KONU ANLATIMLI SORU ÇÖZÜMLERİ

Hacmi Yorumlama, Birim Küplerle Ölçme ve Dikdörtgenler Prizmasının Hacmi

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge **CC BY-NC 4.0** lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabilir.

ÇÖZÜMLÜ SORU 1 — Birim küplerle hacim ve eksik küpler

Dikdörtgenler prizması biçimindeki bir kutunun tabanına birim küpler **6 sütun** ve **4 sıra** hâlinde diziliyor. Kutu **5 katman** yüksekliğindedir.

a) Taban katmanında kaç birim küp vardır?

b) Kutunun hacmi kaç birimküptür?

c) Kutuya şu ana kadar 48 birim küp yerleştirilmişse kaç küp daha gerekir?

d) Aynı kutunun yüksekliği 5 yerine 10 katman olsaydı hacim kaç katına çıkardı?

1 a) Taban katmanındaki küp sayısı

Taban katmanı, tabana ait **iki dik ayrıt** boyunca dizilen küplerden oluşur. Burada bir yönde 6, diğer yönde 4 küp var:

$6 \cdot 4 =$ **24 birim küp**

Bu sayı aynı zamanda tabanın **alanıdır**: 24 br^2.

2 b) Kutunun hacmi

Her katman taban katmanının aynısıdır ve 5 katman vardır:

Hacim = (Taban katmanındaki küp sayısı) · (Katman sayısı)

Hacim = $24 \cdot 5 =$ **120 birimküp**

Aynı sonucu üç ayrıtı çarparak da buluruz: $6 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

3 c) Kaç küp daha gerekir?

Kutunun tamamı 120 küp alıyor, içinde 48 küp var:

$120 - 48 =$ **72 birim küp** daha gerekir.

Kontrol: 48 küp, 48 : 24 = 2 katman eder. Geriye 5 − 2 = 3 katman kalır; $3 \cdot 24 = 72$ küp. İki yol da aynı sonucu verdi.

4 d) Yükseklik iki katına çıkarsa

Taban katmanı değişmediği için hacim yalnızca katman sayısıyla orantılıdır:

Yeni hacim = $24 \cdot 10 =$ **240 birimküp**

240 : 120 = **2**

Hacim **2 katına** çıkar.

Dikkat: Burada yalnızca **bir** ayrıt 2 katına çıktı, bu yüzden hacim de 2 katına çıktı. **Üç** ayrıtın hepsi 2 katına çıksaydı hacim $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ katına çıkardı.

Sonuç: a) 24 küp b) 120 birimküp c) 72 küp d) 2 katına (240 birimküp)

ÇÖZÜMLÜ SORU 2 **Üç prizma türünün hacmi ve sıralama**

Aşağıdaki üç prizma veriliyor:
A: Ayrıtları 12 br, 5 br ve 4 br olan dikdörtgenler prizması
B: Taban ayrıtı 7 br, yüksekliği 6 br olan kare prizma
C: Ayrıtı 8 br olan küp
a) A'nın hacmini bulunuz.
b) B'nin hacmini bulunuz.
c) C'nin hacmini bulunuz.
d) Üç prizmayı hacimlerine göre büyükten küçüğe sıralayınız.

1 a) Dikdörtgenler prizması

Tabana ait iki dik ayrıtı seçelim: 12 br ve 5 br.

Taban alanı = $12 \cdot 5 = 60$ br^2
Hacim = $60 \cdot 4 =$ **240 br^3**

Hangi ikisini taban seçersen seç sonuç değişmez: $(12 \cdot 4) \cdot 5 = 48 \cdot 5 = 240$.

2 b) Kare prizma

Kare prizmanın tabanı karedir, iki taban ayrıtı da 7 br:

Taban alanı = $7 \cdot 7 = 49$ br^2
Hacim = $49 \cdot 6 =$ **294 br^3**

Sık yapılan hata: Kare prizmada yüksekliği de taban ayrıtıyla karıştırıp $7 \cdot 7 \cdot 7$ yazmak. Yükseklik ayrı verilmiştir: 6 br.

3 c) Küp

Küpün üç ayrıtı da eşittir:

Hacim = $8 \cdot 8 \cdot 8 = 64 \cdot 8 =$ **512 br^3**

4 d) Sıralama

Bulduğumuz üç hacmi karşılaştıralım:

$512 > 294 > 240$

Öyleyse sıralama: **C (küp) > B (kare prizma) > A (dikdörtgenler prizması)**

Yorum: A'nın en uzun ayrıtı (12 br) diğer ikisinden büyük olduğu hâlde hacmi en küçüktür. Çünkü hacmi belirleyen tek bir ayrıt değil, **üç ayrıtın çarpımıdır**.

