ÇÖZÜMLER

Dikdörtgenler Prizması, Kare Prizma ve Küp: Açınım ve Yüzey Alanı

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge **CC BY-NC 4.0** lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabilir.

1. Bölüm Soru 1–5

1 Bir ayrıtı **6 cm** olan bir küp veriliyor.

a) Küpün bir yüzünün alanı kaç cm^2'dir?
b) Küpün yüzey alanı kaç cm^2'dir?
c) Ayrıt uzunluğu iki katına çıkarsa yüzey alanı kaç katına çıkar?
d) Yeni yüzey alanını hesaplayınız.

a) Bir yüzün alanı
Küpün her yüzü bir **karedir**; kenar uzunluğu ayrıt uzunluğuna eşittir.

Bir yüzün alanı: $6 \cdot 6 =$ **$36\ cm^2$**

b) Yüzey alanı
Küpün **altı** yüzü vardır ve hepsi eştir:

$A = 6 \cdot 36 =$ **$216\ cm^2$**

Formülle: $A = 6a^2 = 6 \cdot 6^2 = 6 \cdot 36 = 216$ ✓

c) Ayrıt iki katına çıkarsa
Yeni ayrıt: $6 \cdot 2 =$ **12 cm**

Yeni bir yüzün alanı: $12 \cdot 12 = 144\ cm^2$
Eski bir yüzün alanı: $36\ cm^2$

$144 : 36 =$ **4**

Her yüzün alanı **4 katına** çıktı. Altı yüzün hepsi aynı oranda büyüdüğü için yüzey alanı da **4 katına** çıkar.

Neden 4 katı? Karenin alanı kenarın kendisiyle çarpımıdır. Kenar 2 katına çıkınca alan $2 \cdot 2 = 4$ katına çıkar.

d) Yeni yüzey alanı
$A = 6 \cdot 144 =$ **$864\ cm^2$**

Kontrol: $216 \cdot 4 = 864$ ✓ (c) şıkkındaki sonuçla uyuşuyor.

a) 36 cm² b) 216 cm² c) 4 katına d) 864 cm²

2 Aşağıdaki altı tanım veriliyor.

I. Tüm yüzleri kare olan prizma
II. Tabanları kare, yan yüzleri dikdörtgen olan prizma
III. Tüm yüzleri dikdörtgen olan prizma
IV. 8 köşesi, 12 ayrıtı ve 6 yüzü olan prizma
V. Tüm ayrıtları eşit uzunlukta olan prizma
VI. Karşılıklı yüzleri eş ve paralel olan prizma

a) Bu tanımlardan hangileri yalnız küpü belirtir?
b) Hangileri üç prizma türü için de doğrudur?
c) II. tanım hangi prizmaları kapsar?
d) Küp, kare prizma ve dikdörtgenler prizması arasındaki kapsama ilişkisini bir cümleyle yazınız.

a) Yalnız küpü belirten tanımlar

I. Tüm yüzleri kare olan prizma
Kare prizmanın yan yüzleri kare değildir (yükseklik taban ayrıtından farklıysa). Dikdörtgenler prizmasında da hiçbir yüz kare olmayabilir.
Bu tanım yalnız **küpü** belirtir ✓

V. Tüm ayrıtları eşit uzunlukta olan prizma
Küpte üç ayrıt ölçüsü de eşittir. Kare prizmada yükseklik farklıdır, dikdörtgenler prizmasında üçü de farklı olabilir.
Bu tanım da yalnız **küpü** belirtir ✓

Cevap: I ve V

b) Üçü için de doğru olan tanımlar

III. Tüm yüzleri dikdörtgen olan prizma
Kare de bir dikdörtgendir! Bu yüzden küpün ve kare prizmanın da tüm yüzleri dikdörtgendir.
Üçü için de doğru ✓

IV. 8 köşe, 12 ayrıt, 6 yüz
Üç prizmada da bu sayılar aynıdır. **Üçü için de doğru** ✓

VI. Karşılıklı yüzleri eş ve paralel
Bu, dikdörtgenler prizmasının temel özelliğidir; üçünde de vardır. **Üçü için de doğru** ✓

Cevap: III, IV ve VI

c) II. tanım hangilerini kapsar?
"Tabanları kare, yan yüzleri dikdörtgen" tanımı **kare prizmayı** belirtir.

Küp de bu tanıma uyar: Küpün tabanları karedir ve yan yüzleri de karedir; kare bir dikdörtgen olduğu için yan yüzleri dikdörtgendir.

O hâlde II. tanım **kare prizmaları ve küpleri** kapsar; kare olmayan tabanlı dikdörtgenler prizmalarını kapsamaz.

devamı →

2 *(çözümün devamı)*

d) Kapsama ilişkisi
"Her **küp** bir kare prizmadır; her **kare prizma** bir dikdörtgenler prizmasıdır. Tersi doğru değildir."

