ÇÖZÜMLER

Hacmi Yorumlama, Birim Küplerle Ölçme ve Dikdörtgenler Prizmasının Hacmi

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge **CC BY-NC 4.0** lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabilir.

1. Bölüm Soru 1–5

1 Ayrıt uzunlukları **8 br**, **5 br** ve **3 br** olan bir dikdörtgenler prizması veriliyor.

a) 8 br ve 5 br'lik ayrıtlar tabana aitse taban alanı kaç br^2'dir?
b) Prizmanın hacmi kaç br^3'tür?
c) Yükseklik 3 br yerine 6 br olsaydı hacim kaç br^3 olurdu?
d) Hacim kaç katına çıkmış olurdu?

a) Taban alanı
Taban bir dikdörtgendir; alanı, tabana ait iki dik ayrıtın çarpımıdır.

Taban alanı = 8 · 5 = **40 br^2**

b) Hacim
Hacim = Taban alanı · Yükseklik

Hacim = 40 · 3 = **120 br^3**

Kontrol: Üç ayrıtı doğrudan çarpalım: 8 · 5 · 3 = 120 ✓

c) Yükseklik 6 br olsaydı
Taban değişmedi, yalnızca yükseklik değişti:

Hacim = 40 · 6 = **240 br^3**

d) Kaç katına çıkar?
240 : 120 = **2**

Hacim **2 katına** çıkar.

Neden? Taban alanı sabit kaldığı için hacim yalnızca yükseklikle orantılıdır. Yükseklik 2 katına çıkınca üst üste dizilen katman sayısı 2 katına çıkar, hacim de 2 katına çıkar.

a) 40 br² b) 120 br³ c) 240 br³ d) 2 katına

2 Aşağıda altı ifade veriliyor.

I. 24 br^3
II. 24 br^2
III. 24 br
IV. Bir kutuya boşluk kalmadan sığan birim küplerin sayısı
V. Bir yüzü kaplayan birim karelerin sayısı
VI. Bir ayrıt boyunca yan yana dizilen birim küplerin sayısı

a) Hangileri bir hacim ölçüsüdür?
b) Hangileri bir alan ölçüsüdür?
c) Hangileri bir uzunluk ölçüsüdür?
d) 5 · 4 · 3 işleminin sonucu hangi türden bir ölçüdür? Gerekçelendiriniz.

Ayırt etmenin anahtarı: Kaç tane uzunluk çarpılmış?

- **Bir** uzunluk → uzunluk ölçüsü (br)
- **İki** uzunluğun çarpımı → alan ölçüsü (br^2)
- **Üç** uzunluğun çarpımı → hacim ölçüsü (br^3)

a) Hacim ölçüleri: I ve IV
I'de üs 3'tür.
IV'te kutuyu dolduran birim küpler sayılmaktadır; bu sayının kendisi hacmin tanımıdır.

b) Alan ölçüleri: II ve V
II'de üs 2'dir.
V'te bir **yüzey** kaplanmaktadır; yüzeyi kaplayan birim kare sayısı alandır.

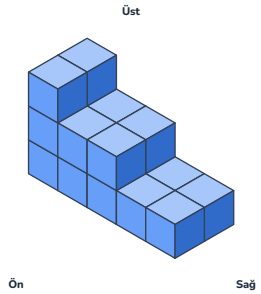
c) Uzunluk ölçüleri: III ve VI
III'te üs yoktur.
VI'da küpler tek bir doğrultuda, **bir ayrıt boyunca** dizilmektedir; bu sayı o ayrıtın kaç birim olduğunu gösterir.

d) 5 · 4 · 3 işleminin sonucu
Burada **üç** uzunluk çarpılmıştır. Öyleyse sonuç bir **hacim** ölçüsüdür: 60 $\mathbf{br^3}$.

Uyarı: Sayıyı doğru bulup birimi yanlış yazmak da hatadır. 5 · 4 · 3 = 60 br^2 yazmak yanlıştır.

a) I, IV b) II, V c) III, VI d) Hacim (60 br^3)

3 Aşağıda birim küplerle oluşturulmuş basamaklı bir yapı verilmiştir. Yapının derinliği her katmanda **2 sıradır**.



a) Her katmanda kaç birim küp vardır?
b) Yapının hacmi kaç birimküptür?
c) Bu yapı, tabanı 5 · 2 olan 3 katmanlı bir dikdörtgenler prizmasına tamamlanacaktır. Kaç küp daha gerekir?
d) Yapının hacmine eşit hacimli, ayrıt uzunlukları birim olan kaç farklı dikdörtgenler prizması kurulabilir?

a) Katmanlardaki küp sayıları
Yapının derinliği **2 sıra** olduğuna göre her katmanı **sütun · sıra** olarak hesaplayalım:

