

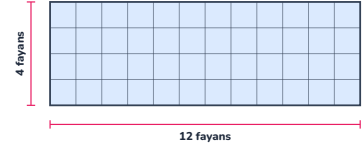
ÇÖZÜMLER

Pozitif Tam Sayıların Çarpanları ve Asal Çarpanlara Ayırma

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge CC BY-NC 4.0 lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabılır.

1. Bölüm Soru 1-5

- 1** Bir seramik atölyesinde **48 adet özdeş kare fayans** kullanılarak, aralarında boşluk kalmayacak biçimde **dikdörtgen bir pano** oluşturulacaktır. Her fayansın bir kenarı **10 cm**'dir. Atölyenin ilk denediği düzen **şekilde** verilmiştir.



- a) Şekildeki düzende kullanılan fayans sayısını ve panonun santimetre cinsinden çevresini bulunuz.
b) Aynı 48 fayansla kaç farklı dikdörtgen pano oluşturulabilir? (Yalnızca 90° döndürülmüş düzenler aynı sayılır.)
c) Panonun kenarına takılacak çerçeve için en az malzeme hangi düzende kullanılır? Bu düzendeki çevre kaç santimetredir?

- a) Fayans sayısı satır $\times$ sütun ile bulunur: $12 \cdot 4 = 48$ fayans ✓

Panonun kenar uzunlukları: $12 \cdot 10 = 120$ cm ve $4 \cdot 10 = 40$ cm

$$\text{Çevre} = 2 \cdot (120 + 40) = 2 \cdot 160 = 320 \text{ cm}$$

- b) Satır ve sütun sayıları 48'in bir **çarpan çifti** olmalıdır:

$$48 = 1 \cdot 48 = 2 \cdot 24 = 3 \cdot 16 = 4 \cdot 12 = 6 \cdot 8$$

Sıradaki deneme 8'dir ama $8 \cdot 6$ zaten yazıldı, dur.

Toplam **5 farklı** dikdörtgen pano oluşturulabilir.

- c) Alan sabitken çevre, kenarlar **birbirine en yakın** olduğunda en küçüktür. En yakın çift **6 ve 8**'dir.

$$\text{Kenarlar: } 6 \cdot 10 = 60 \text{ cm ve } 8 \cdot 10 = 80 \text{ cm}$$

$$\text{Çevre} = 2 \cdot (60 + 80) = 280 \text{ cm}$$

Kontrol — diğer düzenlerin çevreleri: $1 \cdot 48 \rightarrow 980$ cm, $2 \cdot 24 \rightarrow 520$ cm, $3 \cdot 16 \rightarrow 380$ cm, $4 \cdot 12 \rightarrow 320$ cm. En küçüğü gerçekten **280 cm** ✓

Atölye ilk düzeninde 320 cm çerçeve kullanacaktı; 6×8 düzenine geçerse **40 cm** malzeme tasarruf eder.

✓ Doğru Sonuç: a) 48 fayans, çevre 320 cm b) 5 farklı pano c) 6×8 düzeni, çevre 280 cm

- 2** Bir müzede vitrinler **18, 25, 36, 40, 49, 63, 64, 90, 100, 121** numaralarıyla etiketlenmiştir. Rehber, vitrinleri numaralarının **pozitif tam sayı çarpan sayısı** tek olanlar ve çift olanlar biçiminde iki gruba ayıracaktır.

- a) Vitrin numaralarını çarpan sayısı tek ve çarpan sayısı çift olmak üzere iki gruba ayırınız.
 b) Çarpan sayısı tek olan gruptaki sayıların ortak özelliği nedir? Bu özelliği kullanarak kuralı bir cümleyle yazınız.
 c) 400 numaralı bir vitrin olsaydı hangi gruba girerdi? Çarpanlarını tek tek yazmadan karar veriniz.

- a) Her sayının çarpanları gökkuşağı yöntemiyle yazılır:

- $18 \rightarrow 1, 2, 3, 6, 9, 18 \rightarrow 6$ (çift)
- $25 \rightarrow 1, 5, 25 \rightarrow 3$ (tek)
- $36 \rightarrow 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 \rightarrow 9$ (tek)
- $40 \rightarrow 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40 \rightarrow 8$ (çift)
- $49 \rightarrow 1, 7, 49 \rightarrow 3$ (tek)
- $63 \rightarrow 1, 3, 7, 9, 21, 63 \rightarrow 6$ (çift)
- $64 \rightarrow 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 \rightarrow 7$ (tek)
- $90 \rightarrow 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90 \rightarrow 12$ (çift)
- $100 \rightarrow 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100 \rightarrow 9$ (tek)
- $121 \rightarrow 1, 11, 121 \rightarrow 3$ (tek)

Çarpan sayısı tek: 25, 36, 49, 64, 100, 121

Çarpan sayısı çift: 18, 40, 63, 90

- b) Tek gruptaki sayıların hepsi bir **tam karedir**: $25 = 5^2$, $36 = 6^2$, $49 = 7^2$, $64 = 8^2$, $100 = 10^2$, $121 = 11^2$.

Kural: Bir doğal sayının çarpan sayısı tek ise o sayı bir tam karedir; tam kare ise çarpan sayısı tektir.

Neden: Gökkuşağında çarpanlar ikişer ikişer eşleşir. Ortada tek başına kalan bir çarpan ancak **eşi kendisi** olduğunda oluşur, yani $a \cdot a = \text{sayı}$ olduğunda.

