KONU ANLATIMI · CEVAPLI

Dikdörtgenler Prizması, Kare Prizma ve Küp: Açınım ve Yüzey Alanı

Kazanımlar: MAT.7.2.3. Dikdörtgenler prizması, kare prizma ve küpün temel elemanlarını belirleyebilme ve açınımlarını çizebilme · MAT.7.2.4. Dikdörtgenler prizması, kare prizma ve küpün yüzey alanını hesaplayabilme

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge **CC BY-NC 4.0** lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabilir.

Prizmaların Temel Elemanları

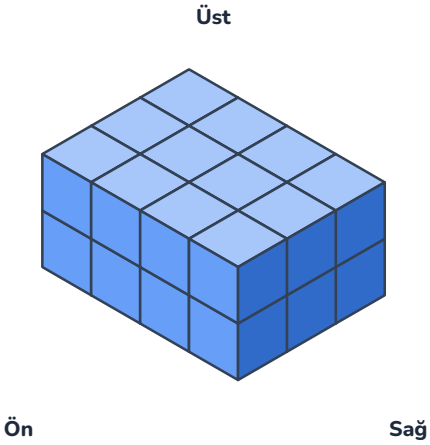
Bir prizmanın üç temel elemanı vardır:

- **Yüz:** Prizmanın düz yüzeylerini oluşturan bölgelerdir.
- **Ayrıt:** İki yüzün kesiştiği doğru parçalarıdır.
- **Köşe:** Üç ayrıtın kesiştiği noktalardır.

Dikdörtgenler prizmasının özellikleri:

- **8 köşesi**, **12 ayrıtı** ve **6 yüzü** vardır.
- Karşılıklı yüzleri **paralel ve eştir**.
- Birbirine paralel olan ayrıtları **eşit uzunluktadır**.
- Tüm yüzleri **dikdörtgendir**.

Prizmalar **tabanlarına göre** adlandırılır.



Birim küplerle oluşturulmuş, ayrıt uzunlukları 4, 3 ve 2 birim olan bir dikdörtgenler prizması. Ön, sağ ve üst yönler işaretlenmiştir.

Prizmayı okuyalım. Bu dikdörtgenler prizması birim küplerle oluşturulmuştur. Ayrıt uzunlukları:

- Soldan sağa (uzunluk): **4 birim**
- Önden arkaya (genişlik): **3 birim**
- Aşağıdan yukarıya (yükseklik): **2 birim**

Prizmanın **6 yüzü** var ve bunlar üç farklı boyutta, ikişerli eş çiftler hâlinde:

- **Üst** ve **alt** yüzler: 4 × 3
- **Ön** ve **arka** yüzler: 4 × 2
- **Sağ** ve **sol** yüzler: 3 × 2

Köşeleri sayalım: Üstte 4, altta 4 → toplam **8 köşe**
Ayrıtları sayalım: Üstte 4, altta 4, dikey 4 → toplam **12 ayrıt**

Bu sayılar dikdörtgenler prizmasının ölçüleri ne olursa olsun **değişmez**.

Kare prizma: Karşılıklı yüz çiftlerinden biri **kare** olan özel bir dikdörtgenler prizmasıdır.

- 8 köşesi, 12 ayrıtı, 6 yüzü vardır.
- **Tabanları kare**, yan yüzleri dikdörtgendir.
- **Dört yan yüzü birbirine eştir.**

Küp: Tüm yüzleri **kare** olan özel bir dikdörtgenler prizmasıdır.

- 8 köşesi, 12 ayrıtı, 6 yüzü vardır.
- **Tüm yüzleri eş karelerdir.**
- **Tüm ayrıtları eşit uzunluktadır.**

Önemli ilişki: Her küp bir **kare prizmadır**; her kare prizma da bir **dikdörtgenler prizmasıdır**. Ama tersi doğru değildir.

Prizma	Taban Şekli	Yan Yüz Şekli	Köşe / Ayrıt / Yüz	Ayrıt Uzunlukları
Dikdörtgenler prizması	Dikdörtgen	Dikdörtgen	8 / 12 / 6	Üç farklı ölçü: a, b, c
Kare prizma	Kare	Dikdörtgen	8 / 12 / 6	İki farklı ölçü: a, a, h
Küp	Kare	Kare	8 / 12 / 6	Tek ölçü: a, a, a

NOT **Köşe, ayrıt ve yüz sayıları üçünde de aynıdır.**

Dikdörtgenler prizması, kare prizma ve küpün hepsinde **8 köşe, 12 ayrıt, 6 yüz** vardır. Bu sayılara bakarak üçünü birbirinden ayırt edemezsin.