Yani küpler en dar, dikdörtgenler prizmaları en geniş gruptur. Bir prizma hakkında konuşurken hangi grupta olduğunu bilmek, hangi özellikleri kullanabileceğini belirler.

a) I ve V b) III, IV ve VI c) Kare prizma ve küp d) Küp ⊂ kare prizma ⊂ dikdörtgenler prizması

3 Aşağıdaki prizmaların yüzey alanlarını bulunuz.

a) Bir ayrıtı 9 cm olan küp
b) Taban ayrıtı 6 cm, yüksekliği 11 cm olan kare prizma
c) Ayrıtları 10 cm, 7 cm ve 4 cm olan dikdörtgenler prizması
d) Bulduğunuz üç sonucu büyükten küçüğe sıralayınız.

a) Küp, a = 9 cm
Bir yüzün alanı: $9 \cdot 9 = 81$ cm^2
Altı yüz: $A = 6 \cdot 81 =$ **486 cm^2**

b) Kare prizma, a = 6 cm, h = 11 cm
Tabanlar: $2 \cdot (6 \cdot 6) = 2 \cdot 36 =$ **72 cm^2**
Yan yüzler: $4 \cdot (6 \cdot 11) = 4 \cdot 66 =$ **264 cm^2**

$A = 72 + 264 =$ **336 cm^2**

Uyarı: Taban sayısı **2**, yan yüz sayısı **4**'tür. Bunları ters yazmak sık yapılan bir hatadır.

c) Dikdörtgenler prizması, 10 × 7 × 4
Üç farklı yüzün alanı:
$10 \cdot 7 =$ **70**
$10 \cdot 4 =$ **40**
$7 \cdot 4 =$ **28**

Her birinden ikişer tane:
$A = 2 \cdot (70 + 40 + 28) = 2 \cdot 138 =$ **276 cm^2**

devamı →

3 *(çözümün devamı)*

d) Sıralama
Bulduğumuz değerler: **486**, **336**, **276**

Büyükten küçüğe:
486 > 336 > 276

Sıralama: **a, b, c**

Mantık kontrolü: Küpün en büyük yüzü 81 cm^2; altı katı 486 eder ve bulduğumuz sonuç tam olarak budur (çünkü küpte bütün yüzler eştir). Kare prizmanın en büyük yüzü 66 cm^2; altı katı 396 olurdu, bulduğumuz 336 bundan küçük ✓

a) 486 cm² b) 336 cm² c) 276 cm² d) a > b > c

4 Kerem, ayrıtları **8 cm**, **5 cm** ve **3 cm** olan bir dikdörtgenler prizmasının yüzey alanını şöyle hesaplamıştır:

$8 \cdot 5 = 40$
$8 \cdot 3 = 24$
$5 \cdot 3 = 15$
Yüzey alanı = 40 + 24 + 15 = **79 cm^2**

a) Kerem'in hatasını açıklayınız.
b) Doğru yüzey alanını hesaplayınız.
c) Kerem'in bulduğu sonuç ile doğru sonuç arasındaki fark kaçtır?
d) Kerem'in hesapladığı 79 cm^2 aslında neyin alanıdır?

a) Hata nerede?
Kerem üç farklı yüzün alanını doğru hesaplamış; ama **her yüzden ikişer tane** olduğunu unutmuştur.

Dikdörtgenler prizmasının **6 yüzü** vardır. Bu altı yüz, üç farklı dikdörtgenden **ikişer** tane olacak biçimde oluşur:
- 8 × 5 yüzler: üst ve alt
- 8 × 3 yüzler: ön ve arka
- 5 × 3 yüzler: sağ ve sol

Kerem her çiftten yalnız **birini** saymış, yani prizmanın yarısını hesaplamıştır.

b) Doğru çözüm
$A = 2 \cdot (8 \cdot 5 + 8 \cdot 3 + 5 \cdot 3)$
$A = 2 \cdot (40 + 24 + 15)$
$A = 2 \cdot 79$
$A =$ **158 cm^2**

devamı →

4 *(çözümün devamı)*

c) Fark
158 − 79 = **79 cm²**

Fark, Kerem'in bulduğu sayının tam kendisi kadardır; çünkü doğru sonuç onun sonucunun **tam iki katıdır**.

d) 79 cm² neyin alanı?
79 cm², prizmanın **birbirine komşu üç yüzünün** toplam alanıdır.

Bunu şöyle düşünebiliriz: Prizmanın bir köşesinde birleşen üç yüz vardır (üst, ön ve sağ gibi). Kerem tam olarak bu üç yüzün alanını hesaplamıştır.

Prizmanın kalan üç yüzü de bunların tam karşısındadır ve onlara eştir; bu yüzden toplam alan iki katıdır.

Akılda tutulacak kural: "Üç farklı yüzün alanını bul, toplamını **2 ile çarp**." Formüldeki 2 çarpanı bu yüzden vardır.

a) İkiyle çarpmayı unutmuş b) 158 cm² c) 79 cm² d) Üç komşu yüzün alanı

5 İki öğrenci tartışıyor.

Ali: "Küp bir kare prizmadır."
Beril: "Öyleyse her kare prizma da bir küptür."

a) Ali haklı mıdır? Gerekçesiyle açıklayınız.
b) Beril haklı mıdır? Gerekçesiyle açıklayınız.
c) Beril'in iddiasını çürüten bir örnek veriniz.
d) Kare prizma formülünün küp formülüne nasıl dönüştüğünü gösteriniz.

a) Ali haklı mıdır?
Haklıdır.

Kare prizma, **tabanları kare** olan prizmadır. Küpün bütün yüzleri kare olduğuna göre tabanları da karedir.