- c) $400 = 20 \cdot 20$ olduğundan **tam karedir**; bu yüzden **çarpan sayısı tek** olan gruba girer. İstersen formülle de doğrulanabilir: $400 = 2^4 \cdot 5^2 \rightarrow (4 + 1) \cdot (2 + 1) = 5 \cdot 3 = 15$ (tek) ✓

✓ Doğru Sonuç: a) Tek: 25, 36, 49, 64, 100, 121 — Çift: 18, 40, 63, 90 b) Tek olanlar tam karedir c) Tek grubu ($400 = 20^2$, 15 çarpan)

3 Bir okul kütüphanesine gelen **126 kitap**, her rafta **eşit sayıda** kitap olacak biçimde raflara yerleştirilecektir. Raf sayısı da her raftaki kitap sayısı da birer pozitif tam sayıdır.

a) 126 sayısını asal çarpanlarına ayırıp çarpan sayısını formülle bulunuz.

b) Raf sayısının 1'den ve 126'dan farklı olması isteniyorsa kaç farklı yerleştirme yapılabilir?

c) Raf sayısı ile bir raftaki kitap sayısı birbirine en yakın olacak biçimde yerleştirme yapılırsa bu iki sayı kaç olur?

- a) Asal çarpan algoritması:**

$$126 : 2 = 63 \text{ (bölen 2)}$$

$$63 : 3 = 21 \text{ (bölen 3)}$$

$$21 : 3 = 7 \text{ (bölen 3)}$$

$$7 : 7 = 1 \text{ (bölen 7)}$$

$$126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$$

$$\text{Çarpan sayısı} = (1 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (1 + 1) = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$$

- b) Raf sayısı 126'nın bir çarpanı olmalıdır. Gökkuşağı yöntemiyle çarpanlar:**

$$126 = 1 \cdot 126 = 2 \cdot 63 = 3 \cdot 42 = 6 \cdot 21 = 7 \cdot 18 = 9 \cdot 14$$

→ **1, 2, 3, 6, 7, 9, 14, 18, 21, 42, 63, 126** (12 tane ✓ (a) ile uyuyor)

1 ve 126 dışlanınca geriye **10** çarpan kalır.

Yani **10 farklı** yerleştirme yapılabilir.

- c) Gökkuşağı çiftlerinde iki sayının birbirine en yakın olduğu çift **9 · 14**'tür.**

Farkları: $126 - 1 = 125$, $63 - 2 = 61$, $42 - 3 = 39$, $21 - 6 = 15$, $18 - 7 = 11$, **$14 - 9 = 5$** → en küçük fark ✓

Yani **9 raf** ve her rafta **14 kitap** (ya da 14 raf ve rafta 9 kitap) olur.

✓ Doğru Sonuç: a) $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$, 12 çarpan b) 10 farklı yerleştirme c) 9 ve 14

- 4** Bir bahçıvan, alanı 72 m^2 olan dikdörtgen biçiminde bir sebze bahçesini tel çitle çevirecektir. Bahçenin metre cinsinden kenar uzunlukları birer tam sayıdır.

Bahçıvan şöyle düşünüyor: "**Çitten tasarruf etmek istiyorum. O hâlde kenarları 1 m ve 72 m seçerim; çünkü 1 çok küçük bir sayı.**"

- a) Bahçıvanın düşüncesi doğru mudur? Hesaplayarak gösteriniz.
 b) Çit uzunluğu en az olacak biçimde kenarlar nasıl seçilmelidir? En az çit kaç metredir?
 c) Bahçıvanın elinde 40 m tel çit vardır. Bahçeyi çevirebilir mi? Gerekçelendiriniz.

- a) Bahçıvanın düşüncesi **yanlıştır**. Kenarları 1 m ve 72 m seçerse:

$$\text{Çevre} = 2 \cdot (1 + 72) = 2 \cdot 73 = 146 \text{ m}$$

Bu, bütün seçenekler arasında **en büyük** çevredir. Çünkü alan sabitken bir kenar küçüldükçe eşi büyür ve **toplamları** artar. Küçük olan yalnızca bir kenardır; çevre iki kenarın toplamına bağlıdır.

- b) 72'nin bütün çarpan çiftleri ve çevreleri:

$$1 \cdot 72 \rightarrow 2 \cdot 73 = 146 \text{ m}$$

$$2 \cdot 36 \rightarrow 2 \cdot 38 = 76 \text{ m}$$

$$3 \cdot 24 \rightarrow 2 \cdot 27 = 54 \text{ m}$$

$$4 \cdot 18 \rightarrow 2 \cdot 22 = 44 \text{ m}$$

$$6 \cdot 12 \rightarrow 2 \cdot 18 = 36 \text{ m}$$

$$8 \cdot 9 \rightarrow 2 \cdot 17 = 34 \text{ m}$$

En küçük çevre, kenarlar **birbirine en yakın** olduğunda çıkar: **8 m ve 9 m**, çevre **34 m**.

- c) **Evet, çevirebilir**. En az çit gerektiren düzen 34 m'dir ve $34 < 40$ olduğundan 40 m tel yeterlidir; hatta 6 m artar.

Ancak bu yalnızca **8×9** düzeni için geçerlidir. Bir sonraki seçenek olan 6×12 düzeni 36 m gerektirir ve bu da 40 m ile yapılabilir; fakat 4×18 düzeni 44 m gerektirdiği için **yapılamaz**. Yani çit yeterlidir ama bahçenin boyutları rastgele seçilemez.

