KONU ANLATIMI · CEVAPLI

Hacmi Yorumlama, Birim Küplerle Ölçme ve Dikdörtgenler Prizmasının Hacmi

Kazanımlar: MAT.7.2.5. Hacmi eş nesneler aracılığıyla yorumlayabilme ve birim küplerle ölçebilme · MAT.7.2.6. Dikdörtgenler prizmasının hacim bağıntısını elde edebilme ve hacmini hesaplayabilme

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge **CC BY-NC 4.0** lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabilir.

Hacmi Eş Nesneler Aracılığıyla Yorumlama

Hacim, bir cismin uzayda kapladığı yerdir. Bir kabın hacmi, o kabın içine ne kadar madde alabildiğini gösterir.

Hacmi ölçmek için her zaman formül gerekmez. İki kabın hacmini, içlerine sığan **eş nesnelerin sayısını** karşılaştırarak da yorumlayabiliriz.

- Bir kaba sığan eş nesne sayısı **fazlaysa** o kabın hacmi **büyüktür**.
- İki kaba sığan nesne sayılarının **oranı**, hacimlerinin oranını verir.

Burada tek bir koşul vardır: karşılaştırmada kullanılan nesneler **birbirinin eşi** olmalıdır.

Bir örnek üzerinden düşünelim.

Aynı boydaki meyve suyu kutularıyla doldurulan iki koli var. Küçük koliye **10** kutu, büyük koliye **20** kutu sığıyor.

Kutuların hepsi eş olduğu için her biri aynı hacmi kaplar. Öyleyse kolilerin hacimlerini kutu sayılarını bölerek karşılaştırabiliriz:

20 : 10 = **2**

Büyük kolinin hacmi, küçük kolinin hacminin **2 katıdır**.

Dikkat edersen burada hiçbir uzunluk ölçmedik; yalnızca **saydık**. Eş nesnelerle ölçme, hacmi anlamanın en temel yoludur.

1. Kaba Sığan Eş Nesne	2. Kaba Sığan Eş Nesne	Hacimlerin Oranı	Yorum
6	18	18 : 6 = 3	2. kabın hacmi 1. kabın **3 katı**
4	20	20 : 4 = 5	2. kabın hacmi 1. kabın **5 katı**
5	10	10 : 5 = 2	2. kabın hacmi 1. kabın **2 katı**
4	14	14 : 4 = 3,5	2. kabın hacmi 1. kabın **3,5 katı**
12	6	12 : 6 = 2	1. kabın hacmi 2. kabın **2 katı**

NOT **Nesneler eş değilse karşılaştırma yanıltır.**

Bir kaba 30 bilye, diğerine 12 top sığıyorsa "30 > 12 olduğu için birincinin hacmi büyüktür" diyemezsin. Çünkü bilye ile top **eş değildir**; bir topun kapladığı yer bir bilyeninkinden kat kat fazladır.

Sayıları karşılaştırabilmek için **aynı nesnenin** her iki kaba kaç tane sığdığına bakmalısın.

İşte bu yüzden matematikte hacim ölçüsü için herkesin üzerinde anlaştığı ortak bir nesne seçilmiştir: **birim küp**.

ETKİNLİK 1 **Aşağıdaki ifadelerden doğru olanların yanına "D", yanlış olanların yanına "Y" yazınız.**

a) D Hacim, bir cismin uzayda kapladığı yerdir.

b) D Hacimleri nesne sayısıyla karşılaştırırken nesnelerin eş olması gerekir.

c) D Tüm ayrıtlarının uzunluğu 1 birim olan küpe birim küp denir.

d) D Bir cismin hacmi, içine boşluk kalmadan yerleşen birim küplerin sayısıdır.

e) Y Dikdörtgenler prizmasının hacmi, taban alanı ile yüksekliğin toplamına eşittir.

f) Y Hacim ölçüsü br^2 birimiyle ifade edilir.

g) D Bir ayrıtı a olan küpün hacmi a · a · a işlemiyle bulunur.

h) D Kare prizmanın hacmi, taban ayrıtının karesi ile yüksekliğin çarpımına eşittir.