Ayrıca kare prizmanın yan yüzlerinin dikdörtgen olması gerekir; küpte yan yüzler karedir ve **kare de bir dikdörtgendir**.

O hâlde küp, kare prizmanın bütün koşullarını sağlar: **Küp özel bir kare prizmadır** (yüksekliği taban ayrıtına eşit olanı).

b) Beril haklı mıdır?
Haklı değildir.

Beril, kapsama ilişkisini **ters çevirmiştir**. "Her küp bir kare prizmadır" demek, "her kare prizma bir küptür" demek değildir.

Benzer bir örnek: Her kare bir dikdörtgendir; ama her dikdörtgen kare değildir.

devamı →

5 *(çözümün devamı)*

c) Karşı örnek

Taban ayrıtı **5 cm**, yüksekliği **12 cm** olan bir kare prizma düşünelim.

- Tabanları 5 × 5 **kare** ✓ → kare prizmadır
- Yan yüzleri 5 × 12 **dikdörtgen**, kare değil → küp değildir

Yüzey alanını da hesaplayalım:

$A = 2 \cdot 25 + 4 \cdot 60 = 50 + 240 =$ **$290\ cm^2$**

Küp olsaydı bütün yüzler eş olurdu; burada iki farklı yüz ölçüsü var.

d) Formüllerin ilişkisi

Kare prizmanın yüzey alanı:

$A = 2a^2 + 4ah$

Küpte yükseklik taban ayrıtına eşittir: **h = a**. Bunu yerine yazalım:

$A = 2a^2 + 4a \cdot a$

$A = 2a^2 + 4a^2$

$A =$ **$6a^2$**

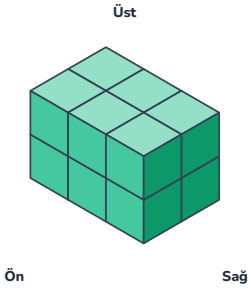
Küpün yüzey alanı formülünü elde ettik ✓

Bu, Ali'nin haklı olduğunun **cebirsel kanıtıdır**: Kare prizma formülü, h = a özel durumunda küp formülüne dönüşüyor.

a) Ali haklı b) Beril haklı değil c) 5 × 5 × 12 kare prizma d) h = a iken $2a^2 + 4a^2 = 6a^2$

2. Bölüm Soru 6–10

6 Aşağıda birim küplerle oluşturulmuş bir prizma verilmiştir.



a) Prizmayı oluşturan birim küp sayısını bulunuz.
b) Prizmanın ayrıt uzunluklarını birim cinsinden yazınız.
c) Prizmanın yüzey alanını birim kare cinsinden bulunuz.
d) Bu prizma bir kare prizma mıdır? Gerekçelendiriniz.
e) Prizma bir küp olsaydı, aynı yükseklikte kaç birim küp gerekirdi?

a) Birim küp sayısı
Prizmayı kat kat sayalım.

Zemin katı: Soldan sağa 3, önden arkaya 2 → 3 · 2 = **6 küp**
İkinci kat: Aynı biçimde **6 küp**

Toplam: 6 + 6 = **12 birim küp**

b) Ayrıt uzunlukları
- Soldan sağa: **3 birim**
- Önden arkaya: **2 birim**
- Aşağıdan yukarıya: **2 birim**

Ayrıtlar: **3, 2 ve 2 birim**

c) Yüzey alanı
Üç farklı yüzün alanını bulalım:
3 · 2 = **6** (üst ve alt)
3 · 2 = **6** (ön ve arka)
2 · 2 = **4** (sağ ve sol)

Her birinden ikişer tane:
$A = 2 \cdot (6 + 6 + 4) = 2 \cdot 16 = \mathbf{32\ br^2}$

Kontrol: Üst ve alt yüzlerde 6'şar, ön ve arkada 6'şar, sağ ve solda 4'er birim kare var: 6 + 6 + 6 + 6 + 4 + 4 = 32 ✓

d) Kare prizma mıdır?
Evet, kare prizmadır.

Bir prizmanın kare prizma olması için karşılıklı yüz çiftlerinden birinin **kare** olması gerekir.

Bu prizmanın ayrıtlarından **ikisi eşittir** (2 ve 2). Bu iki ayrıtın oluşturduğu yüzler **2 × 2 kare**dir; bunlar sağ ve sol yüzlerdir.

O hâlde prizma, tabanları 2 × 2 kare olan, yüksekliği 3 birim olan bir **kare prizmadır**.

devamı →

6 *(çözümün devamı)*

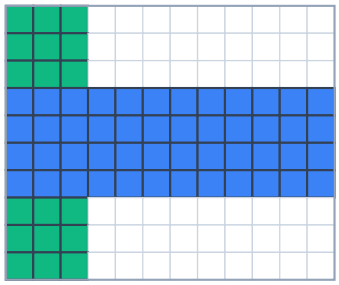
Formülle doğrulayalım: a = 2, h = 3 alalım.
$A = 2a^2 + 4ah = 2 \cdot 4 + 4 \cdot 2 \cdot 3 = 8 + 24 =$ **32 br²** ✓ (c) şıkkıyla aynı.