- Alt katman: 5 sütun · 2 sıra = **10 küp**
- Orta katman: 3 sütun · 2 sıra = **6 küp**
- Üst katman: 1 sütun · 2 sıra = **2 küp**

Dikkat: Şekilde yalnızca ön sırayı sayarsan 5 + 3 + 1 = 9 bulursun. Arka sıradaki küpler görünmese de vardır; bu yüzden her katman **2 ile çarpılır**.

b) Yapının hacmi
10 + 6 + 2 = **18 birimküp**

c) Prizmaya tamamlama
Tamamlanmış prizmanın hacmi:

Taban katmanı: 5 · 2 = 10 küp
Hacim: 10 · 3 = **30 birimküp**

Eksik küp sayısı:
30 − 18 = **12 birim küp**

Kontrol: Orta katmanda 10 − 6 = 4, üst katmanda 10 − 2 = 8 küp eksik. 4 + 8 = 12 ✓

d) Hacmi 18 olan farklı prizmalar
18 sayısını üç doğal sayının çarpımı olarak yazalım:

1 · 1 · 18 = 18
1 · 2 · 9 = 18
1 · 3 · 6 = 18
2 · 3 · 3 = 18

Başka bir ayrıştırma yoktur. Öyleyse **4 farklı** prizma kurulabilir.

a) 10, 6 ve 2 küp b) 18 birimküp c) 12 küp d) 4 farklı prizma

4 Bir öğrenci, ayrıtları **6 br**, **4 br** ve **5 br** olan dikdörtgenler prizmasının hacmini şöyle hesaplamıştır:

6 · 4 = 24, 6 · 5 = 30, 4 · 5 = 20
Hacim = 2 · (24 + 30 + 20) = 2 · 74 = 148 br³

a) Öğrencinin hatası nedir?
b) Prizmanın hacmi doğru olarak kaç br³'tür?
c) Öğrencinin bulduğu 148 sayısı aslında neyi verir? Birimiyle yazınız.
d) Hacim ile yüzey alanını karıştırmamak için nasıl bir kontrol yapılabilir?

a) Hata nedir?
Öğrenci, hacim bağıntısı yerine **yüzey alanı** bağıntısını kullanmıştır.

Yaptığı işlem, prizmanın üç farklı yüzünün alanını bulup ikişer kez saymaktır:
A = 2 · (ab + ac + bc)

Bu bir **alan** hesabıdır; hacimle ilgisi yoktur.

b) Doğru hacim
Hacim, üç ayrıtın **çarpımıdır**; toplamı değil.

Taban alanı = 6 · 4 = 24 br²
Hacim = 24 · 5 = **120 br³**

c) 148 sayısı neyi verir?
148 sayısı, bu prizmanın **yüzey alanıdır**: **148 br²**

Öğrencinin işlemi doğruydu, ama sorulan soruya ait değildi. Üstelik sonuna br³ yazarak birimi de yanlış yazmıştır.

d) Nasıl kontrol ederiz?
Üç hızlı kontrol:

• **İşlem türüne bak:** Hacimde ayrıtlar **çarpılır**, toplama yoktur. Bir çözümde "+" görüyorsan büyük olasılıkla alan hesaplıyorsundur.
• **Kaç uzunluk çarpıldı?** Üç uzunluk çarpıldıysa hacim, iki uzunluk çarpıldıysa alandır.
• **Birimi yaz:** br · br · br = br³, br · br = br². Birim, hangi hesabı yaptığını sana söyler.

a) Yüzey alanı bağıntısı kullanılmış b) 120 br³ c) 148 br² (yüzey alanı) d) Çarpım/toplam ve birim kontrolü

5 İki öğrenci tartışıyor.

Ali: "İki prizmanın hacimleri eşitse yüzey alanları da eşittir."
Beril: "Hayır, hacimleri eşit olduğu hâlde yüzey alanları çok farklı olabilir."

a) Hangisi haklıdır?
b) Hacmi 36 br^3 olan iki farklı dikdörtgenler prizması bulup yüzey alanlarını karşılaştırınız.
c) Hacmi 36 br^3 olan prizmalardan hangisinin yüzey alanı en küçüktür?
d) Bu sonuç ambalaj üreten bir firma için ne anlama gelir?

a) Kim haklı?
Beril haklıdır.