✓ **Doğru Sonuç: a) Yanlış; 1×72 en büyük çevreyi (146 m) verir b) $8 \text{ m} \times 9 \text{ m}$, çevre 34 m c) Evet; $34 \text{ m} \leq 40 \text{ m}$**

- 5** Deniz, sınavda karşısına çıkan $A = 2^3 \cdot 2^2 \cdot 5$ sayısının kaç tane pozitif tam sayı çarpanı olduğunu şöyle hesaplamıştır:

"Üsler 3, 2 ve 1'dir. O hâlde çarpan sayısı
 $(3 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (1 + 1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ 'tür."

- a) Deniz'in hangi adımda hata yaptığını açıklayınız.
 b) Doğru çarpan sayısını bulunuz.
 c) A sayısını hesaplayınız ve çarpanlarını yazarak (b) şıkkındaki sonucu doğrulayınız.

- a) Çarpan sayısı formülü olan $(x + 1) \cdot (y + 1) \cdot (z + 1)$, yalnızca tabanlar **birbirinden farklı asal sayılar** olduğunda geçerlidir.

Deniz'in ifadesinde 2^3 ve 2^2 terimlerinin **tabanı aynıdır** (ikisi de 2). Deniz bunları iki ayrı asal çarpanmış gibi ele alıp formüle iki ayrı parantez olarak yazmıştır. **Hata budur.**

Önce aynı tabanlı üslü ifadeler birleştirilmeliydi.

- b) Aynı tabanlı üslü ifadelerde çarpma yapılırken **üsler toplanır**:

$$2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5$$

$$A = 2^5 \cdot 5$$

Şimdi tabanlar 2 ve 5, yani **farklı asal** sayılardır. Formül uygulanabilir:

$$\text{Çarpan sayısı} = (5 + 1) \cdot (1 + 1) = 6 \cdot 2 = 12$$

- c) $A = 2^5 \cdot 5 = 32 \cdot 5 = 160$

160'ın çarpanlarını gökkuşağı yöntemiyle bulalım:

$$160 = 1 \cdot 160 = 2 \cdot 80 = 4 \cdot 40 = 5 \cdot 32 = 8 \cdot 20 = 10 \cdot 16$$

→ **1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 32, 40, 80, 160**

Sayalım: **12 çarpan** ✓ (b) şıkkıyla uyuyor.

Deniz'in bulduğu 24, doğru cevabın **tam iki katıdır**; çünkü aynı tabanı iki kez sayarak fazladan bir $(1 + 1)$ çarpanı eklemiştir.

✓ **Doğru Sonuç: a) Aynı tabanlı $2^3 \cdot 2^2$ birleştirilmeden formül uygulanmış b) 12 çarpan c) $A = 160$, 12 çarpan ✓**

2. Bölüm Soru 6–10

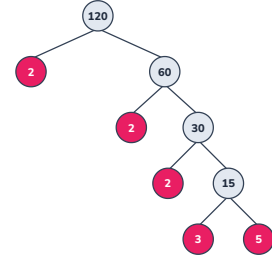
- 6** Bir güvenlik yazılımı, kilit kodlarını $B = 3^2 \cdot 5^a$ biçiminde üretmektedir. Burada a bir pozitif tam sayıdır. Yazılımın ürettiği bir kodun **12 tane** pozitif tam sayı çarpanı olduğu bilinmektedir.

- a) a değerini bulunuz.
 b) B sayısını hesaplayınız.
 c) B 'nin kendisi hariç en büyük çarpanını bulunuz.
 d) B bir tam kare midir? Gerekçelendiriniz.

- a) $B = 3^2 \cdot 5^a$ yazılışında tabanlar 3 ve 5, yani farklı asal sayılardır. Çarpan sayısı:
 $(2 + 1) \cdot (a + 1) = 12$
 $3 \cdot (a + 1) = 12$
 $a + 1 = 12 : 3 = 4$
 $a = 3$
- b) $B = 3^2 \cdot 5^3 = 9 \cdot 125$
 $9 \cdot 125 = 1125$
- c) Kendisi hariç en büyük çarpan, gökkuşağında **1 hariç en küçük çarpanın eşidir**:
 kendisi hariç en büyük çarpan = $B : (1 \text{ hariç en küçük çarpan})$
 $B = 3^2 \cdot 5^3$ tek bir sayıdır, 2 ile bölünmez. En küçük asal çarpanı **3**'tür.
 $1125 : 3 = 375$
 Kontrol: $375 \cdot 3 = 1125 \checkmark$
- d) **Hayır, tam kare değildir.** İki gerekçe verilebilir:
 1. Asal çarpanlarına ayrılmış biçimde bütün üsler çift olmalıdır. $B = 3^2 \cdot 5^3$ yazılışında 3'ün üssü çift (2 $\checkmark$) ama 5'in üssü **tek** (3 $\times$).
 2. Tam kare sayıların çarpan sayısı **tek** olur. B 'nin çarpan sayısı 12, yani **çift**tir.

✓ Doğru Sonuç: a) $a = 3$ b) $B = 1125$ c) 375 d) Hayır (5'in üssü tek, çarpan sayısı çift)

- 7** Bir sınıf panosunda bir sayının **çarpan ağacı** sergilenmektedir. Ağaçta koyu renkli daireler **asal** sayıları göstermektedir.



- a) Ağacın en alt sırasındaki sayıları yazınız ve bu sayıyı üslü ifadelerin çarpımı biçiminde gösteriniz.
 b) Ağaçta görünen 60, 30 ve 15 sayıları bu sayının asal çarpanı mıdır? Gerekçelendiriniz.
 c) Bu sayının kaç tane pozitif tam sayı çarpanı vardır? Formülle bulunuz.