ı) Y Hacimleri eşit olan iki prizmanın ayrıt uzunlukları da eşit olmak zorundadır.

i) D Hacimleri eşit olan iki prizmanın yüzey alanları farklı olabilir.

j) D Bir prizmanın hacmi ve iki ayrıtı biliniyorsa üçüncü ayrıt bölme işlemiyle bulunur.

k) Y Bir yapının resminde arkada kalan küpler hacme dâhil edilmez.

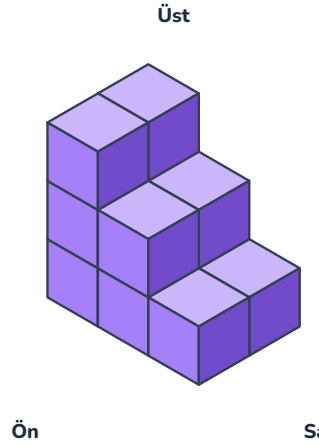
Birim Küp ile Hacim Ölçme

Birim küp, tüm ayrıtlarının uzunluğu **1 birim** olan küptür. Hacmi **1 birimküp** olarak kabul edilir.

Bir cismin hacmi, o cismin içine **boşluk kalmayacak biçimde** yerleştirilen birim küplerin **sayısıdır**.

Hacim ölçüsü yazılırken **birimküp** ya da **br^3** kullanılır.

Birim küp tek başına bir uzunluk ya da alan ölçme aracı **değildir**; ancak düzenli biçimde dizildiğinde ayrıt uzunlukları ve taban alanı hakkında da dolaylı olarak bilgi verir: bir ayrıt boyunca yan yana dizilen küp sayısı, o ayrıtın kaç birim olduğunu gösterir.



Birim küplerle oluşturulmuş, alt katmanında 6, orta katmanında 4, üst katmanında 2 küp bulunan basamaklı bir yapı. Sağ, arka ve üst yönler işaretlenmiştir.

Bir yapıdaki birim küpleri nasıl sayarız?

Rastgele saymak yerine düzenli saymak çok daha güvenlidir. İki yol vardır:

• **1. yol – Katmanlara ayır:** En alttaki katmanın küplerini say, sonra bir üst katmana geç. Sonunda katman sayılarını topla.
• **2. yol – Sütunlara ayır:** Tabandaki her karenin üzerine kaç küp dizildiğini yaz, sonra bu sayıları topla.

Yukarıdaki yapı **2 sıra derinliğindedir**. Katmanlara ayıralım:

- Alt katman: 3 · 2 = **6** küp
- Orta katman: 2 · 2 = **4** küp
- Üst katman: 1 · 2 = **2** küp

6 + 4 + 2 = **12 birimküp**

NOT **Görünmeyen küpleri unutma!**

Bir yapının resminde **arkada** ve **altta** kalan küpler görünmez. Yalnızca gözüne çarpan yüzeyleri sayarsan hacmi **eksik** bulursun.

İki sıra derinliğindeki bir yapıda, önde gördüğün her küpün arkasında bir küp daha vardır. Yukarıdaki yapıda gördüğün küplerin neredeyse yarısı arka sıradadır.

Güvenli yol: Önce yapının **derinliğini** (kaç sıra olduğunu) belirle, sonra her katmanı **sütun · sıra** olarak hesapla. Böylece görünmeyen küpler de sayıya dâhil olur.

ETKİNLİK 2 **Aşağıda özellikleri verilen yapıların kaç birim küpten oluştuğunu bulunuz.**

a) Alt katmanında 8, üst katmanında 5 küp bulunan yapı **8 + 5 = 13 birimküp**

b) Tabanında 3 sütun, 2 sıra küp dizili olan 4 katmanlı prizma **(3 · 2) · 4 = 24 birimküp**

c) Tabanında 5 sütun, 5 sıra küp dizili olan 2 katmanlı prizma **25 · 2 = 50 birimküp**

d) Tabanında 4 sütun, 1 sıra küp dizili olan 1 katmanlı yapı **4 · 1 = 4 birimküp**

e) Tabanında 4 sütun, 2 sıra küp dizili olan 2 katmanlı prizma **8 · 2 = 16 birimküp**

f) Tabanında 5 sütun, 4 sıra küp dizili olan 2 katmanlı prizma **20 · 2 = 40 birimküp**