Hacim üç ayrıtın **çarpımına**, yüzey alanı ise ayrıtların **ikişerli çarpımlarının toplamına** bağlıdır. Çarpımın aynı kalması, bu toplamın da aynı kalmasını gerektirmez.

b) İki örnek
Hacmi 36 br^3 olan iki prizma seçelim:

1. prizma: 1 · 1 · 36
Hacim: 1 · 1 · 36 = 36 br^3 ✓
Yüzey alanı: 2 · (1 · 1 + 1 · 36 + 1 · 36) = 2 · (1 + 36 + 36) = 2 · 73 = **146 br^2**

2. prizma: 3 · 3 · 4
Hacim: 3 · 3 · 4 = 36 br^3 ✓
Yüzey alanı: 2 · (3 · 3 + 3 · 4 + 3 · 4) = 2 · (9 + 12 + 12) = 2 · 33 = **66 br^2**

Hacimleri eşit, ama yüzey alanları arasında **146 − 66 = 80 br^2** fark var. Beril'in dediği doğru.

c) En küçük yüzey alanı
36'nın bütün üçlü çarpanlarını deneyelim:

1 · 1 · 36 → 146 br^2
1 · 2 · 18 → 2 · (2 + 18 + 36) = 112 br^2
1 · 3 · 12 → 2 · (3 + 12 + 36) = 102 br^2
1 · 4 · 9 → 2 · (4 + 9 + 36) = 98 br^2
1 · 6 · 6 → 2 · (6 + 6 + 36) = 96 br^2
2 · 2 · 9 → 2 · (4 + 18 + 18) = 80 br^2
2 · 3 · 6 → 2 · (6 + 12 + 18) = 72 br^2
3 · 3 · 4 → 66 br^2

En küçük yüzey alanı **3 · 3 · 4** prizmasınındır: **66 br^2**.

Görülen kural: Ayrıtlar birbirine **yakınlaştıkça** (prizma küpe benzedikçe) yüzey alanı küçülür.

d) Firma için anlamı
Kutunun malzemesi yüzey alanıyla orantılıdır. Aynı hacimde ürünü paketleyen bir firma, **küpe en yakın** kutuyu seçerse en az malzeme harcar.

devamı →

5 *(çözümün devamı)*

Bu örnekte 1 · 1 · 36 yerine 3 · 3 · 4 kutusu seçilirse malzemenin yarısından fazlası tasarruf edilir (146 yerine 66 br^2).

a) Beril b) 146 br² ve 66 br² c) 3 · 3 · 4 (66 br²) d) Küpe yakın kutu en az malzeme

2. Bölüm Soru 6–10

6 Dikdörtgenler prizması biçimindeki bir akvaryumun iç ölçüleri **80 cm**, **40 cm** ve **50 cm**'dir. Akvaryumun tabanı 80 cm · 40 cm, yüksekliği ise 50 cm'dir.

a) Akvaryumun hacmi kaç cm³'tür?
b) Akvaryuma 40 cm yüksekliğe kadar su doldurulursa suyun hacmi kaç cm³ olur?
c) Su üstünde kalan boşluğun hacmi kaç cm³'tür?
d) Suyun hacmi, akvaryumun hacminin kaçta kaçıdır?

a) Akvaryumun hacmi
Taban alanı = 80 · 40 = 3200 cm^2
Hacim = 3200 · 50 = **160 000 cm³**

b) Suyun hacmi
Su da bir dikdörtgenler prizması oluşturur. Tabanı akvaryumun tabanıyla **aynıdır**, yüksekliği ise su seviyesidir:

Hacim = 3200 · 40 = **128 000 cm³**

Önemli: Su seviyesi değişince taban değişmez, yalnızca yükseklik değişir. Bu yüzden taban alanını bir kez hesaplamak yeterlidir.

c) Boşluğun hacmi
1. yol – Çıkarma:
160 000 − 128 000 = **32 000 cm³**

2. yol – Doğrudan: Boş kısmın yüksekliği 50 − 40 = 10 cm'dir.
3200 · 10 = 32 000 cm^3 ✓

d) Suyun hacmi akvaryumun kaçta kaçı?
128 000 / 160 000 kesrini sadeleştirelim:

128 000 / 160 000 = 128 / 160 = 16 / 20 = **4/5**

Kısa yol: Taban ortak olduğu için oran, doğrudan **yüksekliklerin oranıdır**: 40 / 50 = 4/5 ✓

a) 160 000 cm³ b) 128 000 cm³ c) 32 000 cm³ d) 4/5

7 Bir dikdörtgenler prizmasının hacmi **1728 br³**, ayrıtlarından ikisi **16 br** ve **9 br**'dir.

a) Üçüncü ayrıtın uzunluğu kaç br'dir?
b) Bu prizma bir küp olabilir mi? Gerekçelendiriniz.
c) Hacmi bu prizmanınkine eşit olan küpün bir ayrıtı kaç br'dir?
d) Prizmanın ve küpün yüzey alanlarını bulup karşılaştırınız.

a) Üçüncü ayrıt
Bilinen iki ayrıtı çarpalım:

$16 \cdot 9 = 144$ br²

Hacim = Taban alanı · Yükseklik olduğundan:
$144 \cdot ? = 1728$
$? = 1728 : 144 =$ **12 br**

Kontrol: $16 \cdot 9 \cdot 12 = 144 \cdot 12 = 1728$ ✓

b) Küp olabilir mi?
Olamaz.
Küpün **üç ayrıtı da eşit** olmalıdır. Bu prizmanın ayrıtları 16, 9 ve 12 br'dir; birbirinden farklıdır. Zaten verilen 16 ≠ 9 olduğu için daha ilk adımda küp olamayacağı anlaşılır.

c) Aynı hacimli küpün ayrıtı
$a \cdot a \cdot a = 1728$ olacak.

