

i) D Sağdan görünümde yatay eksen önden arkaya doğrudur.

j) D Farklı yapıların önden görünümleri aynı olabilir.

k) Y Bir yapıya küp eklendiğinde bütün görünümleri mutlaka değişir.

Görünümlerden Yapıyı Oluşturma

Bir yapının görünümleri verildiğinde yapının kendisi kurulabilir. Bunun için en kullanışlı yol, **üstten görünümün üzerine kat sayılarını yazmaktır**.

Adımlar:
1. **Üstten görünümü** çiz. Bu, yapının taban planıdır; hangi yerlerde küp olduğunu gösterir.
2. **Önden görünüme** bak. Her sütunun en yüksek kaç kat olduğunu belirle.
3. **Sağdan görünüme** bak. Her sıranın (önden arkaya) en yüksek kaç kat olduğunu belirle.
4. Taban planındaki her kareye, o karenin bulunduğu sütun ve sıra için elde edilen iki yükseklikten **küçük olanını** yaz.
5. Yazdığın sayılar kadar küpü üst üste dizerek yapıyı oluştur.

Dördüncü adımda küçük olanın seçilmesinin sebebi şudur: Bir kare, hem kendi sütununun hem kendi sırasının sınırını aşamaz.



Bir yapının önden, sağdan ve üstten görünümleri. Bu üç çizimden yapının kendisi kurulacaktır.

ÖRNEK **Üç görünümden yapıyı kuralım.**

1. Taban planı: Üstten görünüme bakalım. 2 × 2 = **4 karenin tamamı** boyalı. Demek ki zeminde **4 yerde** küp bulunuyor.

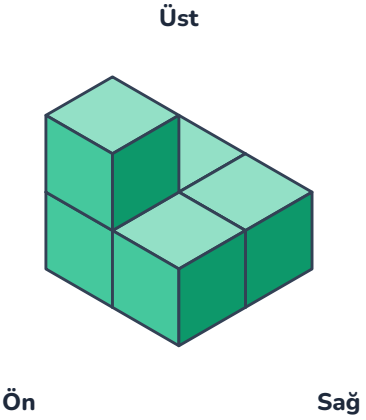
2. Sütun yükseklikleri (önden görünüm):
- Soldaki sütun: **2 kat**
- Sağdaki sütun: **1 kat**

3. Sıra yükseklikleri (sağdan görünüm):
- Ön sıra: **2 kat**
- Arka sıra: **1 kat**

4. Her kareye küçük olanı yazalım:
- Sol-ön: min(2, 2) = **2**
- Sol-arka: min(2, 1) = **1**
- Sağ-ön: min(1, 2) = **1**
- Sağ-arka: min(1, 1) = **1**

Toplam küp sayısı: 2 + 1 + 1 + 1 = **5 küp**

İkinci kattaki tek küp, **sol-ön** karenin üzerindedir. Önden görünüm onun sol sütunda, sağdan görünüm ise ön sırada olduğunu söylüyor; ikisi birleşince yeri tam olarak belirleniyor.



Önden, sağdan ve üstten görünümleri verilen yapının izometrik çizimi. Yapı beş eş küpten oluşur.

Kurduğumuz yapıyı kontrol edelim. Bir yapıyı görünümlerden kurduktan sonra, **yapının görünümlerini yeniden çizip** verilenlerle karşılaştırmak gerekir.

- **Önden:** Soldan sağa 2 ve 1 kat → verilen çizimle aynı ✓
- **Sağdan:** Önde 2 kat, arkada 1 kat → verilen çizimle aynı ✓
- **Üstten:** 2 × 2 karenin tamamı dolu → verilen çizimle aynı ✓

Üç görünüm de tuttuğuna göre yapı doğru kurulmuştur.

Neden üç görünüm gerekir? Yalnız önden ve üstten görünüm verilseydi, ikinci kattaki küpün **önde mi arkada mı** olduğunu bilemezdik. Sağdan görünüm bu belirsizliği ortadan kaldırıyor.

Yine de bazı durumlarda üç görünüm bile tek bir yapı belirlemeye yetmez; o zaman **en az kaç küp** ya da **en çok kaç küp** kullanıldığı sorulur.

NOT **Farklı yapıların aynı görünümü olabilir.**

Görünüm bir **siluet** olduğu için arkada gizlenen küpleri göstermez. Bu yüzden tek bir görünüme bakarak yapı hakkında kesin konuşulamaz.

Basit bir örnek: Zeminde yan yana iki küp düşünelim. Şimdi bu iki küpün arkasına iki küp daha ekleyelim. İki yapının da **önden görünümü aynıdır** (yan yana iki kare); ama biri 2, diğeri 4 küpten oluşur.