Sonuç: a) 240 br^3 b) 294 br^3 c) 512 br^3 d) Küp > Kare prizma > Dikdörtgenler prizması

ÇÖZÜMLÜ SORU 3 **Hacimden eksik ayrıta**

a) Hacmi 1440 br^3 olan bir dikdörtgenler prizmasının iki ayrıtı 15 br ve 8 br'dir. Üçüncü ayrıtı kaç br'dir?
b) Hacmi 216 br^3 olan küpün bir ayrıtı kaç br'dir?
c) Hacmi 96 br^3, yüksekliği 6 br olan kare prizmanın taban ayrıtı kaç br'dir?
d) (a) şıkkındaki prizmanın yüzey alanı kaç br^2'dir?

1 a) Üçüncü ayrıt

Bilinen iki ayrıtı çarpalım, yani tabanı oluşturalım:

$15 \cdot 8 = 120$ br^2

Hacim = Taban alanı · Yükseklik olduğundan:

$120 \cdot ? = 1440$

$? = 1440 : 120 =$ **12 br**

Kontrol: $15 \cdot 8 \cdot 12 = 1440$ ✓

2 b) Küpün ayrıtı

Küpte üç ayrıt da eşittir:

$a \cdot a \cdot a = 216$

Deneyelim: $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ (küçük), $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ ✓

$a =$ **6 br**

3 c) Kare prizmanın taban ayrıtı

Önce taban alanını bulalım. Hacim = Taban alanı · Yükseklik olduğundan:

Taban alanı = $96 : 6 = 16$ br^2

Taban **kare** olduğu için:

$a \cdot a = 16 \rightarrow 4 \cdot 4 = 16 \rightarrow a =$ **4 br**

Kontrol: $4 \cdot 4 \cdot 6 = 96$ ✓

4 d) Yüzey alanı

(a) şıkkında ayrıtları **15 br**, **8 br** ve **12 br** bulmuştuk. Dikdörtgenler prizmasında üç farklı yüz vardır ve her biri ikişer tanedir:

$15 \cdot 8 = 120$ br^2
$15 \cdot 12 = 180$ br^2
$8 \cdot 12 = 96$ br^2

Yüzey alanı = $2 \cdot (120 + 180 + 96) = 2 \cdot 396 =$ **792 br^2**

Dikkat: Hacim **br^3**, yüzey alanı **br^2** ile yazılır.

Sonuç: a) 12 br b) 6 br c) 4 br d) 792 br^2

ÇÖZÜMLÜ SORU 4 **Sandığa kaç kutu sığar?**

Bir market deposundaki sandığın iç ölçüleri **120 cm**, **80 cm** ve **60 cm**'dir. Sandığın içine, ayrıtı **20 cm** olan eş küp kutular boşluk kalmayacak biçimde dizilecektir.
a) Sandığın hacmi kaç cm^3'tür?
b) Bir küp kutunun hacmi kaç cm^3'tür?
c) Sandığa kaç kutu sığar?
d) Aynı sayıyı hacimleri bölmeden de bulabilir miyiz? Gerekçelendiriniz.

1 **a) Sandığın hacmi**

Taban alanı = 120 · 80 = 9600 cm^2

Hacim = 9600 · 60 = **576 000 cm^3**

2 **b) Bir kutunun hacmi**

Kutu bir küptür, ayrıtı 20 cm:

Hacim = 20 · 20 · 20 = 400 · 20 = **8000 cm^3**

3 **c) Kaç kutu sığar?**

Kutular boşluk kalmadan dizildiğine göre, sandığın hacmi kutunun hacminin kaç katıysa o kadar kutu sığar:

576 000 : 8000 = **72 kutu**

Bu, 1. bölümde gördüğümüz **eş nesnelerle hacim yorumlama** fikrinin ta kendisidir: sandığın hacmi, bir kutunun hacminin 72 katıdır.

4 **d) Kutu saymadan bulmak**

Evet, bulabiliriz. Her ayrıt boyunca kaç kutu dizildiğine bakalım:

- 120 cm'lik ayrıt boyunca: 120 : 20 = **6** kutu
- 80 cm'lik ayrıt boyunca: 80 : 20 = **4** kutu
- 60 cm'lik ayrıt boyunca: 60 : 20 = **3** kutu

Yani kutular 6 · 4 = 24'lük katmanlar hâlinde, 3 katman olarak dizilir:

6 · 4 · 3 = **72 kutu**

Neden iki yol da işe yarıyor? Çünkü kutunun ayrıtı (20 cm) sandığın **üç ayrıtını da** tam bölüyor. Bölünme tam olmasaydı boşluk kalırdı ve "hacmi hacme bölme" yolu yanıltıcı olurdu.

Sonuç: a) 576 000 cm^3 b) 8000 cm^3 c) 72 kutu d) Evet; 6 · 4 · 3 = 72