Ayırt eden şey **yüzlerin şeklidir**:
- Tüm yüzler dikdörtgen, hiçbiri kare değilse → **dikdörtgenler prizması**
- Karşılıklı bir yüz çifti kare, diğerleri dikdörtgen ise → **kare prizma**
- Tüm yüzler kare ise → **küp**

Sık yapılan hata: "Küp, dikdörtgenler prizması değildir" demek. Oysa kare de bir dikdörtgendir; bu yüzden küpün tüm yüzleri dikdörtgendir ve küp bir dikdörtgenler prizmasıdır.

ETKİNLİK 1 **Aşağıdaki ifadelerden doğru olanların yanına "D", yanlış olanların yanına "Y" yazınız.**

a) D Dikdörtgenler prizmasının 8 köşesi, 12 ayrıtı ve 6 yüzü vardır.

b) D Prizmalarda iki yüzün kesiştiği doğru parçasına ayrıt denir.

c) Y Küpün yüz sayısı kare prizmanın yüz sayısından fazladır.

d) D Her küp aynı zamanda bir kare prizmadır.

e) Y Her kare prizma aynı zamanda bir küptür.

f) D Dikdörtgenler prizmasının karşılıklı yüzleri eş ve paraleldir.

g) D Bir dikdörtgenler prizmasının açınımı 6 dikdörtgenden oluşur.

h) Y Bir küpün yalnızca bir tane açınımı vardır.

ı) Y Altı kareden oluşan her şekil bir küp açınımıdır.

i) D Ayrıtları a, b ve c olan dikdörtgenler prizmasının yüzey alanı $2 \cdot (ab + ac + bc)$'dir.

j) Y Bir ayrıtı a olan küpün yüzey alanı $4a^2$'dir.

k) D Küpün ayrıt uzunluğu iki katına çıkarsa yüzey alanı dört katına çıkar.

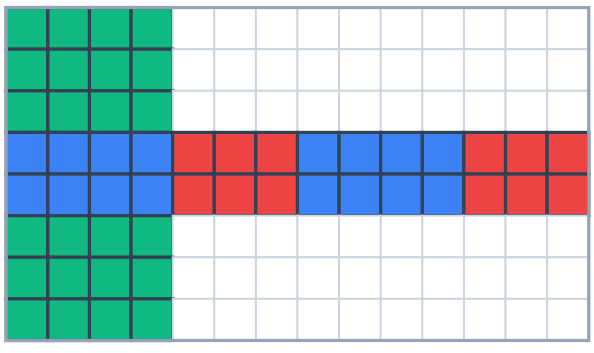
Prizmaların Açınımı

Bir prizma, ayrıtları boyunca kesilip düzleme serilirse elde edilen şekle o prizmanın **açınımı** denir.

Dikdörtgenler prizmasının 6 yüzü olduğuna göre açınımı da **6 dikdörtgenden** oluşur.

Önemli: Bir prizmanın **birden fazla açınımı** vardır. Aynı prizma farklı ayrıtlardan kesilerek farklı açınımlar verir; hepsi de doğrudur.

Açınımda **karşılıklı yüzler eştir**: Açınım kapatıldığında bu yüzler birbirinin karşısına gelir. Bu yüzden açınımlarda karşılıklı yüzler genellikle **aynı renge** boyanarak gösterilir.



Ayrıt uzunlukları 4, 3 ve 2 birim olan dikdörtgenler prizmasının bir açınımı. Karşılıklı yüzler aynı renktedir: yeşil üst ve alt yüzler (4 × 3), mavi ön ve arka yüzler (4 × 2), kırmızı sağ ve sol yüzler (3 × 2).

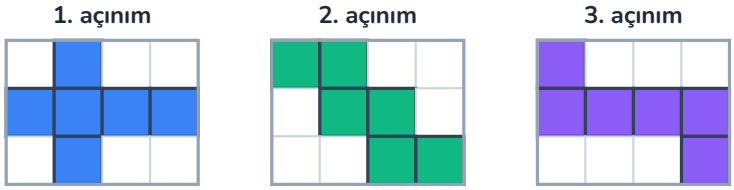
Açınımı okuyalım. Ortadaki yatay şerit, prizmanın **dört yan yüzünü** oluşturur; üstteki ve alttaki bölgeler ise **taban yüzleridir**.

Renkleri takip edelim:
• **Yeşil** iki bölge: 4 × 3 → üst ve alt yüz
• **Mavi** iki bölge: 4 × 2 → ön ve arka yüz
• **Kırmızı** iki bölge: 3 × 2 → sağ ve sol yüz

Açınım kapatıldığında aynı renkteki yüzler **birbirinin karşısına** gelir.

