KONU ANLATIMLI SORU ÇÖZÜMLERİ

Dikdörtgenler Prizması, Kare Prizma ve Küp: Açınım ve Yüzey Alanı

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge **CC BY-NC 4.0** lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabilir.

ÇÖZÜMLÜ SORU 1 — Prizmanın elemanları ve yüzleri

Ayrıt uzunlukları **12 cm**, **9 cm** ve **5 cm** olan bir dikdörtgenler prizması veriliyor.
a) Prizmanın kaç köşesi, kaç ayrıtı ve kaç yüzü vardır?
b) Yüzleri oluşturan farklı dikdörtgenleri ve alanlarını yazınız.
c) Prizmanın yüzey alanını bulunuz.
d) Bu prizma bir kare prizma olabilir mi? Gerekçelendiriniz.

1 a) Köşe, ayrıt ve yüz sayıları

Dikdörtgenler prizmasının ölçüleri ne olursa olsun bu sayılar **değişmez**:

- **Köşe sayısı:** Üstte 4, altta 4 → **8 köşe**
- **Ayrıt sayısı:** Üst yüzün 4 kenarı, alt yüzün 4 kenarı, bunları birleştiren 4 dikey ayrıt → **12 ayrıt**
- **Yüz sayısı:** Üst, alt, ön, arka, sağ, sol → **6 yüz**

Ayrıtları uzunluklarına göre gruplayalım: 12 cm'lik **4** ayrıt, 9 cm'lik **4** ayrıt, 5 cm'lik **4** ayrıt. Toplam 12 ✓

2 b) Yüzleri oluşturan dikdörtgenler

Altı yüz, üç farklı dikdörtgenden **ikişer tane** olacak biçimde oluşur. Ayrıtları ikişerli eşleştirelim:

- **12 × 9** yüzler (üst ve alt): alan = **108 cm²**
- **12 × 5** yüzler (ön ve arka): alan = **60 cm²**
- **9 × 5** yüzler (sağ ve sol): alan = **45 cm²**

Üç ayrıttan ikişerli seçimle tam **üç** farklı yüz elde edilir; bu yüzden hep üç farklı alan çıkar.

3 c) Yüzey alanı

Her farklı yüzden ikişer tane olduğuna göre:

$A = 2 \cdot (108 + 60 + 45)$

$A = 2 \cdot 213$

$A = \mathbf{426\ cm^2}$

Formülle: $A = 2 \cdot (a\cdot b + a\cdot c + b\cdot c) = 2 \cdot (12\cdot 9 + 12\cdot 5 + 9\cdot 5) = 2 \cdot 213 = 426$ ✓

Kontrol: En büyük yüz 108 cm^2'dir. Altı yüzün hepsi bu kadar büyük olsaydı alan $6 \cdot 108 = 648$ olurdu. Bulduğumuz 426 sayısı bundan küçük; sonuç mantıklı ✓

4 d) Kare prizma olabilir mi?

Olamaz.

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 1 **Prizmanın elemanları ve yüzleri** (devam)

Bir prizmanın kare prizma olması için karşılıklı yüz çiftlerinden birinin **kare** olması gerekir. Bir yüzün kare olması ise o yüzü oluşturan **iki ayrıtın eşit** olması demektir.

Bu prizmanın ayrıtları **12, 9 ve 5**'tir; üçü de birbirinden farklıdır.

Yüzleri tek tek inceleyelim:
• 12 × 9 → kare değil
• 12 × 5 → kare değil
• 9 × 5 → kare değil

Hiçbir yüz kare olmadığına göre bu prizma **kare prizma değildir**; yalnızca bir dikdörtgenler prizmasıdır.

Ne zaman kare prizma olurdu? Üç ayrıttan **ikisi eşit** olsaydı. Örneğin 12, 9, 9 ölçüleriyle 9 × 9 kare yüzler oluşurdu.

Sonuç: a) 8 köşe, 12 ayrıt, 6 yüz b) 108, 60 ve 45 cm² c) 426 cm² d) Hayır, üç ayrıt da farklı

ÇÖZÜMLÜ SORU 2 **Üç prizma türünün yüzey alanı**

Aşağıdaki prizmaların yüzey alanlarını bulunuz.
a) Bir ayrıtı **7 cm** olan küp
b) Taban ayrıtı **5 cm**, yüksekliği **9 cm** olan kare prizma
c) Ayrıtları **12 cm**, **9 cm** ve **5 cm** olan dikdörtgenler prizması
d) Bulduğunuz üç sonucu **büyükten küçüğe** sıralayınız.