e) Küp olsaydı
Prizmanın yüksekliği (soldan sağa ölçüsü) **3 birim**dir. Küp olması için üç ayrıtın da 3 birim olması gerekirdi.
Gereken birim küp sayısı: 3 · 3 · 3 = **27 birim küp**

Şu an 12 küp var; **15 küp daha** gerekirdi.

a) 12 küp b) 3, 2, 2 birim c) 32 br² d) Evet, kare prizma e) 27 küp

7 Aşağıda birim kareli kâğıtta bir prizmanın açınımı verilmiştir. Yeşil bölgeler taban yüzlerini, mavi bölge yan yüzleri göstermektedir.



a) Taban yüzlerinin ölçüleri nedir? Bu prizma hangi türdendir?
b) Prizmanın ayrıt uzunluklarını yazınız.
c) Açınımdaki toplam birim kare sayısını bulunuz.
d) Yüzey alanını formülle hesaplayıp (c) ile karşılaştırınız.

a) Taban yüzleri ve prizma türü
Yeşil bölgeler **3 birim × 3 birim** ölçüsündedir; yani **karedir**.
Tabanları kare, yan yüzleri dikdörtgen olan prizmaya **kare prizma** denir.
Cevap: Bu bir kare prizmadır.
Küp müdür? Hayır. Mavi şerit 4 birim yüksekliğindedir; yani yan yüzler 3 × 4 dikdörtgendir, kare değildir.

b) Ayrıt uzunlukları
- Taban ayrıtları: **3 birim** (yeşil karenin kenarı)
- Yükseklik: **4 birim** (mavi şeridin yüksekliği)

Ayrıtlar: **3, 3 ve 4 birim**
Kontrol: Mavi şeridin genişliği 12 birimdir. Bu, dört yan yüzün yan yana dizilmiş hâlidir: 4 · 3 = 12 ✓

c) Toplam birim kare sayısı
Yeşil bölgeler: Her biri 3 · 3 = 9 birim kare; iki tane var:
2 · 9 = **18**

Mavi bölge: 12 · 4 = **48**

Toplam: 18 + 48 = **66 birim kare**

devamı →

7 *(çözümün devamı)*

d) Formülle hesaplayalım
Kare prizmanın yüzey alanı: $A = 2a^2 + 4ah$

$a = 3$, $h = 4$ alalım:
Tabanlar: $2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 =$ **18**
Yan yüzler: $4 \cdot 3 \cdot 4 =$ **48**

$A = 18 + 48 =$ **66 br²**

Karşılaştırma: (c) şıkkında birim kareleri sayarak da **66** bulmuştuk. İki sonuç aynı ✓

Çıkarılacak ders: Açınımın kapladığı alan, prizmanın yüzey alanına eşittir. Formül, açınımdaki birim kareleri saymanın kısa yoludur.

a) 3 × 3 kare taban, kare prizma b) 3, 3, 4 birim c) 66 birim kare d) 66 br², aynı

8 Dikdörtgenler prizması biçimindeki bir kutunun ayrıt uzunlukları **25 cm**, **20 cm** ve **10 cm**'dir. Kutunun **25 cm × 20 cm** ölçüsündeki üst yüzü açıktır.

a) Kutunun tam yüzey alanını bulunuz.
b) Üst yüz açık olduğuna göre kaplanacak alan kaç cm²'dir?
c) 1 m² kaç cm²'dir?
d) Kaplama için kaç metrekare kâğıt gerekir?

a) Tam yüzey alanı
Üç farklı yüzün alanını bulalım:
$25 \cdot 20 =$ **500 cm²** (üst ve alt)
$25 \cdot 10 =$ **250 cm²** (ön ve arka)
$20 \cdot 10 =$ **200 cm²** (sağ ve sol)

Her birinden ikişer tane:
$A = 2 \cdot (500 + 250 + 200)$
$A = 2 \cdot 950$
$A =$ **1900 cm²**

b) Kaplanacak alan
Üst yüz **25 × 20 = 500 cm²**'dir ve kaplanmayacaktır.

$1900 - 500 =$ **1400 cm²**

İkinci yol: Kaplanacak yüzleri doğrudan sayalım.
Alt yüz: 500
Ön ve arka: $2 \cdot 250 = 500$
Sağ ve sol: $2 \cdot 200 = 400$
Toplam: $500 + 500 + 400 =$ **1400 cm²** ✓

devamı →

8 *(çözümün devamı)*

c) 1 m² kaç cm²?
1 m = 100 cm olduğuna göre:
1 m² = 100 cm · 100 cm = **10 000 cm²**

d) Gereken kâğıt
1400 cm²'yi metrekareye çevirelim:
1400 : 10 000 = **0,14 m²**

Kaplama için 0,14 metrekare kâğıt gerekir.

