

KONU ANLATIMLI SORU ÇÖZÜMLERİ

Pozitif Tam Sayıların Çarpanları ve Asal Çarpanlara Ayırma

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge CC BY-NC 4.0 lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabılır.

ÇÖZÜMLÜ SORU 1

Gökkuşuğu yöntemiyle çarpanları bulma ve formülle doğrulama

90 sayısının bütün pozitif tam sayı çarpanlarını gökkuşuğu yöntemiyle küçükten büyüğe yazınız. Ardından 90'ı asal çarpanlarına ayırıp çarpan sayısını formülle bulunuz ve iki sonucun uyuştüğünü gösteriniz.

1 Çarpan çiftlerini sırayla ara

1'den başlayarak dene ve her bulduğunun eşini yaz:

$$90 = 1 \cdot 90$$

$$90 = 2 \cdot 45$$

$$90 = 3 \cdot 30$$

4 bölmez (90 : 4 kalanlı)

$$90 = 5 \cdot 18$$

$$90 = 6 \cdot 15$$

7 bölmez, 8 bölmez

$$90 = 9 \cdot 10$$

Sıradaki deneme 10'dur ama 10 zaten çiftin büyük üyesi olarak yazıldı. **Dur.**

2 Çarpanları küçükten büyüğe sırala

Çiftlerin sol üyeleri soldan, sağ üyeleri sağdan yazılır:

1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90

Gökkuşuğu eşleşmesi: 1-90, 2-45, 3-30, 5-18, 6-15, 9-10. Her eşin çarpımı 90'dır ✓

Ortada tek kalan çarpan **yoktur**; demek ki 90 tam kare değildir.

3 Asal çarpanlarına ayır

Asal çarpan algoritmasıyla:

$$90 : 2 = 45 \quad (\text{bölen } 2)$$

$$45 : 3 = 15 \quad (\text{bölen } 3)$$

$$15 : 3 = 5 \quad (\text{bölen } 3)$$

$$5 : 5 = 1 \quad (\text{bölen } 5)$$

Çizginin sağındaki asallar: 2, 3, 3, 5 →

$$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

4 Formülle say ve karşılaştır

2'nin üssü 1, 3'ün üssü 2, 5'in üssü 1:

$$(1 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (1 + 1) = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$$

İkinci adımda elle bulduğumuz liste de **12** sayı içeriyordu ✓ İki yöntem uyuşuyor.

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 1 Gökkuşuğı yöntemiyle çarpanları bulma ve formülle doğrulama

(devam)

Sonuç: 90'ın çarpanları 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90'dır; $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ ve çarpan sayısı $(1+1) \cdot (2+1) \cdot (1+1) = 12$ 'dir.

Dikkat: Çarpan çiftlerini ararken denemeyi nerede bırakacağını kestiremiyorsan, çiftin iki üyesi birbirine yaklaştığında (90 için 9 ve 10) iş bitmiştir.

ÇÖZÜMLÜ SORU 2 Alanı verilen dikdörtgende kenar ve çevre sınırları

Bir mobilyacı, alanı 84 cm^2 olan dikdörtgen biçiminde bir cam levha kesecektir. Levhanın santimetre cinsinden kenar uzunlukları **1'den farklı** birer tam sayıdır.

- a) Levhanın uzun kenarı **en az** kaç santimetre olabilir?
b) Levhanın çevresi **en fazla** kaç santimetre olabilir?

1 84'ün çarpan çiftlerini yaz

$$84 = 1 \cdot 84 = 2 \cdot 42 = 3 \cdot 28 = 4 \cdot 21 = 6 \cdot 14 = 7 \cdot 12$$

Soruda kenarların **1'den farklı** olduğu söylendiği için **1 · 84** çifti elenir. Kullanılabilecek çiftler:

$$2 \cdot 42, 3 \cdot 28, 4 \cdot 21, 6 \cdot 14, 7 \cdot 12$$

2 a) Uzun kenarın en küçük değerini seç

Her çiftte büyük olan sayı uzun kenardır: 42, 28, 21, 14, 12.

Bunların en küçüğü **12**'dir. Bu, kenarların **birbirine en yakın** olduğu çifttir (7 ve 12).

Uzun kenar 12'den küçük olamaz: olsaydı kısa kenar $84 : 12 = 7$ 'den büyük olurdu, o zaman "kısa kenar" büyük kenarı geçerd.

3 b) Çevreyi en büyük yapan çifti seç

Çevre = $2 \cdot (\text{kısa kenar} + \text{uzun kenar})$. Toplam, çarpanlar **birbirinden en uzak** olduğunda en büyüktür.

Kalan çiftler arasında en uzak olanı **2 ve 42**'dir:

$$2 + 42 = 44 \rightarrow \text{Çevre} = 2 \cdot 44 = \mathbf{88 \text{ cm}}$$

Kontrol: $3 + 28 = 31 \rightarrow 62 \text{ cm}$; $4 + 21 = 25 \rightarrow 50 \text{ cm}$; $6 + 14 = 20 \rightarrow 40 \text{ cm}$; $7 + 12 = 19 \rightarrow 38 \text{ cm}$. En büyüğü gerçekten 88 cm ✓

4 Koşulu unutursan ne olurdu?

"1'den farklı" koşulu olmasaydı $1 \cdot 84$ çifti kullanılabilir, çevre $2 \cdot 85 = 170 \text{ cm}$ çıkardı. Sorudaki tek bir kelime sonucu **ikiye katlıyor**; bu yüzden koşul cümlesini mutlaka işaret.