- a) Ağaç şöyle ayrılmıştır: $120 \rightarrow 2$ ve 60 ; $60 \rightarrow 2$ ve 30 ; $30 \rightarrow 2$ ve 15 ; $15 \rightarrow 3$ ve 5 .

En alt sırada (ağacın uçlarında) kalan sayılar: **2, 2, 2, 3, 5**

$$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

Aynı tabanlar üslü olarak toplanır:

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

- b) Hayır, asal çarpanı değildirler.

60, 30 ve 15 sayıları 120'yi kalansız böldükleri için 120'nin **çarpanıdır**; ancak **asal değildirler** ($60 = 2 \cdot 30$, $30 = 2 \cdot 15$, $15 = 3 \cdot 5$).

Asal çarpanlar yalnızca ağacın **en alt sırasında** kalan sayılardır. 120'nin **farklı** asal çarpanları **2, 3 ve 5**'tir.

Ara dallar ağacın nasıl kurulduğunu gösteren basamaklardır; sonuç değildirler.

- c) $120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$ olduğuna göre üsler 3, 1 ve 1'dir:

$$\text{Çarpan sayısı} = (3 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 4 \cdot 2 \cdot 2 = \mathbf{16}$$

Kontrol (gökkuşağı): $120 = 1 \cdot 120 = 2 \cdot 60 = 3 \cdot 40 = 4 \cdot 30 = 5 \cdot 24 = 6 \cdot 20 = 8 \cdot 15 = 10 \cdot 12$

$\rightarrow 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120 \rightarrow \mathbf{16 \text{ tane}} \checkmark$

✓ Doğru Sonuç: a) 2, 2, 2, 3, 5 $\rightarrow 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ b) Hayır, çarpanıdır ama asal değildir c) 16 çarpan

8 Bir öğrenci **180** sayısını asal çarpan algoritmasıyla ayırmak istemiş ve defterine şunu yazmıştır:

$$\begin{array}{r|l} 180 & 4 \\ 45 & 5 \\ 9 & 9 \\ 1 & \end{array}$$

Ardından " $180 = 4 \cdot 5 \cdot 9$ 'dur; asal çarpanları 4, 5 ve 9'dur" sonucuna varmıştır.

- a) Öğrencinin bölme işlemleri doğru mudur? Kontrol ediniz.
 b) Öğrencinin hatası nedir? Algoritmanın kuralını yazınız.
 c) 180'i doğru biçimde asal çarpanlarına ayırınız.
 d) Öğrenci kendi yazdığı biçimden çarpan sayısını hesaplasaydı hangi sonucu bulurdu? Doğrusu kaçtır?

- a) Bölme işlemleri **doğrudur**:

$$180 : 4 = 45 \checkmark \quad 45 : 5 = 9 \checkmark \quad 9 : 9 = 1 \checkmark$$

$$\text{Ayrıca } 4 \cdot 5 \cdot 9 = 180 \checkmark$$

Yani aritmetikte bir yanlışlık yoktur.

- b) Hata **bölenlerin seçimindedir**. Asal çarpan algoritmasında çizginin sağına yalnızca **asal sayılar** yazılabilir. Öğrenci 4 ve 9'u kullanmıştır; bunlar asal değildir ($4 = 2 \cdot 2$, $9 = 3 \cdot 3$).

Kural: Her adımda sol taraftaki sayıyı bölen **en küçük asal sayı** seçilir ve sol taraf 1 olana kadar devam edilir. Çizginin sağındaki sayılar o zaman sayının asal çarpanları olur.

Öğrencinin yazdığı $4 \cdot 5 \cdot 9$ bir **çarpanlara ayrılıştır** ama **asal çarpanlara ayrılış değildir**.

- c) Doğru algoritma:

$$180 : 2 = 90 \text{ (bölen 2)}$$

$$90 : 2 = 45 \text{ (bölen 2)}$$

$$45 : 3 = 15 \text{ (bölen 3)}$$

$$15 : 3 = 5 \text{ (bölen 3)}$$

$$5 : 5 = 1 \text{ (bölen 5)}$$

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Farklı asal çarpanları: **2, 3 ve 5**

- d) Öğrenci $180 = 4 \cdot 5 \cdot 9$ biçimini kullansaydı üsleri 1, 1, 1 sayar ve $(1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 8$ bulurdu.

Doğrusu ise $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ üzerinden:

devamı →

8 (çözümün devamı)

$$(2 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (1 + 1) = 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$$

Aradaki fark, formülün **asal olmayan** tabanlarla çalışmamasından kaynaklanır.

✓ **Doğru Sonuç: a) İşlemler doğru b) Bölenler asal değil (4 ve 9) c) $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ d) Öğrenci 8 bulurdu, doğrusu 18**

- 9** Bir kargo firması **252 kg** ağırlığındaki bir yükü, **eşit kütleli** kolilere bölerek gönderecektir. Koli sayısı da bir kolinin kilogram cinsinden kütlesi de birer pozitif tam sayıdır. Firmanın aracına göre **koli sayısı 10'dan fazla, 30'dan az** olmalıdır.

- a) 252 sayısını asal çarpanlarına ayırınız ve çarpan sayısını formülle bulunuz.**
b) Firma kaç farklı koli sayısı seçebilir? Bunları yazınız.
c) Kargo kurallarına göre bir kolinin kütlesi 15 kg'ı geçemez. Bu durumda koli sayısı en az kaç olmalıdır?