Deneyelim: $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ (küçük), $12 \cdot 12 \cdot 12 = 144 \cdot 12 = 1728$ ✓

Küpün ayrıtı: **12 br**

d) Yüzey alanları
Prizma (16, 9, 12):
$16 \cdot 9 = 144$, $16 \cdot 12 = 192$, $9 \cdot 12 = 108$
$A = 2 \cdot (144 + 192 + 108) = 2 \cdot 444 =$ **888 br²**

Küp (12, 12, 12):
Bir yüzün alanı: $12 \cdot 12 = 144$ br²
$A = 6 \cdot 144 =$ **864 br²**

Karşılaştırma: 888 > 864

Hacimleri eşit olmasına rağmen **küpün yüzey alanı daha küçüktür**. Bu, "ayrıtlar birbirine yakınlaştıkça yüzey alanı küçülür" kuralıyla uyumludur; aynı hacimde en küçük yüzey alanına sahip prizma her zaman **küptür**.

a) 12 br b) Hayır, ayrıtlar farklı c) 12 br d) 888 br² > 864 br²

8 Ayrıt uzunlukları aşağıda verilen altı dikdörtgenler prizması inceleniyor.

I. 3 br, 4 br, 5 br
II. 2 br, 5 br, 6 br
III. 4 br, 4 br, 4 br
IV. 2 br, 3 br, 9 br
V. 5 br, 5 br, 2 br
VI. 1 br, 10 br, 6 br

a) Hacmi 60 br^3'e eşit olanları yazınız.
b) Hacmi 60 br^3'ten küçük olanları yazınız.
c) Hacmi 60 br^3'ten büyük olanları yazınız.
d) Hacimleri eşit olan prizmaların ayrıtları da eşit midir? Yanıtınızı bu sorudaki verilerle açıklayınız.

Önce altı prizmanın hacmini bulalım.

I. $3 \cdot 4 \cdot 5 = 12 \cdot 5 =$ **60 br^3**
II. $2 \cdot 5 \cdot 6 = 10 \cdot 6 =$ **60 br^3**
III. $4 \cdot 4 \cdot 4 = 16 \cdot 4 =$ **64 br^3**
IV. $2 \cdot 3 \cdot 9 = 6 \cdot 9 =$ **54 br^3**
V. $5 \cdot 5 \cdot 2 = 25 \cdot 2 =$ **50 br^3**
VI. $1 \cdot 10 \cdot 6 = 10 \cdot 6 =$ **60 br^3**

a) Hacmi 60 br^3 olanlar: I, II ve VI

b) 60 br^3'ten küçük olanlar: IV (54) ve V (50)

c) 60 br^3'ten büyük olan: III (64)

d) Hacimleri eşitse ayrıtları da eşit midir?
Hayır.

I, II ve VI prizmalarının hacimleri eşittir, ama ayrıt uzunlukları tamamen farklıdır:

(3, 4, 5) — (2, 5, 6) — (1, 10, 6)

Bunun nedeni, hacmi belirleyen şeyin ayrıtların **tek tek değerleri değil, çarpımları** olmasıdır. 60 sayısı birçok farklı biçimde üç çarpana ayrılabildiği için hacmi 60 br^3 olan pek çok farklı prizma vardır.

Ek gözlem: III. prizma bir **küptür**; en uzun ayrıtı yalnızca 4 br olduğu hâlde hacmi hepsinden büyüktür. Tek bir ayrıta bakarak hacim hakkında karar verilemez.

a) I, II, VI b) IV, V c) III d) Hayır, ayrıtlar farklı olabilir

9 Dört kutunun taban alanı, yüksekliği ve hacmiyle ilgili bilgiler aşağıda verilmiştir. Her satırda bir bilgi eksiktir.

A kutusu: Taban alanı 24 br^2, yükseklik 5 br, hacim ?
B kutusu: Taban alanı ?, yükseklik 4 br, hacim 96 br^3
C kutusu: Taban alanı 18 br^2, yükseklik ?, hacim 90 br^3
D kutusu: Taban alanı 30 br^2, yükseklik 7 br, hacim ?

a) Eksik bilgileri bulunuz.
b) Hangi kutunun hacmi en büyüktür?
c) A ve B kutularının taban alanlarını karşılaştırınız. Hacimleri neden farklıdır?
d) Taban alanları eşit olan iki kutunun hacimleri neye bağlı olarak değişir?

a) Eksik bilgiler
Kullanacağımız bağıntı: **Hacim = Taban alanı · Yükseklik**

A: Hacim = 24 · 5 = **120 br^3**
B: Taban alanı = 96 : 4 = **24 br^2**
C: Yükseklik = 90 : 18 = **5 br**
D: Hacim = 30 · 7 = **210 br^3**

Not: Hacim aranıyorsa **çarparız**; taban alanı ya da yükseklik aranıyorsa hacmi bilinene **böleriz**.

b) En büyük hacim
120, 96, 90 ve 210 sayılarını karşılaştıralım:

210 > 120 > 96 > 90

En büyük hacim **D kutusunundur: 210 br^3**

c) A ve B karşılaştırması
A'nın taban alanı 24 br^2, B'nin taban alanı da 24 br^2'dir; **taban alanları eşittir**.