Birim kareleri sayalım:
Yeşil: 2 × (4 · 3) = 2 · 12 = **24**
Mavi: 2 × (4 · 2) = 2 · 8 = **16**
Kırmızı: 2 × (3 · 2) = 2 · 6 = **12**
Toplam: 24 + 16 + 12 = **52 birim kare**

Bu sayı, prizmanın **yüzey alanıdır**. Açınımın kapladığı alan ile prizmanın yüzey alanı aynıdır; çünkü açınım, prizmanın tüm yüzlerinin düzleme serilmiş hâlidir.



Bir küpün üç farklı açınımı. Üçü de altı kareden oluşur ve katlandığında küp verir; bu, bir prizmanın birden fazla açınımı olabileceğini gösterir.

NOT **Altı kareden oluşan her şekil küp açınımı değildir.**

Bir küpün **11 farklı açınımı** vardır. Ama altı kareyi yan yana dizmenin çok daha fazla yolu vardır; bunların çoğu katlandığında küp vermez.

Örnek: Altı kareyi tek sıra hâlinde yan yana dizersek katlandığında iki yüz üst üste biner, iki yüz de açık kalır. Bu bir küp açınımı **değildir**.

Kontrol yöntemi: Açınımı zihninde katla. Katlandığında
• hiçbir yüz **üst üste binmiyorsa**,
• hiçbir yer **açık kalmıyorsa**
şekil bir küp açınımıdır.

Pratik ipucu: Bir küp açınımında en fazla **dört kare** aynı sıraya dizilebilir. Beş karesi tek sırada olan bir şekil küp açınımı olamaz.

ETKİNLİK 2 **Aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri doldurunuz.**

Prizma	Taban Şekli	Yan Yüz Şekli	Köşe Sayısı	Ayrıt Sayısı	Yüz Sayısı
Dikdörtgenler prizması	Dikdörtgen	Dikdörtgen	8	12	6
Kare prizma	Kare	Dikdörtgen	8	12	6
Küp	Kare	Kare	8	12	6

ETKİNLİK 3 **Aşağıdaki cümleleri uygun sözcüklerle tamamlayınız.**

a) Dikdörtgenler prizmasının tüm yüzeyleri ... şeklindedir. **dikdörtgen**

b) Prizmalarda üç ayrıtın kesiştiği noktalara ... denir. **köşe**

c) Taban yüzleri kare olan prizmaya ... denir. **kare prizma**

d) Küpün tüm yüzleri ... şeklindedir. **kare**

e) Prizmalarda iki yüzün kesiştiği doğru parçasına ... denir. **ayrıt**

f) Küpün ... tane yüzü vardır. **6**

g) Dikdörtgenler prizmasının ... tane ayrıtı vardır. **12**

h) Kare prizmanın tüm yan yüzleri birbirine ... **eştir**

ı) Bir prizmanın açınımının kapladığı alan, prizmanın ...'na eşittir. **yüzey alanına**

i) Bir küpün ... farklı açınımı vardır. **11**

Yüzey Alanı Formülleri

Bir prizmanın **yüzey alanı**, tüm yüzlerinin alanları toplamıdır. Açınımdan bakıldığında bu, açınımın kapladığı alandır.

Dikdörtgenler prizması (ayrıtları a, b, c):
Üç farklı yüzden ikişer tane vardır:
$A = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$

Kare prizma (taban ayrıtı a, yüksekliği h):
İki kare taban ve dört eş dikdörtgen yan yüz vardır:
$A = 2a^2 + 4ah$

Küp (ayrıtı a):
Altı eş kare yüz vardır:
$A = 6a^2$

Alan birimleri **kare birimdir**: cm^2, m^2, br^2 gibi.



Bir prizmanın yüzey alanının hangi adımlarla hesaplanacağını gösteren akış şeması. Prizmanın türü belirlenir, farklı yüzlerin alanları bulunur, karşılıklı yüzler ikişer sayılır.

ÖRNEK **Üç prizmanın yüzey alanını bulalım.**

1. Küp, ayrıtı 7 cm
$A = 6a^2 = 6 \cdot 7^2 = 6 \cdot 49 =$ **294 cm²**

2. Kare prizma, taban ayrıtı 5 cm, yüksekliği 9 cm
Tabanlar: $2a^2 = 2 \cdot 25 = 50$
Yan yüzler: $4ah = 4 \cdot 5 \cdot 9 = 180$
$A = 50 + 180 =$ **230 cm²**

3. Dikdörtgenler prizması, ayrıtları 12 cm, 9 cm ve 5 cm
Farklı yüzler: $12 \cdot 9 = 108$, $12 \cdot 5 = 60$, $9 \cdot 5 = 45$
$A = 2 \cdot (108 + 60 + 45) = 2 \cdot 213 =$ **426 cm²**

Üç sonucu sıralarsak: **426 > 294 > 230**

NOT **En sık yapılan üç hata.**

1. İki ile çarpmayı unutmak. Ayrıtları 8, 5 ve 3 olan prizmada 40 + 24 + 15 = 79 demek yanlıştır. Bu, yalnız **üç yüzün** alanıdır; prizmanın **altı yüzü** vardır. Doğrusu 2 · 79 = **158**'dir.