Ayırt etmek için **üstten** ya da **sağdan** görünüme bakmak gerekir:
• Birinci yapının üstten görünümü: yan yana **2 kare**
• İkinci yapının üstten görünümü: **2 × 2 = 4 kare**

Kural: Bir yapıyı tek bir görünümden kurmaya çalışma. En az **iki görünüm**, çoğu zaman **üç görünüm** gerekir.

ETKİNLİK 2 **Aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri doldurunuz.**

Görünüm	Simetriği Olan Görünüm	Simetri Doğrusu
Önden görünüm	**Arkadan görünüm**	**Dikey doğru**
Sağdan görünüm	**Soldan görünüm**	**Dikey doğru**
Üstten görünüm	**Alttan görünüm**	**Yatay doğru**
Arkadan görünüm	**Önden görünüm**	**Dikey doğru**
Alttan görünüm	**Üstten görünüm**	**Yatay doğru**
Soldan görünüm	**Sağdan görünüm**	**Dikey doğru**

ETKİNLİK 3 **Konu anlatımındaki sekiz küplü yapının görünümlerine bakarak aşağıdaki soruları yanıtlayınız.**

a) Yapı en fazla kaç kat yüksekliğindedir? **3 kat (önden görünümde sol sütun üç karedir)**

b) Üstten görünümde kaç kare boyalıdır? **5 kare**

c) Üstten görünümdeki kare sayısı ile küp sayısı neden farklıdır? **Üstten görünüm yalnız taban alanını gösterir; üst üste gelen küpler tek kare görünür**

d) Önden görünümde kaç kare boyalıdır? **5 kare (3 + 1 + 1)**

e) Sağdan görünümde ön sıradaki sütun kaç karedir? **3 kare (ön sırada üç kat vardır)**

f) Arkadan görünümü çizmek için önden görünüme ne yapılır? **Dikey bir doğruya göre simetriği alınır (sütunlar sağdan sola okunur)**

g) Alttan görünümü çizmek için üstten görünüme ne yapılır? **Yatay bir doğruya göre simetriği alınır (sıralar arkadan öne okunur)**

h) Yapının kaç küpten oluştuğu yalnız önden görünüme bakılarak bulunabilir mi? **Bulunamaz; arkadaki küpler önden görünümde gizlenir**

Yapı Değişince Görünümler Nasıl Değişir?

Bir yapıya küp **eklendiğinde** ya da yapıdan küp **çıkarıldığında** bütün görünümler değişmek zorunda değildir. Hangi görünümün değişeceğini anlamak için şu soruyu sormak yeterlidir:

"O yönden bakan göz, bu küpü görüyor muydu? Şimdi görüyor mu?"

Üç durum vardır:

• **Küp, zaten dolu olan bir doğrultuya ekleniyorsa** o yöndeki görünüm **değişmez**. Çünkü o kare zaten boyalıydı.
• **Küp, boş olan bir doğrultuya ekleniyorsa** o yöndeki görünüme **yeni bir kare eklenir**.
• **Küp çıkarıldığında**, o doğrultuda başka küp kalmamışsa görünümden **bir kare eksilir**; başka küp kalmışsa görünüm **değişmez**.

Bu yüzden "bir küp eklendi, hangi görünümler değişir?" sorusunda her yönü **ayrı ayrı** incelemek gerekir.

ÖRNEK **Küp eklemenin etkisini inceleyelim.**

Zeminde yan yana **üç küp** olan bir yapı düşünelim. Bu yapının:
• Önden görünümü: yan yana **3 kare**
• Sağdan görünümü: **1 kare**
• Üstten görünümü: yan yana **3 kare**

Durum 1 — Ortadaki küpün ÜZERİNE bir küp koyalım.
• Önden görünüm: ortadaki sütun iki kat olur → **değişir**
• Sağdan görünüm: bir kat daha görünür → **değişir**
• Üstten görünüm: taban planı aynı kaldı → **değişmez**

Durum 2 — Ortadaki küpün ARKASINA bir küp koyalım.
• Önden görünüm: yeni küp ortadaki küpün tam arkasında, önden bakınca gizleniyor → **değişmez**
• Sağdan görünüm: arkaya doğru bir kare eklenir → **değişir**
• Üstten görünüm: taban planına bir kare eklenir → **değişir**

Aynı sayıda küp eklendiği hâlde etkilenen görünümler farklı oldu.