Mantık kontrolü: 0,14 m², bir metrekarenin yaklaşık yedide biridir. Kutunun ölçüleri 25 cm civarında olduğuna göre bu makul bir sonuçtur ✓

Pratik not: Gerçek uygulamada kâğıdın kesim payı ve katlama payı olacağı için biraz fazlası alınır.

a) 1900 cm² b) 1400 cm² c) 10 000 cm² d) 0,14 m²

9 Bir atölyede iki kutu üretilecektir.

A kutusu: Ayrıtı **12 cm** olan küp
B kutusu: Taban ayrıtı **10 cm**, yüksekliği **18 cm** olan kare prizma

a) A kutusunun yüzey alanını bulunuz.
b) B kutusunun yüzey alanını bulunuz.
c) Hangi kutu daha az kâğıtla kaplanır?
d) Aradaki fark kaç cm²'dir?
e) "B kutusu daha uzun olduğu için daha çok kâğıt ister" demek her zaman doğru mudur?

a) A kutusu (küp, a = 12 cm)
Bir yüzün alanı: 12 · 12 = 144 cm²
A = 6 · 144 = **864 cm²**

b) B kutusu (kare prizma, a = 10 cm, h = 18 cm)
Tabanlar: 2 · (10 · 10) = 2 · 100 = **200 cm²**
Yan yüzler: 4 · (10 · 18) = 4 · 180 = **720 cm²**

A = 200 + 720 = **920 cm²**

c) Hangi kutu daha az kâğıt ister?
864 < 920 olduğuna göre **A kutusu (küp) daha az kâğıtla kaplanır**.

d) Fark
920 − 864 = **56 cm²**

B kutusu, A kutusundan 56 cm² daha çok kâğıt ister.

e) "Daha uzun olan daha çok kâğıt ister" doğru mudur?
Her zaman doğru değildir.

devamı →

9 *(çözümün devamı)*

Bu örnekte B kutusu daha uzundur (18 cm > 12 cm) ve gerçekten daha çok kâğıt istedi. Ama bunun sebebi yalnız yükseklik değildir; **bütün ölçüler birlikte** etkilidir.

Karşı örnek: Taban ayrıtı **5 cm**, yüksekliği **20 cm** olan bir kare prizma düşünelim. Bu kutu A kutusundan çok daha uzundur.

$A = 2 \cdot 25 + 4 \cdot 5 \cdot 20 = 50 + 400 =$ **450 cm²**

450 < 864 olduğuna göre bu uzun ama **ince** kutu, küpten çok daha **az** kâğıt ister.

Sonuç: Yüzey alanı yalnız yüksekliğe değil, taban ölçülerine de bağlıdır. Karşılaştırma yapmak için her iki alanı da **hesaplamak** gerekir; göz kararı karar verilemez.

a) 864 cm² b) 920 cm² c) A kutusu d) 56 cm² e) Her zaman doğru değil

10 Selin, taban ayrıtı **6 cm**, yüksekliği **10 cm** olan bir kare prizmanın yüzey alanını şöyle hesaplamıştır:

$A = 4 \cdot 36 + 2 \cdot 60$
$A = 144 + 120$
$A =$ **264 cm²**

a) Selin'in hatasını açıklayınız.
b) Doğru yüzey alanını hesaplayınız.
c) Selin'in sonucu ile doğru sonuç arasındaki fark kaçtır?
d) Kare prizmada kaç taban, kaç yan yüz vardır? Formülü yazınız.

a) Hata nerede?
Selin, **taban sayısı** ile **yan yüz sayısını** ters yazmıştır.

Hesabına bakalım:
- $4 \cdot 36$ → taban alanını (36) **dört** kez saymış
- $2 \cdot 60$ → yan yüz alanını (60) **iki** kez saymış

Oysa kare prizmada **2 taban** ve **4 yan yüz** vardır. Selin bunları tam tersine yazmıştır.

b) Doğru çözüm
Tabanlar: Bir tabanın alanı $6 \cdot 6 = 36$ cm²
İki taban: $2 \cdot 36 =$ **72 cm²**

Yan yüzler: Bir yan yüzün alanı $6 \cdot 10 = 60$ cm²
Dört yan yüz: $4 \cdot 60 =$ **240 cm²**

$A = 72 + 240 =$ **312 cm²**

c) Fark
$312 - 264 =$ **48 cm²**

devamı →

10 *(çözümün devamı)*

Farkın nereden geldiğini görelim: Selin taban alanını 2 fazla, yan yüz alanını 2 eksik saydı.
Fazla saydığı: 2 · 36 = 72
Eksik saydığı: 2 · 60 = 120
Net eksik: 120 − 72 = **48** ✓

d) Kare prizmanın yüzleri ve formülü
Kare prizmada:
• **2 taban** (kare, kenarı a)
• **4 yan yüz** (dikdörtgen, a × h)
Toplam **6 yüz**

Formül:
$A = 2a^2 + 4ah$

Hatırlama yöntemi: Prizmanın adı "kare prizma"; kare olan yüzler **tabanlardır** ve bir prizmanın **iki** tabanı vardır. Geriye kalan dört yüz yan yüzlerdir.