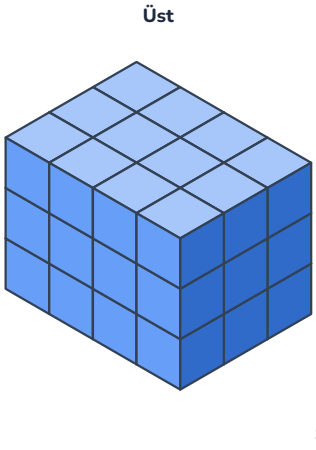
g) Tabanında 4 sütun, 3 sıra küp dizili olan 3 katmanlı prizma **12 · 3 = 36 birimküp**

h) Katmanları alttan üste 9, 6, 3 ve 1 küp olan yapı **9 + 6 + 3 + 1 = 19 birimküp**

ı) Her katmanında 7 küp bulunan 6 katmanlı yapı **7 · 6 = 42 birimküp**

i) 36 birim küple, her katmanında 9 küp olan kaç katmanlı prizma kurulur? **36 : 9 = 4 katman**

Taban × Katman: Hacim Bağıntısını Elde Etme



Birim küplerle oluşturulmuş dikdörtgenler prizması. Tabanda 4 sütun ve 3 sıra küp dizili, prizma 3 katmandan oluşuyor; toplam 36 birim küp.

Yukarıdaki prizmayı inceleyelim.

Taban katmanındaki küpler **4 sütun** ve **3 sıra** hâlinde dizilmiş:

Taban katmanındaki küp sayısı = 4 · 3 = **12**

Prizmada üst üste **3 katman** var ve her katman taban katmanının aynısı. Öyleyse küpleri tek tek saymaya gerek yok:

12 + 12 + 12 = 3 · 12 = **36 birimküp**

Buradan çok önemli bir bağıntı çıkar.

Dikdörtgenler prizmasının hacim bağıntısı

Hacim = (Taban katmanındaki birim küp sayısı) · (Katman sayısı)

Taban katmanındaki küp sayısı, tabana ait **iki dik ayrıtın çarpımına**; katman sayısı da prizmanın **yüksekliğine** eşittir. Ayrıt uzunlukları a, b ve c ise:

Hacim = a · b · c

Burada a, b ve c bir köşede birleşen üç ayrıtın uzunluklarıdır.

ÖRNEK **Bağıntıyı birkaç prizmada deneyelim.**

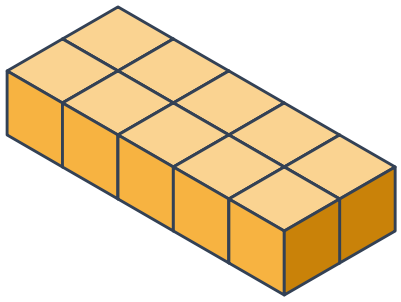
1. Taban katmanında 3 · 4 = 12 küp var, prizma 4 katmanlı.
Hacim = 12 · 4 = **48 birimküp**

2. Taban katmanında 3 · 4 = 12 küp var, prizma 2 katmanlı.
Hacim = 12 · 2 = **24 birimküp**

3. Taban ayrıtları 5 br ve 6 br, yükseklik 4 br.
Taban katmanı: 5 · 6 = 30 küp → Hacim = 30 · 4 = **120 birimküp**

4. Taban ayrıtları 8 br ve 5 br, yükseklik 3 br.
Taban katmanı: 8 · 5 = 40 küp → Hacim = 40 · 3 = **120 birimküp**

Son iki prizmanın ayrıtları farklı, ama **hacimleri eşit**! Bu ayrıntıya 5. bölümde döneceğiz.



Bir kutunun içine yerleştirilmiş 10 birim küp: 5 sütun ve 2 sıra hâlinde, tek katman. Kutunun tabanına toplam 5 sütun ve 4 sıra küp sığmakta, kutu 3 katman yüksekliğindedir.

ÖRNEK **Kutu kaç küple dolar?**

Bir kutunun tabanına **5 sütun** ve **4 sıra** hâlinde birim küp dizilebiliyor; kutu **3 katman** yüksekliğinde. Yukarıdaki şekilde kutuya şimdiye kadar yerleştirilen küpler görülüyor: taban katmanının yalnızca ön iki sırası dolmuş, yani **5 · 2 = 10** küp konmuş.