1 **a) Küpün yüzey alanı**

Küpün altı yüzü de **eş karedir**. Bir yüzün alanı:

$7 \cdot 7 =$ **49 cm²**

Altı yüz olduğuna göre:

$A = 6 \cdot 49 =$ **294 cm²**

Formülle: $A = 6a^2 = 6 \cdot 7^2 = 294$ ✓

2 **b) Kare prizmanın yüzey alanı**

Kare prizmada **2 kare taban** ve **4 eş dikdörtgen yan yüz** vardır.

Tabanlar: Bir tabanın alanı $5 \cdot 5 = 25$ cm²

İki taban: $2 \cdot 25 =$ **50 cm²**

Yan yüzler: Bir yan yüzün alanı $5 \cdot 9 = 45$ cm²

Dört yan yüz: $4 \cdot 45 =$ **180 cm²**

$A = 50 + 180 =$ **230 cm²**

Formülle: $A = 2a^2 + 4ah = 2 \cdot 25 + 4 \cdot 5 \cdot 9 = 50 + 180 = 230$ ✓

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 2 **Üç prizma türünün yüzey alanı** (devam)

Uyarı: Taban sayısı 2, yan yüz sayısı 4'tür. Bunları ters yazmak ($4 \cdot 25 + 2 \cdot 45$) yaygın bir hatadır.

3 c) Dikdörtgenler prizmasının yüzey alanı

Üç farklı yüzün alanını bulalım:

$12 \cdot 9 = \mathbf{108}$

$12 \cdot 5 = \mathbf{60}$

$9 \cdot 5 = \mathbf{45}$

Her birinden ikişer tane var:

$A = 2 \cdot (108 + 60 + 45) = 2 \cdot 213 = \mathbf{426\ cm^2}$

4 d) Sıralama

Bulduğumuz değerler:

a) $\mathbf{294\ cm^2}$ · b) $\mathbf{230\ cm^2}$ · c) $\mathbf{426\ cm^2}$

Büyükten küçüğe:

$\mathbf{426 > 294 > 230}$

Sıralama: **c, a, b**

Gözlem: En büyük yüzey alanı, ayrıtları en uzun olan prizmada çıktı. Ama bu her zaman böyle olmayabilir; yüzey alanı yalnız ayrıtların büyüklüğüne değil, **birbirine oranına** da bağlıdır. Örneğin çok ince ve uzun bir prizmanın yüzey alanı, ayrıtları daha kısa ama dengeli bir prizmadan büyük olabilir.

Sonuç: a) $294\ cm^2$ b) $230\ cm^2$ c) $426\ cm^2$ d) $426 > 294 > 230$

ÇÖZÜMLÜ SORU 3 **Açınımdan yüzey alanına**

Konu anlatımındaki renkli açınımı düşününüz. Bu açınımda üst ve alt yüzler **4 birim × 3 birim**, ön ve arka yüzler **4 birim × 2 birim**, sağ ve sol yüzler **3 birim × 2 birim**'dir.
a) Her yüz çiftindeki bir yüzün alanını bulunuz.
b) Açınımdaki toplam birim kare sayısını bulunuz.
c) Prizmanın ayrıt uzunlukları nedir?
d) Yüzey alanını formülle hesaplayıp (b) ile karşılaştırınız.

1 a) Yüz alanları

Her yüz bir dikdörtgendir; alanı kenar uzunluklarının çarpımıdır.

- **Üst ve alt (yeşil):** $4 \cdot 3 = \mathbf{12\ br^2}$
- **Ön ve arka (mavi):** $4 \cdot 2 = \mathbf{8\ br^2}$
- **Sağ ve sol (kırmızı):** $3 \cdot 2 = \mathbf{6\ br^2}$

Üç farklı alan çıktı; her birinden **ikişer** yüz var.

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 3 **Açınımdan yüzey alanına** (devam)

2 b) Toplam birim kare sayısı

Her renkten ikişer yüz olduğuna göre:

Yeşil: 2 · 12 = **24**

Mavi: 2 · 8 = **16**

Kırmızı: 2 · 6 = **12**

Toplam: 24 + 16 + 12 = **52 birim kare**

Açınımın kapladığı alan, prizmanın **yüzey alanıdır**; çünkü açınım prizmanın bütün yüzlerinin düzleme serilmiş hâlidir.

3 c) Ayrıt uzunlukları

Yüz ölçülerinden ayrıtları çıkaralım. Üç yüz ölçüsü şunlardı: 4 × 3, 4 × 2, 3 × 2

Bu ölçülerde geçen sayılar: **4**, **3** ve **2**

- **4** sayısı hem 4 × 3 hem 4 × 2 yüzünde geçiyor → bir ayrıt uzunluğu
- **3** sayısı hem 4 × 3 hem 3 × 2 yüzünde geçiyor → bir ayrıt uzunluğu
- **2** sayısı hem 4 × 2 hem 3 × 2 yüzünde geçiyor → bir ayrıt uzunluğu

Ayrıt uzunlukları: 4 birim, 3 birim ve 2 birim

Her ayrıt tam olarak **iki** farklı yüzde geçer; bu, her ayrıtın iki yüzün kesişimi olmasının doğal sonucudur.