NOT **Bir küp çıkarıldığında yapı bölünebilir.**

Görünüm sorularında sık sorulan bir soru şudur: **"Hangi küpler çıkarılırsa hiçbir görünüm değişmez?"**

Bir küpün çıkarılması hiçbir görünümü değiştirmiyorsa, o küp **altı yönden de gizlenmiş** demektir; yani her doğrultuda önünde ya da arkasında başka küpler vardır. Bu ancak büyük yapılarda mümkündür.

Küçük yapılarda ise durum tersidir: Neredeyse her küp en az bir görünümde **tek başına** görülür, bu yüzden çıkarılması o görünümü değiştirir.

Uyarı: Görünümler yapının **bir arada durup durmadığını** göstermez. Aradan bir küp çıkarıldığında yapı iki parçaya ayrılabilir; ama görünümler bunu belli etmez. Bu tür sorularda yapının fiziksel olarak ayakta kalıp kalmadığı ayrıca düşünülmelidir.

İşlem	Önden Görünüm	Sağdan Görünüm	Üstten Görünüm
Bir küpün **üzerine** küp koymak	Değişir	Değişir	**Değişmez**
Bir küpün **arkasına** küp koymak	**Değişmez**	Değişir	Değişir
Bir küpün **sağına** küp koymak	Değişir	**Değişmez**	Değişir
Tamamen gizlenmiş bir küpü çıkarmak	**Değişmez**	**Değişmez**	**Değişmez**

ÖRNEK **Görünümlerden küp sayısı aralığı bulalım.**

Bir yapının **üstten görünümü 2 × 2 kare**, **önden görünümü** soldan sağa 2 ve 1 kat, **sağdan görünümü** önden arkaya 2 ve 1 kat olsun.

Taban planındaki dört kareye yükseklik yazalım. Her kare, kendi sütununun ve kendi sırasının sınırını aşamaz:
- Sol-ön: min(2, 2) = **2**
- Sol-arka: min(2, 1) = **1**
- Sağ-ön: min(1, 2) = **1**
- Sağ-arka: min(1, 1) = **1**

En çok küp: 2 + 1 + 1 + 1 = **5**

En az küp sayısı için: Sol sütunun 2 kat olması için sol-ön ya da sol-arka karelerinden birinin 2 olması gerekir; sol-arka en çok 1 olabildiğine göre sol-ön mutlaka **2** olmalıdır. Diğer üç karenin de en az **1** olması gerekir (üstten görünümde boyalılar).

En az küp: 2 + 1 + 1 + 1 = **5**

En az ile en çok eşit çıktı; demek ki bu üç görünüm **tek bir yapı** belirliyor.

ETKİNLİK 4 **Zeminde yan yana duran üç küpten oluşan bir yapı düşününüz. Aşağıdaki değişiklikler yapıldığında hangi görünümlerin değişeceğini yazınız.**

a) Soldaki küpün üzerine bir küp konuluyor. **Önden ve sağdan görünüm değişir; üstten görünüm değişmez**

b) Ortadaki küpün arkasına bir küp konuluyor. **Sağdan ve üstten görünüm değişir; önden görünüm değişmez**

c) Sağdaki küpün sağına bir küp konuluyor. **Önden ve üstten görünüm değişir; sağdan görünüm değişmez**

d) Ortadaki küp çıkarılıyor. **Önden ve üstten görünüm değişir; sağdan görünüm değişmez**

e) Üç küpün de üzerine birer küp konuluyor. **Önden ve sağdan görünüm değişir; üstten görünüm değişmez**

f) Üç küpün de arkasına birer küp konuluyor. **Sağdan ve üstten görünüm değişir; önden görünüm değişmez**

ETKİNLİK 5 **Aşağıdaki soruları yanıtlayınız.**

a) Üstten görünümü 3 kare olan bir yapıda en az kaç küp vardır? **En az 3 küp (her kare için en az bir küp gerekir)**

b) Önden görünümü yan yana 4 kare olan bir yapıda en az kaç küp vardır? **En az 4 küp**

c) Üstten görünümü 2 × 3 = 6 kare, en yüksek sütunu 3 kat olan bir yapıda en çok kaç küp olabilir? **En çok 6 · 3 = 18 küp**

d) Bir yapının önden görünümü 5 kare ise, yapıda 5 küp olduğu söylenebilir mi? **Söylenemez; en az 5 küp vardır, arkada gizlenen küpler olabilir**

e) Bir yapının tek bir görünümü verilirse yapı kesin olarak kurulabilir mi? **Kurulamaz; en az iki, çoğu zaman üç görünüm gerekir**

f) Bir yapının üstten görünümündeki kare sayısı 4, küp sayısı 4 ise yapı hakkında ne söylenir? **Yapı tek katlıdır; bütün küpler zemindedir**