Kontrol yöntemi: Katsayıların toplamı her zaman yüz sayısını vermelidir: 2 + 4 = **6** ✓
Selin'in yazdığında da 4 + 2 = 6 çıkıyor; bu yüzden bu kontrol tek başına yetmez, hangi katsayının hangi yüze ait olduğuna da bakmak gerekir.

a) Taban ve yan yüz sayısını karıştırmış b) 312 cm² c) 48 cm² d) $A = 2a^2 + 4ah$

3. Bölüm Soru 11–15

11 Bir küpün yüzey alanı **150 cm²**'dir.

a) Küpün bir yüzünün alanı kaç cm²'dir?
b) Küpün bir ayrıtının uzunluğu kaç cm'dir?
c) Küpün tüm ayrıtlarının uzunlukları toplamı kaç cm'dir?
d) Ayrıt uzunluğu 1 cm artarsa yüzey alanı kaç cm² artar?
e) Bu artış, ayrıt 1 cm daha artarsa aynı kalır mı?

a) Bir yüzün alanı
Küpün **altı** eş yüzü vardır. Toplam alan 150 cm² olduğuna göre:

150 : 6 = **25 cm²**

b) Bir ayrıtın uzunluğu
Her yüz bir karedir ve alanı 25 cm²'dir. Karenin alanı kenarın kendisiyle çarpımı olduğuna göre:

$a \cdot a = 25$
a = **5 cm** (çünkü 5 · 5 = 25)
Kontrol: $A = 6 \cdot 5^2 = 6 \cdot 25 = 150$ ✓

devamı →

11 *(çözümün devamı)*

c) Tüm ayrıtların toplamı
Küpün **12 ayrıtı** vardır ve hepsi eşit uzunluktadır:

$12 \cdot 5 =$ **60 cm**

d) Ayrıt 1 cm artarsa
Yeni ayrıt: $5 + 1 =$ **6 cm**
Yeni yüzey alanı: $6 \cdot 6^2 = 6 \cdot 36 =$ **216 cm²**

Artış: $216 - 150 =$ **66 cm²**

e) Bir cm daha artarsa aynı kalır mı?
Kalmaz. Hesaplayalım.

Yeni ayrıt: $6 + 1 =$ **7 cm**
Yeni yüzey alanı: $6 \cdot 7^2 = 6 \cdot 49 =$ **294 cm²**

Artış: $294 - 216 =$ **78 cm²**

İlk artış 66, ikinci artış **78** cm^2 oldu.

Neden artışlar eşit değil? Yüzey alanı ayrıt uzunluğuyla **doğru orantılı değildir**; ayrıtın **karesiyle** ilgilidir.

Artışları inceleyelim:
$5 \to 6$: $6 \cdot (36 - 25) = 6 \cdot 11 = 66$
$6 \to 7$: $6 \cdot (49 - 36) = 6 \cdot 13 = 78$

Parantez içindeki farklar (11 ve 13) ardışık tek sayılardır; çünkü ardışık tam karelerin farkı hep ardışık tek sayılardır.

Ayrıt büyüdükçe her 1 cm'lik artış **daha çok** yüzey alanı ekler.

a) 25 cm² b) 5 cm c) 60 cm d) 66 cm² e) Kalmaz, 78 cm² olur

12 Bir öğrenci şöyle diyor:

"Yüzey alanları eşit olan iki dikdörtgenler prizmasının ayrıt uzunlukları da eşittir."

a) Ayrıtları 1, 2 ve 10 birim olan prizmanın yüzey alanını bulunuz.
b) Ayrıtları 2, 2 ve 7 birim olan prizmanın yüzey alanını bulunuz.
c) Öğrenci haklı mıdır?
d) Bu iki prizmanın tüm ayrıtlarının uzunlukları toplamı eşit midir?
e) Yüzey alanları eşit olan iki küp için aynı şey söylenebilir mi?

a) 1 × 2 × 10 prizması
Üç farklı yüzün alanı:
1 · 2 = **2**
1 · 10 = **10**
2 · 10 = **20**

A = 2 · (2 + 10 + 20) = 2 · 32 = **64 br²**

b) 2 × 2 × 7 prizması
Üç farklı yüzün alanı:
2 · 2 = **4**
2 · 7 = **14**
2 · 7 = **14**

A = 2 · (4 + 14 + 14) = 2 · 32 = **64 br²**

c) Öğrenci haklı mıdır?
Haklı değildir.

İki prizmanın da yüzey alanı **64 br²** çıktı; ama ayrıt uzunlukları tamamen farklı:
- Birincisi: 1, 2, 10
- İkincisi: 2, 2, 7

Demek ki aynı yüzey alanını veren **birden çok** prizma vardır. Yüzey alanı, prizmayı **tek biçimde belirlemez**.

Üstelik ikinci prizma bir **kare prizmadır** (2 × 2 yüzleri kare), birincisi ise değildir. Yani şekilleri de farklıdır.

d) Ayrıtların toplamı eşit mi?
Bir dikdörtgenler prizmasında her ayrıt ölçüsünden **dörder** tane vardır.

Birinci prizma: 4 · (1 + 2 + 10) = 4 · 13 = **52 birim**
İkinci prizma: 4 · (2 + 2 + 7) = 4 · 11 = **44 birim**

Eşit değildir. Aradaki fark 52 − 44 = 8 birimdir.

Bu da gösteriyor ki yüzey alanı eşit olsa bile prizmalar başka her yönden farklı olabilir.

devamı →

12 *(çözümün devamı)*

e) İki küp için aynı şey söylenebilir mi?
Söylenemez; küplerde durum farklıdır.

Küpün yüzey alanı yalnız **tek bir ölçüye** bağlıdır:
$A = 6a^2$

Yüzey alanı verildiğinde $a^2 = A : 6$ bulunur ve buradan a **tek türlü** belirlenir.