1. adım – Kutunun tamamı kaç küp alır?
Taban katmanı: 5 · 4 = 20 küp
Hacim: 20 · 3 = **60 birimküp**

2. adım – Kaç küp daha gerekir?
60 − 10 = **50 birim küp**

Aynı yolla: tabanı 5 · 5 = 25 küp alan 3 katmanlı bir kutunun hacmi 75 birimküptür. İçinde 11 küp varsa 75 − 11 = **64** küp daha gerekir.

ETKİNLİK 3 **Aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri doldurunuz.**

Taban Katmanındaki Küp Sayısı	Katman Sayısı	Hacim (birimküp)
6	2	**12**
12	3	**36**
6	8	48
30	**5**	150
20	3	**60**
25	4	100
18	**7**	126

Hacim Formülü: Taban Alanı × Yükseklik

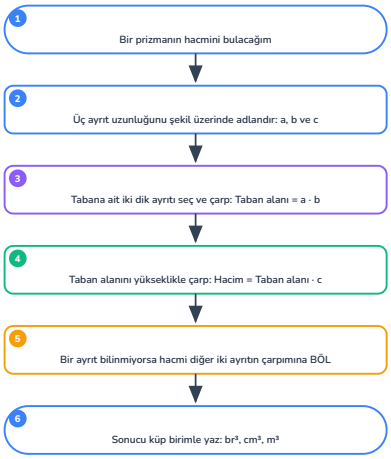
Dikdörtgenler prizmasının hacmi hesaplanırken önce **tabana ait iki dik ayrıt** çarpılır ve **taban alanı** bulunur. Sonra bu taban alanı **yükseklikle** çarpılır.

Hacim = Taban alanı · Yükseklik

Prizma hangi yüzünün üzerine dursa dursun sonuç değişmez. Ayrıtları a, b ve c olan bir dikdörtgenler prizması için üç yazılış da doğrudur:

- Hacim = (a · b) · c
- Hacim = (b · c) · a
- Hacim = (a · c) · b

Üçü de aynı sayıyı verir, çünkü çarpma işleminde çarpanların sırası sonucu değiştirmez.



Bir dikdörtgenler prizmasının hacminin hangi adımlarla hesaplanacağını gösteren akış şeması: ayrıtları adlandır, tabana ait iki dik ayrıtı seç, taban alanını bul, yükseklikle çarp, sonucu küp birimle yaz.

NOT **Neden br^3 yazıyoruz?**

Hacim bulunurken **üç** uzunluk çarpılır:

br · br · br = **br^3**

Bu yüzden hacim ölçüsü **küp birimle** yazılır. Ölçüleri karıştırmamak için şu üçlüyü aklında tut:

- **Uzunluk:** tek ayrıt → br
- **Alan:** iki ayrıtın çarpımı → br^2
- **Hacim:** üç ayrıtın çarpımı → br^3

Sık yapılan hata: Hacmi doğru hesaplayıp sonuna cm^2 yazmak. Sayı doğru olsa bile birim yanlışsa cevap yanlıştır.

Kare prizma ve küp, dikdörtgenler prizmasının özel hâlleridir.

Kare prizmanın tabanı **kare** olduğu için taban alanı a · a = a^2 olur:

Kare prizmanın hacmi = a^2 · h

Küpün **bütün** ayrıtları eşit olduğundan taban alanı a^2, yüksekliği de a'dır:

Küpün hacmi = a · a · a = a^3

Yani üç ayrı formül ezberlemene gerek yok; hepsi tek bir bağıntının, "taban alanı × yükseklik"in görünümleridir.

Prizma	Ayrıtlar	Taban Alanı	Yükseklik	Hacim
Dikdörtgenler prizması	9, 4 ve 5 br	4 · 9 = 36 br^2	5 br	36 · 5 = **180 br^3**
Dikdörtgenler prizması	12, 7 ve 10 br	7 · 12 = 84 br^2	10 br	84 · 10 = **840 br^3**
Dikdörtgenler prizması	5, 2 ve 7 br	2 · 5 = 10 br^2	7 br	10 · 7 = **70 br^3**
Kare prizma	4, 4 ve 10 br	4 · 4 = 16 br^2	10 br	16 · 10 = **160 br^3**
Kare prizma	5, 5 ve 12 br	5 · 5 = 25 br^2	12 br	25 · 12 = **300 br^3**
Küp	6, 6 ve 6 br	6 · 6 = 36 br^2	6 br	36 · 6 = **216 br^3**
Küp	10, 10 ve 10 br	10 · 10 = 100 br^2	10 br	100 · 10 = **1000 br^3**

ÖRNEK **Ayrıtlar ondalık sayı olursa ne değişir?**

Bağıntı hiç değişmez; yalnızca çarpma işlemi ondalıklı yapılır.