- a) Asal çarpan algoritması:**

$$252 : 2 = 126 \rightarrow 126 : 2 = 63 \rightarrow 63 : 3 = 21 \rightarrow 21 : 3 = 7 \rightarrow 7 : 7 = 1$$

$$252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$$

$$\text{Çarpan sayısı} = (2 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (1 + 1) = 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$$

- b) Koli sayısı 252'nin bir çarpanı olmalıdır. Gökkuşağı yöntemiyle:**

$$252 = 1 \cdot 252 = 2 \cdot 126 = 3 \cdot 84 = 4 \cdot 63 = 6 \cdot 42 = 7 \cdot 36 = 9 \cdot 28 = 12 \cdot 21 = 14 \cdot 18$$

→ **1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 12, 14, 18, 21, 28, 36, 42, 63, 84, 126, 252** (18 tane ✓)

10 < koli sayısı < 30 koşulunu sağlayanlar:

12, 14, 18, 21, 28 → **5 farklı** seçenek.

- c) Bir kolinin kütlesi 252 : (koli sayısı) olduğundan:**

$$252 : n \leq 15 \rightarrow n \geq 252 : 15 = 16,8$$

n bir tam sayı olduğu için $n \geq 17$ olmalıdır; ayrıca n, 252'nin bir çarpanı ve $10 < n < 30$ olmalıdır. (b) şıkkındaki listede 17'den büyük veya eşit olanlar: **18, 21, 28**.

Bunların en küçüğü **18**'dir.

$$\text{Kontrol: } 252 : 18 = 14 \text{ kg} \leq 15 \checkmark$$

Bir önceki seçenek olan 14 koli denenirse $252 : 14 = 18 \text{ kg} > 15$ olurdu ×

✓ **Doğru Sonuç: a) $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$, 18 çarpan b) 12, 14, 18, 21, 28 (5 seçenek) c) En az 18 koli (14 kg)**

- 10** Bir kütüphane, kitap kodlarını sayıların **farklı asal çarpan sayısına** göre renklendirmektedir. Elinizdeki kodlar şunlardır:

16, 21, 30, 32, 45, 49, 60, 66, 81, 105, 128, 175

- a) Bu sayıları farklı asal çarpan sayısı 1, 2 ve 3 olanlar biçiminde üç gruba ayırınız. Her sayıyı asal çarpanlarına ayrılmış biçimiyle yazınız.
 b) Birinci gruptaki (tek bir asalın kuvveti olan) sayılardan hangilerinin çarpan sayısı tektir? Bunun üsle ilişkisini açıklayınız.
 c) Listede olmayan, tam olarak 4 farklı asal çarpanı bulunan en küçük sayıyı yazınız.

- a) Her sayı asal çarpanlarına ayrılır:

1 farklı asal çarpan:

$$16 = 2^4 \mid 32 = 2^5 \mid 49 = 7^2 \mid 81 = 3^4 \mid 128 = 2^7$$

2 farklı asal çarpan:

$$21 = 3 \cdot 7 \mid 45 = 3^2 \cdot 5 \mid 175 = 5^2 \cdot 7$$

3 farklı asal çarpan:

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \mid 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \mid 66 = 2 \cdot 3 \cdot 11 \mid 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$$

- b) Birinci gruptaki sayıların çarpan sayısı, tek bir parantezden oluşur: p^x için $(x + 1)$.
 - $16 = 2^4 \rightarrow 4 + 1 = 5$ (tek) ✓
 - $32 = 2^5 \rightarrow 5 + 1 = 6$ (çift)
 - $49 = 7^2 \rightarrow 2 + 1 = 3$ (tek) ✓
 - $81 = 3^4 \rightarrow 4 + 1 = 5$ (tek) ✓
 - $128 = 2^7 \rightarrow 7 + 1 = 8$ (çift)

Çarpan sayısı tek olanlar: **16, 49, 81**

İlişki: $(x + 1)$ tek olması için x 'in **çift** olması gerekir. Üssü çift olan bir asal kuvveti de zaten bir **tam karedir**: $16 = 4^2$, $49 = 7^2$, $81 = 9^2$. Bu, "çarpan sayısı tek $\Leftrightarrow$ tam kare" kuralıyla birebir uyuşur.

- c) Farklı asal çarpan sayısı 4 olan bir sayı, dört farklı asalın çarpımını içermelidir. En küçük değeri bulmak için **en küçük dört asal** seçilir ve her biri **1'inci kuvvetten** alınır:

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$$

Daha küçüğü olamaz; çünkü asallardan herhangi birini büyütmek ya da bir üssü artırmak sayıyı büyütür.

✓ **Doğru Sonuç:** a) 1 asal: 16, 32, 49, 81, 128 — 2 asal: 21, 45, 175 — 3 asal: 30, 60, 66, 105 b) 16, 49, 81 (üssü çift olanlar) c) 210

3. Bölüm Soru 11–15

11 Bir matematik kulübünde üç öğrenci şu iddiaları ortaya atmıştır:

I. Ela: "Çarpan sayısı 3 olan her sayı, bir asal sayının karesidir."

II. Mert: "Çarpan sayısı çift olan her sayı çift sayıdır."

III. Sude: "Çarpan sayısı asal olan her sayı, bir asal sayının kuvvetidir."

a) Ela'nın iddiası doğru mudur? Gerekçelendiriniz.

b) Mert'in iddiası doğru mudur? Doğru değilse karşıt örnek veriniz.

c) Sude'nin iddiası doğru mudur? Gerekçelendiriniz ve bir örnek veriniz.

• a) Ela haklıdır.