Sonuç: a) Uzun kenar en az 12 cm'dir (7 · 12). b) Çevre en fazla 88 cm'dir (2 · 42).

Dikkat: Alan sabitken kenarlar birbirine yaklaştıkça çevre küçülür, uzaklaştıkça büyür.

ÇÖZÜMLÜ SORU 3 Çarpanların toplamı için en az ve en fazla değer

a ve b birer pozitif tam sayı olmak üzere $a \cdot b = 96$ 'dır.

a) $a + b$ toplamı **en az** kaçtır?

b) $a + b$ toplamı **en fazla** kaçtır?

c) $a + b$ toplamı **tek sayı** olacak biçimde a ve b seçilebilir mi? Gerekçelendiriniz.

1 96'yı çarpan çiftlerine ayır

$$96 = 1 \cdot 96 = 2 \cdot 48 = 3 \cdot 32 = 4 \cdot 24 = 6 \cdot 16 = 8 \cdot 12$$

Toplamları sırasıyla: 97, 50, 35, 28, 22, 20

2 a) En küçük toplamı bul

Toplam, çarpanlar **birbirine en yakın** olduğunda en küçüktür. En yakın çift **8 ve 12**'dir:

$$a + b \text{ en az} = 8 + 12 = 20$$

3 b) En büyük toplamı bul

Toplam, çarpanlar **birbirinden en uzak** olduğunda en büyüktür. Bu çift her zaman **1 ve sayının kendisidir**:

$$a + b \text{ en fazla} = 1 + 96 = 97$$

4 c) Toplamın tekliğini incele

Bir toplamın tek olması için sayılardan **biri tek, biri çift** olmalıdır.

$96 = 2^5 \cdot 3$ 'tür. Tek çarpanları yalnızca **1 ve 3**'tür (içinde 2 bulunmayanlar).

• $a = 1$ ise $b = 96 \rightarrow 1 + 96 = 97$ (**tek**) ✓

• $a = 3$ ise $b = 32 \rightarrow 3 + 32 = 35$ (**tek**) ✓

Demek ki **seçilebilir**; 97 ve 35 bu koşulu sağlar.

Sonuç: a) En az 20 ($8 \cdot 12$). b) En fazla 97 ($1 \cdot 96$). c) Evet; $1 + 96 = 97$ ve $3 + 32 = 35$ tektir.

Dikkat: "En az toplam" ile "en az çarpan" aynı şey değildir. Toplamı küçülten, çarpanların birbirine yakınlığıdır.

ÇÖZÜMLÜ SORU 4 Çarpan sayısı formülünden bilinmeyeni bulma

$A = 2^3 \cdot 3^x \cdot 5$ biçiminde yazılan A sayısının **32 tane** pozitif tam sayı çarpanı vardır.

a) x kaçtır?

b) A sayısı kaçtır?

c) A'nın **farklı** asal çarpanlarının toplamı kaçtır?

d) A bir tam kare midir?

1 a) Formülü kur

Üsler sırasıyla 3, x ve 1'dir (5'in üssü yazılmamışsa 1'dir).

$$\text{Çarpan sayısı} = (3 + 1) \cdot (x + 1) \cdot (1 + 1) = 4 \cdot (x + 1) \cdot 2 = 8 \cdot (x + 1)$$

Bu sayı 32 olacak:

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 4 Çarpan sayısı formülünden bilinmeyeni bulma (devam)

$$8 \cdot (x + 1) = 32 \rightarrow x + 1 = 4 \rightarrow x = 3$$

2 b) A'yı hesapla

$$A = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 = 8 \cdot 27 \cdot 5$$

$$8 \cdot 27 = 216$$

$$216 \cdot 5 = 1080$$

3 c) Farklı asal çarpanları topla

$A = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$ yazılışında tabanlar **2, 3 ve 5**'tir; bunlar A'nın farklı asal çarpanlarıdır.

$$2 + 3 + 5 = 10$$

Dikkat: buradaki soru **farklı** asal çarpanları istiyor. Üsleriyle birlikte sayarsak $3 + 3 + 1 = 7$ asal çarpan vardır, ama **farklı** olanlar 3 tanedir.

4 d) Tam kare olup olmadığına karar ver

İki yoldan da görülebilir:

1. yol: Çarpan sayısı **32**'dir, yani **çift**. Çarpan sayısı tek olmadığı için A tam kare **değildir**.

2. yol: Bir sayının tam kare olması için asal çarpanlarına ayrılmış biçimindeki **bütün üslerin çift** olması gerekir. $A = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^1$ yazılışında üsler 3, 3 ve 1'dir; hiçbiri çift değildir.

Sonuç: a) $x = 3$ b) $A = 1080$ c) $2 + 3 + 5 = 10$ d) Hayır, tam kare değildir (çarpan sayısı çift / üsler tek).

Dikkat: Üssü yazılmayan asal çarpanın üssü 1'dir; formülde onu da $(1 + 1)$ olarak çarpmayı unutma.