Ayrıtları **15,5 br**, **10 br** ve **5,4 br** olan dikdörtgenler prizmasının hacmini bulalım.

Doğrudan yol:
Taban alanı = 15,5 · 10 = 155 br^2
Hacim = 155 · 5,4 = 775 + 62 = **837 br^3**

Kolay yol: Çarpanların sırasını değiştirip önce 10 ile çarpalım:
5,4 · 10 = 54 → 54 · 15,5 = 810 + 27 = **837 br^3**

İki yol da aynı sonucu verdi. Ondalık sayılarla çalışırken **10 ile çarpmayı öne almak** işlemi çok kısaltır.

ETKİNLİK 4 **Aşağıda verilen prizmaların hacimlerini (h, ı ve i şıklarında istenen uzunluğu) bulunuz.**

a) Ayrıtları 7 br, 5 br ve 3 br olan dikdörtgenler prizması **35 · 3 = 105 br^3**

b) Ayrıtları 10 br, 6 br ve 4 br olan dikdörtgenler prizması **60 · 4 = 240 br^3**

c) Taban ayrıtı 9 br, yüksekliği 2 br olan kare prizma **81 · 2 = 162 br^3**

d) Taban ayrıtı 6 br, yüksekliği 11 br olan kare prizma **36 · 11 = 396 br^3**

e) Ayrıtı 7 br olan küp **49 · 7 = 343 br^3**

f) Ayrıtı 12 br olan küp **144 · 12 = 1728 br^3**

g) Ayrıtları 8 br, 2,5 br ve 4 br olan dikdörtgenler prizması **8 · 2,5 = 20 → 20 · 4 = 80 br^3**

h) Taban alanı 45 br^2, yüksekliği 8 br olan prizmanın hacmi **45 · 8 = 360 br^3**

ı) Hacmi 210 br^3, taban alanı 35 br^2 olan prizmanın yüksekliği **210 : 35 = 6 br**

i) Hacmi 512 br^3 olan küpün bir ayrıtı **8 · 8 · 8 = 512 → 8 br**

Eksik Ayrıtı Bulma ve Hacmi Eşit Farklı Prizmalar

Hacim biliniyorsa eksik ayrıt bulunabilir.

Hacim bağıntısı bir **çarpma** işlemidir. Çarpımı ve çarpanlardan bazılarını biliyorsan, eksik çarpanı **bölme** ile bulursun.

İzlenecek yol şudur:

- Bilinen iki ayrıtı çarp.
- Hacmi, bulduğun bu çarpıma böl.
- Sonuç, eksik ayrıtın uzunluğudur.

Küpte ise üç ayrıt da eşit olduğu için, hacmi veren **a · a · a** çarpımını sağlayan sayıyı deneyerek buluruz.

ÖRNEK **Üç ters problem çözelim.**

1. Bir dikdörtgenler prizmasının iki ayrıtı 20 br ve 12 br, hacmi 1920 br^3'tür. Üçüncü ayrıt kaç br'dir?

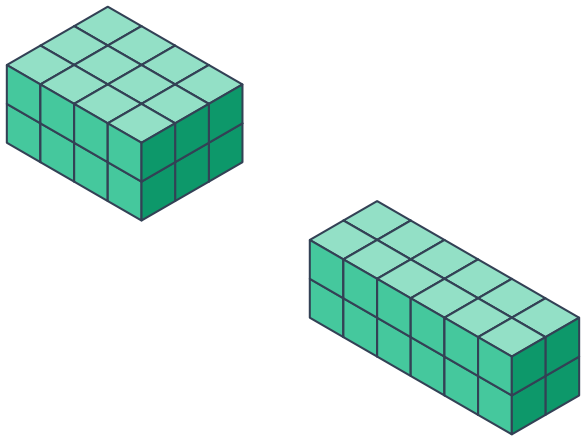
? · 20 · 12 = 1920
? · 240 = 1920
? = 1920 : 240 = **8 br**

2. Hacmi 125 br^3 olan küpün bir ayrıtı kaç br'dir?

a · a · a = 125 ve 5 · 5 · 5 = 125 olduğundan a = **5 br**

3. Hacmi 45 br^3, yüksekliği 5 br olan kare prizmanın taban ayrıtı kaç br'dir?

Taban alanı = 45 : 5 = 9 br^2
3 · 3 = 9 olduğundan taban ayrıtı = **3 br**



Birim küplerle kurulmuş iki farklı dikdörtgenler prizması yan yana. Soldaki 4 sütun, 3 sıra ve 2 katman (24 birim küp), sağdaki 6 sütun, 2 sıra ve 2 katmandır (24 birim küp).