Bir sayının çarpan sayısı $(x + 1) \cdot (y + 1) \cdot \dots$ çarpımıdır. Bu çarpımın 3 olması isteniyor. 3 asal olduğundan yalnızca $3 = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots$ biçiminde yazılabilir; yani **tek bir taban** vardır ve onun için $x + 1 = 3$, yani **$x = 2$** 'dir.

Demek ki sayı p^2 biçimindedir (p asal).

Örnekler: $4 = 2^2$ (1, 2, 4), $9 = 3^2$ (1, 3, 9), $25 = 5^2$ (1, 5, 25), $49 = 7^2$ (1, 7, 49) ✓

• b) Mert haksızdır.

Çarpan sayısının çift olması, sayının kendisinin çift olmasını gerektirmez. Çarpan sayısı **sayının tam kare olup olmadığıyla** ilgilidir, tek/çift oluşuyla değil.

Karşıt örnek: $15 = 3 \cdot 5$ sayısının çarpanları 1, 3, 5, 15 → **4 çarpan (çift)**, ama 15 **tek** bir sayıdır.

Başka karşıt örnekler: 21 (4 çarpan), 35 (4 çarpan), 45 (6 çarpan), 105 (8 çarpan) — hepsi tektir.

• c) Sude haklıdır.

Çarpan sayısı asal bir p sayısına eşit olsun. Çarpan sayısı $(x + 1) \cdot (y + 1) \cdot \dots$ biçiminde bir çarpımdır ve p asal olduğu için 1'den büyük **yalnızca bir** çarpanı olabilir. Yani parantezlerden biri p, diğerleri 1 olmalıdır.

Bir parantezin 1 olması o asalın üssünün 0 olması, yani **hiç bulunmaması** demektir.

Geriye tek bir taban kalır:

sayı = q^{p-1} (q asal)

Örnek: Çarpan sayısı 5 (asal) olan sayılar q^4 biçimindedir: $16 = 2^4$ (1, 2, 4, 8, 16) ✓ ve $81 = 3^4$ ✓

Buna karşılık çarpan sayısı 6 (asal değil) olan $12 = 2^2 \cdot 3$ sayısı **iki** farklı asal içerir; iddia yalnızca asal çarpan sayıları için geçerlidir.

✓ Doğru Sonuç: a) Ela doğru (sayı p^2) b) Mert yanlış (karşıt örnek: 15 → 4 çarpan ama tek) c) Sude doğru (sayı q^{p-1})

12 Bir kasanın şifresi $A = 2^a \cdot 3^b$ biçiminde üretilmiştir. Burada a ve b birer **pozitif tam sayıdır** ve şu iki bilgi verilmiştir:

- A sayısının tam olarak **15** pozitif tam sayı çarpanı vardır.
- $a > b$ 'dir.

a) a ve b değerlerini bulunuz. Elediğiniz durumları da yazınız.

b) A sayısını hesaplayınız.

c) A bir tam kare midir? İki farklı yoldan gösteriniz.

d) A'nın kendisi hariç en büyük çarpanını bulunuz.

- a) Tabanlar 2 ve 3, yani farklı asallardır. Çarpan sayısı:

$$(a + 1) \cdot (b + 1) = 15$$

15'i iki çarpanın çarpımı olarak yazalım: $15 = 1 \cdot 15 = 3 \cdot 5 = 5 \cdot 3 = 15 \cdot 1$

- $a + 1 = 1, b + 1 = 15 \rightarrow a = 0 \times$ (a pozitif olmalı)
- $a + 1 = 3, b + 1 = 5 \rightarrow a = 2, b = 4 \times$ ($a > b$ koşulu sağlanmıyor)
- $a + 1 = 5, b + 1 = 3 \rightarrow a = 4, b = 2 \checkmark$ ($4 > 2 \checkmark$)
- $a + 1 = 15, b + 1 = 1 \rightarrow b = 0 \times$ (b pozitif olmalı)

Tek uygun durum: $a = 4, b = 2$

- b) $A = 2^4 \cdot 3^2 = 16 \cdot 9 = 144$

Kontrol: 144'ün çarpan sayısı $(4 + 1) \cdot (2 + 1) = 5 \cdot 3 = 15 \checkmark$

- c) Evet, A bir tam karedir.

1. yol (üsler): $A = 2^4 \cdot 3^2$ yazılışında bütün üsler **çifttir** (4 ve 2). Üsleri ikiye bölersek $A = (2^2 \cdot 3)^2 = 12^2$ olur. Gerçekten $12 \cdot 12 = 144 \checkmark$

2. yol (çarpan sayısı): A'nın çarpan sayısı **15**, yani **tektir**. Çarpan sayısı tek olan her sayı tam karedir.

- d) Kendisi hariç en büyük çarpan = $A : (1 \text{ hariç en küçük çarpan})$

$A = 144$ çift olduğundan 1 hariç en küçük çarpanı **2**'dir.

$$144 : 2 = 72$$

Kontrol: 2 ve 72 gökkuşağında eştir; $2 \cdot 72 = 144 \checkmark$

✓ Doğru Sonuç: a) $a = 4, b = 2$ b) $A = 144$ c) Evet; üsler çift ($144 = 12^2$) ve çarpan sayısı 15 tek d) 72

13 Bir fuarda kurulacak dikdörtgen biçimindeki standın alanı **180 m²** olacaktır. Standın metre cinsinden kenar uzunlukları birer tam sayıdır ve fuar yönetmeliğine göre standın **kısa kenarı 9 m'den az olamaz**.