4 d) Formülle hesaplayıp karşılaştıralım

Dikdörtgenler prizmasının yüzey alanı formülü:

$A = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$

a = 4, b = 3, c = 2 alalım:

$A = 2 \cdot (4 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2)$

$A = 2 \cdot (12 + 8 + 6)$

$A = 2 \cdot 26$

$A = \mathbf{52\ br^2}$

Karşılaştırma: (b) şıkkında birim kareleri sayarak da **52** bulmuştuk. İki sonuç aynı ✓

Çıkarılacak ders: Formül, açınımda yaptığımız saymanın kısa yoludur. Formülü ezberlemek yerine açınımı düşünmek, hem hatırlamayı kolaylaştırır hem de hataları önler.

Sonuç: a) 12, 8 ve 6 br² b) 52 birim kare c) 4, 3 ve 2 birim d) 52 br², aynı

ÇÖZÜMLÜ SORU 4 **Üstü açık kutu ve maliyet**

Bir hediye kutusu **kare prizma** biçimindedir. Taban ayrıtı **15 cm**, yüksekliği **24 cm**'dir. Kutu, **üst yüzü açık** kalacak biçimde kâğıtla kaplanacaktır.
a) Kutunun tam yüzey alanını bulunuz.
b) Üst yüz kaplanmayacağına göre kaplanacak alan kaç cm^2'dir?
c) 1 m^2 kâğıt 40 TL ise kaplama kaç TL tutar?
d) Kutunun yüksekliği iki katına çıksaydı kaplanacak alan kaç cm^2 olurdu?

1 **a) Tam yüzey alanı**

Kare prizmada 2 kare taban ve 4 eş dikdörtgen yan yüz vardır.

Tabanlar:

Bir taban: $15 \cdot 15 = 225$ cm^2

İki taban: $2 \cdot 225 =$ **450 cm^2**

Yan yüzler:

Bir yan yüz: $15 \cdot 24 = 360$ cm^2

Dört yan yüz: $4 \cdot 360 =$ **1440 cm^2**

$A = 450 + 1440 =$ **1890 cm^2**

2 **b) Kaplanacak alan**

Kutunun **üst yüzü açık** kalacağına göre o yüz kaplanmaz. Üst yüz bir **taban** yüzüdür:

$15 \cdot 15 =$ **225 cm^2**

Kaplanacak alan:

$1890 - 225 =$ **1665 cm^2**

İkinci yol: Doğrudan sayalım. Kaplanacak yüzler: **1 taban** + **4 yan yüz**

$225 + 1440 =$ **1665 cm^2** ✓

3 **c) Maliyet**

Fiyat metrekare cinsinden verildiği için önce birim dönüşümü yapalım.

1 m^2 = 100 cm · 100 cm = 10 000 cm^2

Kaplanacak alanı metrekareye çevirelim:

$1665 : 10\,000 =$ **0,1665 m^2**

Maliyeti hesaplayalım:

$0{,}1665 \cdot 40 = ?$

Adım adım:

$0{,}1 \cdot 40 = 4$

$0{,}06 \cdot 40 = 2{,}4$

$0{,}0065 \cdot 40 = 0{,}26$

Toplam: $4 + 2{,}4 + 0{,}26 =$ **6,66 TL**

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 4 **Üstü açık kutu ve maliyet** (devam)

Uyarı: Birim dönüşümü yapmadan 1665 · 40 demek çok büyük ve yanlış bir sonuç verirdi.

4 d) Yükseklik iki katına çıkarsa

Yeni yükseklik: 24 · 2 = **48 cm**

Tabanlar değişmez: Taban ayrıtı hâlâ 15 cm; bir taban 225 cm^2.

Yan yüzler değişir:

Bir yan yüz: 15 · 48 = 720 cm^2

Dört yan yüz: 4 · 720 = **2880 cm^2**

Kaplanacak alan (1 taban + 4 yan yüz):

225 + 2880 = **3105 cm^2**

Karşılaştıralım: Eski kaplama alanı 1665 cm^2 idi. İki katı 3330 olurdu; oysa 3105 bulduk.

Sebebi: Yükseklik yalnız **yan yüzleri** etkiledi; taban yüzü aynı kaldı. Bir ölçü iki katına çıkınca yüzey alanı genellikle **iki katına çıkmaz**.

Sonuç: a) 1890 cm^2 b) 1665 cm^2 c) 6,66 TL d) 3105 cm^2