2. Kare prizmada taban ve yan yüz sayılarını karıştırmak. Kare prizmada **2 taban**, **4 yan yüz** vardır. $4a^2 + 2ah$ yazmak yanlıştır; doğrusu **$2a^2 + 4ah$**'dır.

3. Küpte 6 yerine başka bir sayı kullanmak. Küpün altı yüzü de eş karedir; $A =$ **$6a^2$**'dir. $4a^2$ yazmak, yalnız yan yüzleri saymak demektir.

Kontrol yöntemi: Bulduğun sonucu, en büyük yüzün alanının 6 katıyla karşılaştır. Yüzey alanı bu sayıdan **büyük olamaz**.

Prizma	Ölçüler	Hesap	Yüzey Alanı
Küp	a = 10 cm	6 · 10 · 10	**600 cm²**
Kare prizma	a = 8 cm, h = 12 cm	2 · 64 + 4 · 96	**512 cm²**
Dikdörtgenler prizması	20, 15 ve 10 cm	2 · (300 + 200 + 150)	**1300 cm²**
Dikdörtgenler prizması	15, 8 ve 6 cm	2 · (120 + 90 + 48)	**516 cm²**
Kare prizma	a = 4 cm, h = 4 cm	2 · 16 + 4 · 16	**96 cm²** (küp)

Son satıra dikkat. Taban ayrıtı 4 cm, yüksekliği de 4 cm olan bir kare prizma aslında bir **küptür**.

Formülü kontrol edelim:
Kare prizma formülüyle: $2a^2 + 4ah = 2 \cdot 16 + 4 \cdot 4 \cdot 4 = 32 + 64 =$ **$96\ cm^2$**
Küp formülüyle: $6a^2 = 6 \cdot 16 =$ **$96\ cm^2$** ✓

İki formül aynı sonucu verdi; çünkü h = a olduğunda kare prizma formülü küp formülüne dönüşür:
$2a^2 + 4a \cdot a = 2a^2 + 4a^2 = 6a^2$

Bu, **küpün özel bir kare prizma** olduğunun cebirsel kanıtıdır. Aynı biçimde kare prizma formülü de dikdörtgenler prizması formülünden b = a alınarak elde edilir:
$2(ab + ac + bc) = 2(a \cdot a + a \cdot c + a \cdot c) = 2a^2 + 4ac$

ETKİNLİK 4 **Aşağıdaki prizmaların yüzey alanlarını hesaplayınız.**

a) Ayrıtı 5 cm olan küp **$6 \cdot 25 = 150\ cm^2$**

b) Ayrıtı 9 cm olan küp **$6 \cdot 81 = 486\ cm^2$**

c) Taban ayrıtı 6 cm, yüksekliği 11 cm olan kare prizma **$2 \cdot 36 + 4 \cdot 66 = 72 + 264 = 336\ cm^2$**

d) Taban ayrıtı 3 cm, yüksekliği 7 cm olan kare prizma **$2 \cdot 9 + 4 \cdot 21 = 18 + 84 = 102\ cm^2$**

e) Ayrıtları 10 cm, 7 cm ve 4 cm olan dikdörtgenler prizması **$2 \cdot (70 + 40 + 28) = 2 \cdot 138 = 276\ cm^2$**

f) Ayrıtları 8 cm, 5 cm ve 3 cm olan dikdörtgenler prizması **$2 \cdot (40 + 24 + 15) = 2 \cdot 79 = 158\ cm^2$**

g) Ayrıtları 12 cm, 6 cm ve 2 cm olan dikdörtgenler prizması **$2 \cdot (72 + 24 + 12) = 2 \cdot 108 = 216\ cm^2$**

h) Yüzey alanı 96 cm² olan küpün bir ayrıtı **$6a^2 = 96 \rightarrow a^2 = 16 \rightarrow a = 4$ cm**