- a) 180'i asal çarpanlarına ayırıp kaç çarpanı olduğunu bulunuz.
 b) Yönetmeliğe uyan kaç farklı stand boyutu seçilebilir? Bunları yazınız.
 c) Standın çevresi en az olacak biçimde seçim yapılırsa kenar uzunlukları ve çevre kaç metre olur?
 d) (c) şıkkındaki standın çevresine, her köşeye birer tane gelecek biçimde her 3 metrede bir direk dikilecektir. Kaç direk gerekir? Aralık 2 m seçilseydi köşelere direk denk gelir miydi?

- a) $180 : 2 = 90 \rightarrow 90 : 2 = 45 \rightarrow 45 : 3 = 15 \rightarrow 15 : 3 = 5 \rightarrow 5 : 5 = 1$

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$\text{Çarpan sayısı} = (2 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (1 + 1) = 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$$

- b) Kenarlar 180'in bir çarpan çifti olmalıdır. Gökkuşağı yöntemiyle çiftler:

$$1 \cdot 180, 2 \cdot 90, 3 \cdot 60, 4 \cdot 45, 5 \cdot 36, 6 \cdot 30, 9 \cdot 20, 10 \cdot 18, 12 \cdot 15$$

(9 çift $\rightarrow$ 18 çarpan $\checkmark$ (a) ile uyuyor)

Kısa kenar ≥ 9 koşulunu sağlayanlar:

$$9 \times 20, 10 \times 18, 12 \times 15 \rightarrow 3 \text{ farklı stand boyutu.}$$

Diğerlerinde kısa kenar 1, 2, 3, 4, 5 veya 6 olduğu için elenir.

- c) Kalan üç seçeneğin çevreleri:

$$9 \times 20 \rightarrow 2 \cdot (9 + 20) = 58 \text{ m}$$

$$10 \times 18 \rightarrow 2 \cdot (10 + 18) = 56 \text{ m}$$

$$12 \times 15 \rightarrow 2 \cdot (12 + 15) = 54 \text{ m}$$

En küçük çevre **54 m**'dir; kenarlar **12 m ve 15 m**'dir. Bu, kenarların birbirine en yakın olduğu seçenektir $\checkmark$

- d) Köşelere direk denk gelmesi için aralık uzunluğunun **her iki kenarı da** tam bölmesi gerekir. 3 metre için: $12 : 3 = 4 \checkmark$ ve $15 : 3 = 5 \checkmark$ — uygun.

Çevre **kapalı** bir yol olduğundan direk sayısı aralık sayısına eşittir (başlangıç direği aynı zamanda bitiş direğidir):

$$54 : 3 = 18 \text{ direk}$$

Dağılım kontrolü: her 12 m'lik kenarda 4, her 15 m'lik kenarda 5 aralık $\rightarrow 4 + 5 + 4 + 5 = 18 \checkmark$

devamı $\rightarrow$

13 (çözümün devamı)

Aralık 2 m olsaydı: $12 : 2 = 6$ ✓ ama $15 : 2 = 7,5$ ×. 15 metrelik kenar 2'ye tam bölünmediği için köşelere direk **denk gelmezdi**. Köşe koşulunun sağlanması, aralığın kenar uzunluklarının **ortak böleni** olmasına bağlıdır.

✓ **Doğru Sonuç: a) $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, 18 çarpan b) 9×20 , 10×18 , 12×15 (3 seçenek) c) $12 \text{ m} \times 15 \text{ m}$, çevre 54 m d) 18 direk; 2 m aralıkta köşeye denk gelmez ($15 : 2$ tam değil)**

14 Bir okulun bahçesine **294 adet özdeş kare karo**, aralarında boşluk kalmayacak biçimde **dikdörtgen** bir alan oluşturacak şekilde döşenecektir.

Okul müdürü şöyle diyor: "**Karoları bir kare oluşturacak biçimde dizelim, daha güzel görünür.**"

- a) Müdürün istediği mümkün müdür? 294'ü asal çarpanlarına ayırarak gerekçelendiriniz.
 b) Kare elde edebilmek için en az kaç karo eklenmelidir?
 c) 294 karoyla kaç farklı dikdörtgen düzen oluşturulabilir? (Döndürülmüş düzenler aynı sayılır.)

- a) Hayır, mümkün değildir.

Kare oluşabilmesi için karo sayısının bir **tam kare** olması gerekir (satır sayısı = sütun sayısı).

294'ü asal çarpanlarına ayırılım:

$$294 : 2 = 147 \rightarrow 147 : 3 = 49 \rightarrow 49 : 7 = 7 \rightarrow 7 : 7 = 1$$

$$294 = 2 \cdot 3 \cdot 7^2$$

Tam kare olabilmesi için **bütün üslerin çift** olması gerekir. Burada 2'nin üssü 1 ve 3'ün üssü 1'dir, yani **tektir**. Demek ki 294 tam kare değildir.

İkinci gerekçe: çarpan sayısı = $(1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (2 + 1) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$, yani **çift**dir. Çarpan sayısı çift olan sayı tam kare olamaz.

- b) 294'ten büyük ilk tam kareyi arayalım:

$$17^2 = 289 \text{ (294'ten küçük } \times \text{)}$$

$$18^2 = 324 \text{ (294'ten büyük } \checkmark \text{)}$$

Eklenmesi gereken karo sayısı:

$$324 - 294 = 30 \text{ karo}$$

Böylece $18 \times 18 = 324$ karodan oluşan bir kare elde edilir.

devamı →

14 (çözümün devamı)

- **c)** Satır ve sütun sayıları 294'ün bir çarpan çifti olmalıdır. (a) şıkında 294'ün **12** çarpanı olduğunu bulmuştuk.