Örnek: $A = 96$ br^2 ise $a^2 = 16$, $a = 4$ birimdir. Başka bir küp bu alanı veremez.

Sonuç: Yüzey alanı eşit olan iki küp **her zaman eştir**; ama yüzey alanı eşit olan iki dikdörtgenler prizması eş olmak zorunda değildir. Sebebi, dikdörtgenler prizmasının **üç serbest ölçüsü**, küpün ise **tek** ölçüsü olmasıdır.

a) 64 br² b) 64 br² c) Haklı değil d) 52 ve 44, eşit değil e) Küplerde eşittir

13 Aşağıda altı dikdörtgenler prizmasının ayrıt uzunlukları birim cinsinden verilmiştir.

I. 2, 3, 4
II. 1, 2, 10
III. 2, 2, 7
IV. 1, 4, 6
V. 3, 3, 3
VI. 1, 1, 13

a) Her prizmanın yüzey alanını bulunuz.
b) Aynı yüzey alanına sahip olanları gruplayınız.
c) En büyük ve en küçük yüzey alanına sahip prizmalar hangileridir?
d) Bu prizmalardan hangileri kare prizmadır? Hangisi küptür?

a) Yüzey alanları
Her biri için $A = 2 \cdot (ab + ac + bc)$ formülünü kullanalım.

I. 2, 3, 4
$2 \cdot 3 = 6,\ 2 \cdot 4 = 8,\ 3 \cdot 4 = 12$
$A = 2 \cdot (6 + 8 + 12) = 2 \cdot 26 =$ **52 br²**

II. 1, 2, 10
$1 \cdot 2 = 2,\ 1 \cdot 10 = 10,\ 2 \cdot 10 = 20$
$A = 2 \cdot (2 + 10 + 20) = 2 \cdot 32 =$ **64 br²**

III. 2, 2, 7
$2 \cdot 2 = 4,\ 2 \cdot 7 = 14,\ 2 \cdot 7 = 14$
$A = 2 \cdot (4 + 14 + 14) = 2 \cdot 32 =$ **64 br²**

IV. 1, 4, 6
$1 \cdot 4 = 4,\ 1 \cdot 6 = 6,\ 4 \cdot 6 = 24$
$A = 2 \cdot (4 + 6 + 24) = 2 \cdot 34 =$ **68 br²**

devamı →

13 *(çözümün devamı)*

V. 3, 3, 3
Üç yüz de 9 br^2
A = 2 · (9 + 9 + 9) = 2 · 27 = **54 br^2**

VI. 1, 1, 13
1 · 1 = 1, 1 · 13 = 13, 1 · 13 = 13
A = 2 · (1 + 13 + 13) = 2 · 27 = **54 br^2**

b) Gruplama
52 br^2: I
54 br^2: V ve VI
64 br^2: II ve III
68 br^2: IV

Dört grup oluştu. V ile VI'nın aynı alanı vermesi özellikle dikkat çekicidir: biri küp, diğeri çok ince ve uzun bir prizma.

c) En büyük ve en küçük
En büyük: IV (68 br^2) — ayrıtları 1, 4, 6
En küçük: I (52 br^2) — ayrıtları 2, 3, 4

İlginç bir gözlem: En küçük yüzey alanı, ayrıtları birbirine **en yakın** olan prizmalardan birinde çıktı. Çok ince ve uzun prizmalar (1, 1, 13 gibi) daha büyük yüzey alanına sahip olma eğilimindedir.

d) Kare prizma ve küp olanlar
Bir prizmanın kare prizma olması için ayrıtlarından **ikisinin eşit** olması gerekir.

- **III (2, 2, 7):** iki ayrıt eşit → **kare prizma** ✓
- **V (3, 3, 3):** üç ayrıt da eşit → **küp** ✓ (küp aynı zamanda kare prizmadır)
- **VI (1, 1, 13):** iki ayrıt eşit → **kare prizma** ✓

Diğerlerinde (I, II, IV) üç ayrıt da farklıdır; bunlar yalnız dikdörtgenler prizmasıdır.

Cevap: Kare prizma olanlar III, V ve VI; bunlardan yalnız V bir küptür.

a) 52, 64, 64, 68, 54, 54 b) {V,VI} ve {II,III} c) En büyük IV, en küçük I d) III, V, VI kare prizma; V küp

14 Taban ayrıtı **8 cm** olan bir kare prizmanın yüzey alanı **448 cm²**'dir.

a) İki taban yüzünün toplam alanını bulunuz.
b) Dört yan yüzün toplam alanını bulunuz.
c) Prizmanın yüksekliğini bulunuz.
d) Prizmanın tüm ayrıtlarının uzunlukları toplamı kaç cm'dir?
e) Yükseklik iki katına çıkarsa yüzey alanı kaç cm² olur?

a) Taban yüzlerinin toplam alanı
Taban bir karedir; kenarı 8 cm'dir.
Bir taban: $8 \cdot 8 = 64$ cm²

Kare prizmada **iki** taban vardır:
$2 \cdot 64 =$ **128 cm²**

b) Yan yüzlerin toplam alanı
Toplam yüzey alanı 448 cm²'dir. Tabanları çıkaralım:

$448 - 128 =$ **320 cm²**

Bu, **dört yan yüzün** toplam alanıdır.

c) Yükseklik
Dört yan yüz eştir; her biri 8 × h ölçüsünde bir dikdörtgendir.