ı) Yüzey alanı 216 cm² olan küpün bir ayrıtı **$6a^2 = 216 \rightarrow a^2 = 36 \rightarrow a = 6$ cm**

i) Ayrıtı 4 cm olan küpün ayrıtı 8 cm olursa yüzey alanı kaç katına çıkar? **$96\ cm^2$'den $384\ cm^2$'ye → 4 katına**

Yüzey Alanı Problemleri

Gerçek hayat problemlerinde yüzey alanı genellikle **kaplama**, **boyama** ya da **ambalajlama** ile ilgilidir. Bu tür sorularda üç noktaya dikkat etmek gerekir:

1. Bütün yüzler sayılacak mı? Kutunun kapağı açıksa üst yüz kaplanmaz; havuzun üstü açıksa yine üst yüz sayılmaz. O yüzün alanı toplam yüzey alanından **çıkarılır**.

2. Birimler uyumlu mu? Ölçüler santimetre, fiyat metrekare cinsindense dönüşüm gerekir: **$1\ m^2 = 10\ 000\ cm^2$**

3. Ölçüler değişince alan nasıl değişir? Bir ayrıt iki katına çıkarsa o ayrıtı içeren yüzlerin alanı iki katına çıkar; ama o ayrıtı içermeyen yüzler değişmez. Bu yüzden yüzey alanı genellikle **iki katına çıkmaz**.

ÖRNEK **Üstü açık kutu problemi.**

Bir hediye kutusu **kare prizma** biçimindedir. Taban ayrıtı **15 cm**, yüksekliği **24 cm**'dir. Kutu, **üst yüzü açık** kalacak biçimde kâğıtla kaplanacaktır.

1. Tam yüzey alanı:
Tabanlar: $2a^2 = 2 \cdot 225 = 450$
Yan yüzler: $4ah = 4 \cdot 15 \cdot 24 = 1440$
$A = 450 + 1440 =$ **$1890\ cm^2$**

2. Üst yüzü çıkaralım:
Bir taban yüzünün alanı: $15 \cdot 15 =$ **$225\ cm^2$**
Kaplanacak alan: $1890 - 225 =$ **$1665\ cm^2$**

3. Maliyet: $1\ m^2$ kâğıt 40 TL ise
$1665\ cm^2 = 1665 : 10\ 000 =$ **$0{,}1665\ m^2$**
Maliyet: $0{,}1665 \cdot 40 =$ **6,66 TL**

NOT **Bir ayrıt iki katına çıkınca yüzey alanı iki katına çıkmaz.**

Yukarıdaki kutunun yüksekliği 24 cm'den **48 cm**'ye çıksın.

Yeni yüzey alanı:
Tabanlar: $2 \cdot 225 =$ **450** (değişmedi)
Yan yüzler: $4 \cdot 15 \cdot 48 =$ **2880** (iki katına çıktı)
$A = 450 + 2880 =$ **$3330\ cm^2$**

Eski alan 1890 idi. İki katı 3780 olurdu; oysa 3330 bulduk.

Sebebi: Yükseklik yalnız **yan yüzleri** etkiledi; **taban yüzleri** aynı kaldı. Bu yüzden toplam iki katına çıkmadı.

Küpte durum farklıdır: Küpte ayrıt iki katına çıkınca bütün yüzler etkilenir ve her yüzün alanı **dört katına** çıkar. Bu yüzden küpün yüzey alanı **dört katına** çıkar.

ETKİNLİK 5 **Aşağıdaki problemleri çözünüz.**

a) Ayrıtları 20 cm, 12 cm ve 8 cm olan bir kutunun yüzey alanı kaç cm^2'dir? **$2 \cdot (240 + 160 + 96) = 2 \cdot 496 = 992\ cm^2$**

b) (a) şıkkındaki kutu üstü açık olacak biçimde kaplanırsa kaç cm^2 kâğıt gerekir? (Üst yüz $20 \cdot 12$'dir.) **$992 - 240 = 752\ cm^2$**

c) Ayrıtı 6 cm olan bir küpün tüm yüzleri boyanacaktır. Boyanacak alan kaç cm^2'dir? **$6 \cdot 36 = 216\ cm^2$**

d) Yüzey alanı 384 cm^2 olan bir küpün bir ayrıtı kaç cm'dir? **$6a^2 = 384 \rightarrow a^2 = 64 \rightarrow a = 8$ cm**

e) Taban ayrıtı 10 cm olan bir kare prizmanın yüzey alanı 680 cm^2 ise yüksekliği kaç cm'dir? **$2 \cdot 100 + 4 \cdot 10 \cdot h = 680 \rightarrow 40h = 480 \rightarrow h = 12$ cm**

f) $1\ m^2$ kaç cm^2'dir? **$100 \cdot 100 = 10\ 000\ cm^2$**