Gökkuşağında çarpanlar ikiye ikiye eşleştiği ve 294 tam kare olmadığı için ortada tek kalan çarpan yoktur:

$12 : 2 = 6$ farklı dikdörtgen düzen.

Bunlar: $1 \times 294, 2 \times 147, 3 \times 98, 6 \times 49, 7 \times 42, 14 \times 21$ ✓

✓ **Doğru Sonuç: a) Hayır; $294 = 2 \cdot 3 \cdot 7^2$, üsler tek olduğu için tam kare değil b) 30 karo ($324 = 18^2$) c) 6 farklı düzen**

- 15** Bir "sayı tasarım atölyesi" etkinliğinde öğrencilerden, verilen koşulları sağlayan sayılar üretmeleri ve seçimlerini gerekçelendirmeleri istenmektedir. Her maddede birden çok doğru cevap olabilir.

Aşağıdaki koşulların her biri için birer sayı yazınız ve seçiminizi gerekçelendiriniz.

- Tam olarak **10** pozitif tam sayı çarpanı olan, iki basamaklı bir sayı.
- Üç farklı asal çarpanı olan ve tam kare olan en küçük sayı.
- Çarpan sayısı **6** olan ve kendisi tek olan bir sayı.
- 1 hariç en küçük çarpanı **7** olan, iki basamaklı bir sayı.
- Kendisi hariç en büyük çarpanı **24** olan bir sayı.
- İki basamaklı sayılar arasında çarpan sayısı en fazla olan bir sayı.

- **a)** Çarpan sayısı 10 olacak: $(x + 1) \cdot (y + 1) \cdot \dots = 10$. $10 = 10 \cdot 1 = 5 \cdot 2$ biçiminde yazılabilir.
 - Tek taban: $p^9 \rightarrow$ en küçüğü $2^9 = 512$, iki basamaklı değil ✗
 - İki taban: $p^4 \cdot q \rightarrow 2^4 \cdot 3 = 48$ ✓ ya da $2^4 \cdot 5 = 80$ ✓

Cevap: 48 (çarpanları 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48 $\rightarrow$ 10 tane ✓). 80 de olur.

- **b)** Tam kare olması için bütün üsler **çift**, üç farklı asal çarpanı olması için üç ayrı taban gerekir. En küçüğü için **en küçük üç asal** ve **en küçük çift üs** olan 2 seçilir:

$$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 4 \cdot 9 \cdot 25 = 900$$

Kontrol: $900 = 30^2$ ✓, farklı asal çarpanları 2, 3, 5 ✓

Daha küçüğü olamaz; herhangi bir üssü 1'e indirirsek tam kare olmaz, asalları büyütürsek sayı büyür.

- **c)** Çarpan sayısı $6 = 6 \cdot 1 = 3 \cdot 2$ olabilir. Sayının tek olması için tabanlar **tek asal** (2 olmayan) seçilmelidir:
 - $p^2 \cdot q \rightarrow 3^2 \cdot 5 = 45$ ✓ (çarpanları 1, 3, 5, 9, 15, 45 $\rightarrow$ 6 tane)

devamı $\rightarrow$

15 (çözümün devamı)

- $p^5 \rightarrow 3^5 = 243 \checkmark (1, 3, 9, 27, 81, 243)$

Cevap: 45 ($63 = 3^2 \cdot 7$, $75 = 3 \cdot 5^2$, $175 = 5^2 \cdot 7$ de olur).

- **d)** 1 hariç en küçük çarpanın 7 olması, sayının **2, 3 ve 5 ile bölünmemesi** ama 7 ile bölünmesi demektir.

7'nin iki basamaklı katları: 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98

Bunlardan çift olanlar (2 böler) ve 21, 63, 84 (3 böler), 35, 70 (5 böler) elenir.

Geriye **49, 77, 91** kalır.

Cevap: 49 ($= 7^2$, çarpanları 1, 7, 49 $\checkmark$). $77 = 7 \cdot 11$ ve $91 = 7 \cdot 13$ de olur.

- **e)** Kendisi hariç en büyük çarpan = sayı : (1 hariç en küçük asal çarpan) olduğundan:
sayı = $24 \cdot (\text{en küçük asal çarpan})$

- $24 \cdot 2 = 48 \rightarrow 48$ 'in 1 hariç en küçük çarpanı 2 $\checkmark$, $48 : 2 = 24 \checkmark$

- $24 \cdot 3 = 72 \rightarrow$ ama 72 çifttir, en küçük çarpanı 3 değil **2**'dir; $72 : 2 = 36 \times$ (24 çıkmaz)

Cevap: 48. Burada dikkat edilmesi gereken, seçilen asalın gerçekten **o sayının en küçük asal çarpanı** olup olmadığını kontrol etmektir.

- **f)** İki basamaklı sayılar denendiğinde en yüksek çarpan sayısı **12**'dir:

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \rightarrow 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$$

$$72 = 2^3 \cdot 3^2 \rightarrow 4 \cdot 3 = 12$$

$$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \rightarrow 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$$

$$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \rightarrow 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$$

$$96 = 2^5 \cdot 3 \rightarrow 6 \cdot 2 = 12$$

Cevap: 60 (72, 84, 90, 96 da olur).

Daha fazlası için ya daha büyük üsler ya da dört farklı asal gerekir; en küçük dört asalın çarpımı $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$ olduğundan iki basamakta mümkün değildir.

✓ Doğru Sonuç: a) 48 (veya 80) b) 900 c) 45 d) 49 (veya 77, 91) e) 48 f) 60 (72, 84, 90, 96 — 12 çarpan)