Buna rağmen hacimleri farklıdır (120 br^3 ve 96 br^3), çünkü **yükseklikleri farklıdır**: A 5 br, B 4 br.

Tabanları eşit olan iki kutuyu üst üste dizilmiş katmanlar gibi düşünebiliriz. Her katman 24 birimküptür; A'da 5, B'de 4 katman vardır.

d) Taban alanı sabitken hacim neye bağlıdır?
Yalnızca **yüksekliğe** bağlıdır ve onunla **doğru orantılıdır**.

Kontrol edelim: Yükseklikler 5 ve 4, hacimler 120 ve 96.

120 : 96 = 5 : 4 ✓

Yükseklik kaç katına çıkarsa hacim de o kadar katına çıkar.

a) 120 br^3, 24 br^2, 5 br, 210 br^3 b) D c) Tabanlar eşit, yükseklikler farklı d) Yüksekliğe

10 Bir öğrenci iki soruyu şöyle çözmüştür:

1. soru: Ayrıtı 4 cm olan küpün hacmi.
Çözümü: $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64\ cm^2$

2. soru: Taban ayrıtı 3 br, yüksekliği 5 br olan kare prizmanın hacmi.
Çözümü: $3 \cdot 5 = 15\ br^3$

a) 1. sorudaki hata nedir?
b) 2. sorudaki hata nedir?
c) İki sorunun doğru yanıtlarını yazınız.
d) Kare prizmanın hacminde kaç uzunluk çarpılır? Formülle gösteriniz.

a) 1. sorudaki hata
İşlem **doğrudur**: $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$. Hata **birimdedir**.

Üç uzunluk çarpıldığı için birim cm · cm · cm = **cm^3** olmalıdır. Öğrenci cm^2 yazarak sonucu bir **alan** ölçüsü gibi göstermiştir.

b) 2. sorudaki hata
Öğrenci taban ayrıtını **bir kez** kullanmıştır.

Kare prizmanın tabanı bir **karedir**; taban alanı $3 \cdot 3 = 9\ br^2$'dir. Öğrenci $3 \cdot 5$ yazarak aslında yalnızca **bir yan yüzün alanını** hesaplamıştır.

Ayrıca bu kez sonuç bir alan olduğu hâlde birim br^3 yazılmıştır; yani burada da birim yanlıştır.

c) Doğru yanıtlar
1. soru: Hacim = $4 \cdot 4 \cdot 4 =$ **$64\ cm^3$**

2. soru:
Taban alanı = $3 \cdot 3 = 9\ br^2$
Hacim = $9 \cdot 5 =$ **$45\ br^3$**

d) Kaç uzunluk çarpılır?
Hacimde her zaman **üç** uzunluk çarpılır. Kare prizmada taban ayrıtı iki kez kullanılır:

Hacim = $a \cdot a \cdot h = a^2 \cdot h$

Verilenlerle: $3^2 \cdot 5 = 9 \cdot 5 = 45\ br^3$

Genel kontrol: Çözümünde kaç sayı çarptığını say. Hacim için üç tane olmalı; iki tane varsa bir ayrıtı unutmuşsundur.

a) Birim cm^3 olmalı b) Taban alanı $3 \cdot 3$ alınmalı c) 64 cm^3 ve 45 br^3 d) Üç uzunluk: $a \cdot a \cdot h$

3. Bölüm Soru 11–15

11 Dikdörtgenler prizması biçimindeki bir yüzme havuzunun uzunluğu **25 m**, genişliği **12 m**, derinliği **2 m**'dir.

a) Havuz ağzına kadar doldurulduğunda kaç m^3 su alır?
b) Havuzdaki su seviyesi 1,5 m ise sudaki su hacmi kaç m^3'tür?
c) Havuzu ağzına kadar doldurmak için kaç m^3 su daha gerekir?
d) Su seviyesi 1,5 m'den 1,8 m'ye çıkarıldığında havuza kaç m^3 su eklenmiştir?