Hacmi eşit, görünüşü farklı prizmalar

Yukarıdaki iki prizmaya bak:

- **Soldaki:** 4 · 3 · 2 = **24 birimküp**
- **Sağdaki:** 6 · 2 · 2 = **24 birimküp**

Ayrıtları tamamen farklı, ama hacimleri **aynı**. Çünkü hacmi belirleyen şey ayrıtların tek tek değerleri değil, **çarpımlarıdır**.

Öyleyse verilen bir hacme sahip prizma oluşturmak için yapılacak iş bellidir: hacmi **üç çarpana ayırmak**. 24 sayısını üç doğal sayının çarpımı olarak kaç farklı biçimde yazabiliyorsan, o kadar farklı prizma kurabilirsin.

Ayrıtlar (a · b · c)	Hacim	Yüzey Alanı = 2 · (ab + ac + bc)
1 · 1 · 24	24 br^3	2 · (1 + 24 + 24) = **98 br^2**
1 · 2 · 12	24 br^3	2 · (2 + 12 + 24) = **76 br^2**
1 · 3 · 8	24 br^3	2 · (3 + 8 + 24) = **70 br^2**
1 · 4 · 6	24 br^3	2 · (4 + 6 + 24) = **68 br^2**
2 · 2 · 6	24 br^3	2 · (4 + 12 + 12) = **56 br^2**
2 · 3 · 4	24 br^3	2 · (6 + 8 + 12) = **52 br^2**

NOT **Hacimleri eşit olan prizmaların yüzey alanları eşit olmak zorunda değildir.**

Yukarıdaki tabloda altı prizmanın da hacmi **24 br^3**, ama yüzey alanları **52 br^2** ile **98 br^2** arasında değişiyor.

Bir kural görünüyor: ayrıtlar birbirine **yakınlaştıkça** (prizma küpe benzedikçe) yüzey alanı **küçülür**; prizma uzayıp inceldikçe yüzey alanı **büyür**.

Bu yüzden aynı hacimdeki bir ürün için **en az ambalaj** istendiğinde küpe en yakın kutu seçilir.

Sık yapılan hata: "Hacimleri eşitse yüzey alanları da eşittir" demek. Tam tersi de yanlıştır: yüzey alanları eşit olan iki prizmanın hacimleri de farklı olabilir.

ETKİNLİK 5 **Aşağıdaki problemleri çözünüz.**

a) Ayrıtları 30 cm, 20 cm ve 15 cm olan bir kutunun hacmi kaç cm^3'tür? **30 · 20 = 600 → 600 · 15 = 9000 cm^3**

b) (a) şıkkındaki kutuya, ayrıtı 5 cm olan kaç küp kutu boşluk kalmadan sığar? **9000 : 125 = 72 kutu (ya da 6 · 4 · 3 = 72)**

c) Hacmi 720 br^3 olan bir dikdörtgenler prizmasının iki ayrıtı 12 br ve 6 br ise üçüncü ayrıtı kaç br'dir? **12 · 6 = 72 → 720 : 72 = 10 br**

d) Ayrıt uzunlukları birim olan, hacmi 24 birimküp olan kaç farklı dikdörtgenler prizması kurulabilir? **6 tane: 1·1·24, 1·2·12, 1·3·8, 1·4·6, 2·2·6, 2·3·4**

e) Hacmi 36 birimküp olan prizmalardan hangisinin yüzey alanı en küçüktür? **3 · 3 · 4 olan; yüzey alanı 2 · (9 + 12 + 12) = 66 br^2**

f) Bir küpün ayrıtı 2 katına çıkarılırsa hacmi kaç katına çıkar? **$(2a)^3 = 8a^3$ → 8 katına**