$4 \cdot (8 \cdot h) = 320$
$32 \cdot h = 320$
$h = 320 : 32$
$h =$ **10 cm**

Kontrol: $A = 2 \cdot 64 + 4 \cdot 8 \cdot 10 = 128 + 320 =$ **448 cm²** ✓

d) Tüm ayrıtların toplamı
Kare prizmada üç çeşit ayrıt vardır:
- **Alt taban** kenarları: 4 tane, her biri 8 cm
- **Üst taban** kenarları: 4 tane, her biri 8 cm
- **Dikey** ayrıtlar (yükseklikler): 4 tane, her biri 10 cm

Toplam: $8 \cdot 8 + 4 \cdot 10 = 64 + 40 =$ **104 cm**

Kontrol: Ayrıt sayısı $8 + 4 =$ **12** ✓ (Her prizmada 12 ayrıt vardır.)

devamı →

14 *(çözümün devamı)*

e) Yükseklik iki katına çıkarsa
Yeni yükseklik: 10 · 2 = **20 cm**

Tabanlar değişmez: 128 cm^2
Yan yüzler: 4 · (8 · 20) = 4 · 160 = **640 cm^2**

A = 128 + 640 = **768 cm^2**

Karşılaştıralım: Eski alan 448 idi; iki katı 896 olurdu. Oysa 768 bulduk.

Sebebi: Yükseklik yalnız **yan yüzleri** etkiledi; taban yüzleri aynı kaldı. Bu yüzden toplam alan iki katına çıkmadı.

Yan yüzler gerçekten iki katına çıktı: 320 → 640 ✓

a) 128 cm^2 b) 320 cm^2 c) 10 cm d) 104 cm e) 768 cm^2

15 Aşağıdaki koşulların tamamını sağlayan bir **dikdörtgenler prizması** tasarlayınız.

- Ayrıt uzunlukları birbirinden **farklı doğal sayılar** olsun.
- Ayrıtlardan biri **2 birim** olsun.
- Yüzey alanı **100 br^2'den küçük** olsun.

a) Prizmanızın ayrıt uzunluklarını yazınız.
b) Yüzey alanını hesaplayınız.
c) Aynı koşulları sağlayan farklı bir prizma daha yazınız.
d) Bu koşullarda yüzey alanı en az kaç br^2 olabilir? Gerekçelendiriniz.
e) Tasarladığınız prizma kare prizma olabilir mi? Neden?

Bu soruda tek bir doğru cevap yoktur; koşulları sağlayan her prizma kabul edilir. Aşağıda örnek bir çözüm verilmiştir.

a) Örnek prizma
Ayrıt uzunlukları: **2, 3 ve 4 birim**

Koşulları kontrol edelim:
- Üç ayrıt da farklı doğal sayı ✓
- Ayrıtlardan biri 2 birim ✓

devamı →

15 *(çözümün devamı)*

b) Yüzey alanı
Üç farklı yüzün alanı:
2 · 3 = **6**
2 · 4 = **8**
3 · 4 = **12**

A = 2 · (6 + 8 + 12) = 2 · 26 = **52 br²**

52 < 100 olduğuna göre üçüncü koşul da sağlandı ✓

c) İkinci örnek
Ayrıt uzunlukları: **2, 3 ve 5 birim**

2 · 3 = 6, 2 · 5 = 10, 3 · 5 = 15
A = 2 · (6 + 10 + 15) = 2 · 31 = **62 br²** ✓

Başka örnekler: 2, 4, 5 → A = 2 · (8 + 10 + 20) = **76 br²** ✓ · 2, 1, 6 → A = 2 · (2 + 12 + 6) = **40 br²** ✓

d) En küçük yüzey alanı
Yüzey alanını küçültmek için ayrıtları **olabildiğince küçük** seçmeliyiz.

Koşullar: üç ayrıt da **farklı doğal sayı** olacak ve biri **2** olacak.

En küçük doğal sayılardan seçelim: 2 zaten var; yanına en küçük iki farklı doğal sayıyı alalım: **1** ve **3**.

Ayrıtlar: **1, 2 ve 3 birim**

1 · 2 = **2**
1 · 3 = **3**
2 · 3 = **6**

A = 2 · (2 + 3 + 6) = 2 · 11 = **22 br²**

Yüzey alanı en az 22 br² olabilir.

Neden daha küçüğü olamaz? 2 dışındaki iki ayrıt farklı doğal sayı olmak zorunda. En küçük iki seçenek 1 ve 3'tür (0 bir uzunluk olamaz, 2 zaten kullanıldı). Başka her seçim daha büyük sayılar içereceği için alan büyür.

e) Kare prizma olabilir mi?
Olamaz.

Bir prizmanın kare prizma olması için ayrıtlarından **ikisinin eşit** olması gerekir; ancak birinci koşul ayrıtların **birbirinden farklı** olmasını istiyor.

Üç ayrıt da farklı olduğuna göre hiçbir yüz kare olamaz; o hâlde prizma yalnızca bir **dikdörtgenler prizmasıdır**.

Örnek: 2, 3, 4 → 52 br² · d) En az 22 br² (1, 2, 3) · e) Olamaz