Ortak adım: Taban alanı
Havuzun tabanı 25 m · 12 m'lik bir dikdörtgendir ve su seviyesi ne olursa olsun **değişmez**:

Taban alanı = 25 · 12 = **300 m^2**

Bu sayıyı bir kez bulup dört şıkta da kullanacağız.

a) Havuzun tamamı
Hacim = 300 · 2 = **600 m^3**

b) Su seviyesi 1,5 m iken
Sudan oluşan cisim de bir dikdörtgenler prizmasıdır; tabanı havuzun tabanı, yüksekliği su seviyesidir:

Hacim = 300 · 1,5 = **450 m^3**

İşlem ipucu: 300 · 1,5 = 300 · 1 + 300 · 0,5 = 300 + 150 = 450

c) Kaç m^3 su daha gerekir?
1. yol – Çıkarma:
600 − 450 = **150 m^3**

2. yol – Boş yüksekliği kullanma:
Boş kısmın yüksekliği: 2 − 1,5 = 0,5 m
300 · 0,5 = 150 m^3 ✓

d) 1,5 m'den 1,8 m'ye
Eklenen suyun oluşturduğu tabaka yine aynı tabana sahiptir; yüksekliği seviyeler farkıdır:

Yükseklik farkı: 1,8 − 1,5 = **0,3 m**
Eklenen su: 300 · 0,3 = **90 m^3**

Kontrol: 1,8 m seviyesindeki su 300 · 1,8 = 540 m^3'tür.
540 − 450 = 90 m^3 ✓

Bu sorudan çıkan kural: Tabanı sabit bir kapta, eklenen ya da eksilen su miktarı doğrudan **taban alanı · seviye farkı** ile bulunur. Her seferinde baştan hacim hesaplamaya gerek yoktur.

a) 600 m^3 b) 450 m^3 c) 150 m^3 d) 90 m^3

12 Bir öğrenci şu iddiada bulunuyor:

"Bir dikdörtgenler prizmasının bütün ayrıtları 3 katına çıkarılırsa hacmi de 3 katına çıkar."

a) İddiayı, ayrıtları 2 br, 3 br ve 4 br olan bir prizma üzerinde deneyiniz.
b) Hacim gerçekte kaç katına çıkmıştır?
c) Bu sonucu, ayrıt uzunlukları a, b ve c olan genel bir prizma için açıklayınız.
d) Yalnızca bir ayrıt 3 katına çıkarılsaydı hacim kaç katına çıkardı?

a) Örnekle deneme
İlk prizma: 2 br, 3 br, 4 br
Hacim = 2 · 3 · 4 = **24 br³**

Bütün ayrıtlar 3 katına çıkarsa:
2 · 3 = 6 br, 3 · 3 = 9 br, 4 · 3 = 12 br

Yeni hacim = 6 · 9 · 12
6 · 9 = 54, 54 · 12 = **648 br³**

b) Kaç katına çıktı?
648 : 24 = **27**

Hacim 3 katına değil, **27 katına** çıkmıştır. Öğrencinin iddiası **yanlıştır**.

c) Genel açıklama
Ayrıtları a, b ve c olan prizmanın hacmi:

V = a · b · c

Bütün ayrıtlar 3 katına çıkarsa yeni ayrıtlar 3a, 3b ve 3c olur:

V_{yeni} = (3a) · (3b) · (3c)
V_{yeni} = 3 · 3 · 3 · (a · b · c)
V_{yeni} = **27 · V**

Çünkü hacim **üç** uzunluğun çarpımıdır; üç çarpanın her biri 3 katına çıkınca çarpım 3 · 3 · 3 = 27 katına çıkar.

Aynı mantıkla: Bütün ayrıtlar 2 katına çıkarsa hacim 8 katına, yarıya inerse hacim sekizde birine iner.

d) Yalnızca bir ayrıt 3 katına çıkarsa
Diyelim c ayrıtı 3 katına çıksın:

V_{yeni} = a · b · (3c) = 3 · (a · b · c) = **3 · V**

Hacim **3 katına** çıkar. Örnekle kontrol edelim: 2 · 3 · 12 = 72 ve 72 : 24 = 3 ✓

Öğrencinin iddiası aslında **tek bir ayrıt** için doğruydu; hatası bunu üç ayrıtın hepsine genellemekti.

a) 24 br³ → 648 br³ b) 27 katına c) 3 · 3 · 3 = 27 d) 3 katına

13 Hacmi **240 br³** olan bir dikdörtgenler prizmasının taban ayrıtları **8 br** ve **5 br**'dir.

Bir öğrenci şöyle diyor:
"Bu prizmanın yüksekliğini 2 katına çıkarırsam hem hacmi hem de yüzey alanı 2 katına çıkar."

a) Prizmanın yüksekliğini ve yüzey alanını bulunuz.
b) Yükseklik 2 katına çıkarıldığında yeni hacmi ve yeni yüzey alanını bulunuz.
c) Öğrencinin iddiasının hangi kısmı doğru, hangi kısmı yanlıştır?
d) Yüzey alanının neden 2 katına çıkmadığını açıklayınız.

a) Yükseklik ve yüzey alanı
Taban alanı = 8 · 5 = 40 br²
Yükseklik = 240 : 40 = **6 br**

Ayrıtlar: 8 br, 5 br ve 6 br.

8 · 5 = 40, 8 · 6 = 48, 5 · 6 = 30
Yüzey alanı = 2 · (40 + 48 + 30) = 2 · 118 = **236 br²**

b) Yükseklik 2 katına çıkarsa
Yeni yükseklik: 6 · 2 = 12 br. Ayrıtlar: 8 br, 5 br, 12 br.

Yeni hacim: 40 · 12 = **480 br³**

Yeni yüzey alanı:
8 · 5 = 40, 8 · 12 = 96, 5 · 12 = 60
A = 2 · (40 + 96 + 60) = 2 · 196 = **392 br²**

c) İddianın değerlendirilmesi
Hacim kısmı doğrudur: 480 : 240 = 2 ✓

Yüzey alanı kısmı yanlıştır: İddiaya göre 236 · 2 = 472 br² olmalıydı, oysa 392 br² bulduk. 392 < 472.

d) Neden yüzey alanı 2 katına çıkmaz?
Prizmanın altı yüzünü iki gruba ayıralım:

• **Alt ve üst tabanlar** (her biri 8 · 5 = 40 br²): Yükseklik değişse de bu yüzler **hiç değişmez**. Toplam 80 br² sabit kalır.
• **Dört yan yüz** (8 · h ve 5 · h olanlar): Bunların yükseklikleri arttığı için alanları **2 katına** çıkar. Önce 2 · (48 + 30) = 156 br² idi, şimdi 2 · (96 + 60) = 312 br² oldu.

Yani yüzey alanının bir kısmı 2 katına çıkarken bir kısmı **sabit kaldığı** için toplam 2 katına ulaşamaz:

80 + 312 = **392 br²** ✓

Genel sonuç: Hacim üç ayrıtın çarpımı olduğu için bir ayrıt 2 katına çıkınca hacim tam 2 katına çıkar. Yüzey alanı ise bu ayrıtı **içermeyen** yüzleri de barındırdığından aynı oranda büyümez.

devamı →

13 *(çözümün devamı)*

a) 6 br ve 236 br² b) 480 br³ ve 392 br² c) Hacim doğru, yüzey alanı yanlış d) Tabanlar değişmez

14 Bir ambalaj firması, hacmi **48 birimküp** olan ürünler için dikdörtgenler prizması biçiminde kutular tasarlayacaktır. Kutuların ayrıt uzunlukları **birim** (doğal sayı) olacaktır. Karton maliyeti kutunun **yüzey alanıyla** doğru orantılıdır.

a) Hacmi 48 birimküp olan kaç farklı kutu tasarlanabilir? Ayrıtlarını yazınız.
b) En az karton harcayan kutunun ayrıtları nelerdir? Yüzey alanını bulunuz.
c) En çok karton harcayan kutunun yüzey alanı kaçtır?
d) Firma hangi kutuyu seçmelidir? Aradaki fark kaç br²'dir?

a) Hacmi 48 olan kutular
48'i üç doğal sayının çarpımı olarak yazacağız. Sıralı (küçükten büyüğe) yazarak hiçbirini atlamayalım:

1 · 1 · 48
1 · 2 · 24
1 · 3 · 16
1 · 4 · 12
1 · 6 · 8
2 · 2 · 12
2 · 3 · 8
2 · 4 · 6
3 · 4 · 4

Toplam **9 farklı** kutu tasarlanabilir.

Not: 4 · 3 · 4 ile 3 · 4 · 4 aynı kutudur; yalnızca kutunun duruşu değişir. Bu yüzden her üçlüyü bir kez saydık.

b) En az karton harcayan kutu
Yüzey alanını A = 2 · (ab + ac + bc) ile hesaplayalım. "Ayrıtlar birbirine yakınsa yüzey alanı küçüktür" kuralı bize **3 · 4 · 4** kutusunu işaret ediyor; hesaplayalım:

3 · 4 = 12, 3 · 4 = 12, 4 · 4 = 16
A = 2 · (12 + 12 + 16) = 2 · 40 = **80 br²**

Kontrol için en yakın rakiplerine de bakalım:
2 · 4 · 6 → 2 · (8 + 12 + 24) = 2 · 44 = 88 br²
2 · 3 · 8 → 2 · (6 + 16 + 24) = 2 · 46 = 92 br²

Gerçekten de en küçüğü **3 · 4 · 4** kutusudur.

devamı →

14 *(çözümün devamı)*

c) En çok karton harcayan kutu
Ayrıtları birbirinden en uzak olan kutu: **1 · 1 · 48**

1 · 1 = 1, 1 · 48 = 48, 1 · 48 = 48
A = 2 · (1 + 48 + 48) = 2 · 97 = **194 br²**

Bu kutu uzun ve ince bir çubuk gibidir; hacmi diğerleriyle aynı olmasına rağmen yüzeyi çok büyüktür.

d) Firmanın seçimi
Firma **3 · 4 · 4** ölçülerindeki kutuyu seçmelidir.

Fark: 194 − 80 = **114 br²**

Yani en kötü seçim, en iyi seçimin **2 katından fazla** karton harcar (194 : 80 ≈ 2,4). Aynı ürünü aynı hacimde paketlemenin maliyeti, yalnızca kutunun biçimi yüzünden iki katından fazlaya çıkabilir.

a) 9 farklı kutu b) 3 · 4 · 4 → 80 br² c) 194 br² d) 3 · 4 · 4; fark 114 br²

15 Hacmi **72 birimküp** olan dikdörtgenler prizmaları tasarlayacaksınız. Ayrıt uzunlukları doğal sayı olacaktır.

a) Üç ayrıtı da birbirinden farklı olan bir prizma tasarlayıp hacmini kontrol ediniz.
b) Tasarladığınız prizmanın yüzey alanını bulunuz.
c) İki ayrıtı eşit olan bir prizma da tasarlayınız ve yüzey alanını bulunuz.
d) Hacmi 72 birimküp olan prizmalar içinde yüzey alanı en küçük olanı bulunuz ve neden en küçük olduğunu açıklayınız.

a) Üç ayrıtı farklı bir prizma
72'yi üç farklı doğal sayının çarpımı olarak yazmalıyız. Birkaç seçenek vardır:

2 · 4 · 9 = 72 | 3 · 4 · 6 = 72 | 1 · 8 · 9 = 72

Seçimimiz: 3 br, 4 br ve 6 br
Kontrol: 3 · 4 = 12, 12 · 6 = **72** ✓

b) Seçtiğimiz prizmanın yüzey alanı
3 · 4 = 12, 3 · 6 = 18, 4 · 6 = 24
A = 2 · (12 + 18 + 24) = 2 · 54 = **108 br²**

devamı →

15 *(çözümün devamı)*

c) İki ayrıtı eşit olan prizma
72'yi a · a · c biçiminde yazalım:

2 · 6 · 6 = 72 ✓ (b = c = 6)

Yüzey alanı:
2 · 6 = 12, 2 · 6 = 12, 6 · 6 = 36
A = 2 · (12 + 12 + 36) = 2 · 60 = **120 br²**

Başka bir seçenek: 3 · 3 · 8 = 72
A = 2 · (9 + 24 + 24) = 2 · 57 = 114 br²

d) Yüzey alanı en küçük olan prizma
72'nin bütün üçlü ayrıştırmalarını yazıp yüzey alanlarını bulalım:

1 · 1 · 72 → 2 · (1 + 72 + 72) = 290 br²
1 · 2 · 36 → 2 · (2 + 36 + 72) = 220 br²
1 · 3 · 24 → 2 · (3 + 24 + 72) = 198 br²
1 · 4 · 18 → 2 · (4 + 18 + 72) = 188 br²
1 · 6 · 12 → 2 · (6 + 12 + 72) = 180 br²
1 · 8 · 9 → 2 · (8 + 9 + 72) = 178 br²
2 · 2 · 18 → 2 · (4 + 36 + 36) = 152 br²
2 · 3 · 12 → 2 · (6 + 24 + 36) = 132 br²
2 · 4 · 9 → 2 · (8 + 18 + 36) = 124 br²
2 · 6 · 6 → 2 · (12 + 12 + 36) = 120 br²
3 · 3 · 8 → 2 · (9 + 24 + 24) = 114 br²
3 · 4 · 6 → 2 · (12 + 18 + 24) = 108 br²

En küçük yüzey alanı **3 · 4 · 6** prizmasınındır: **108 br²**

Neden en küçük?
Listeye yukarıdan aşağıya baktığında bir düzen görürsün: ayrıtlar birbirinden uzaklaştıkça (1 · 1 · 72 gibi) yüzey alanı büyüyor, ayrıtlar birbirine yaklaştıkça (3 · 4 · 6 gibi) küçülüyor.

Bunun nedeni, uzun ve ince bir prizmada çok büyük iki yan yüzün oluşmasıdır. Ayrıtlar dengelendiğinde hiçbir yüz aşırı büyümez ve toplam yüzey küçülür.

Aynı hacimde en küçük yüzey alanı **küpte** elde edilir. 72 tam bir küp sayısı olmadığı için küp yapamıyoruz; bu yüzden küpe **en yakın** üçlü olan 3 · 4 · 6 en iyi sonucu veriyor.

a) 3 · 4 · 6 = 72 b) 108 br² c) 2 · 6 · 6 → 120 br² d) 3 · 4 · 6 (108 br²)