

ÇÖZÜMLER

EKOK ve EBOB — En Küçük Ortak Kat ve En Büyük Ortak Bölen

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge CC BY-NC 4.0 lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabılır.

1. Bölüm Soru 1–5

1 Bir çalışma kâğıdında altı problem vardır:

- I. İki fenerden biri 8 saniyede bir, diğeri 12 saniyede bir yanıp sönüyor. En az kaç saniye sonra birlikte yanarlar?
- II. 36 kırmızı ve 48 mavi boncuk, artmadan ve her kolyede eşit sayıda olacak biçimde kolyelere dağıtılacaktır. En fazla kaç kolye yapılır?
- III. Hem 6'ya hem 8'e kalansız bölünebilen üç basamaklı en küçük doğal sayı kaçtır?
- IV. 54 ve 72 sayılarını kalansız bölen en büyük doğal sayı kaçtır?
- V. İki koşucudan biri bir turu 40 saniyede, diğeri 60 saniyede tamamlıyor. Başlangıç çizgisinde en az kaç saniye sonra tekrar buluşurlar?
- VI. 60 cm ve 84 cm uzunluğundaki iki kurdele, artmadan eşit uzunlukta parçalara kesilecektir. Bir parça en fazla kaç cm olabilir?

a) Problemleri EKOK ile çözülenler ve EBOB ile çözülenler biçiminde iki gruba ayırınız.

b) Her problemde kararınızı verdiren anahtar ifadeyi yazınız.

c) III. problemi çözünüz.

- a) EKOK ile çözülenler: I, III, V

EBOB ile çözülenler: II, IV, VI

- b) Anahtar ifadeler:

- I — "birlikte yanarlar", "en az kaç saniye" → olaylar tekrar edip **buluşuyor** → EKOK
- II — "artmadan", "eşit sayıda", "en fazla" → bir bütün **eşit parçalara ayrılıyor** → EBOB
- III — "hem 6'ya hem 8'e kalansız bölünen", "en küçük" → **ortak kat** aranıyor → EKOK
- IV — "kalansız bölen", "en büyük" → **ortak bölen** aranıyor → EBOB
- V — "tekrar buluşurlar", "en az" → EKOK
- VI — "artmadan eşit parçalara", "en fazla" → EBOB

Genel ölçü: "en az" + "birlikte/tekrar" → EKOK | "en fazla" + "artmadan paylaşılma" → EBOB

- c) Sayı hem 6'ya hem 8'e bölünmeli → **ortak kat** olmalı.

$$6 = 2 \cdot 3 \text{ ve } 8 = 2^3$$

$$\text{EKOK}(6, 8) = 2^3 \cdot 3 = 24$$

devamı →

1 (çözümün devamı)

Aranan sayı 24'ün katı ve **üç basamaklı en küçük** olmalı:

$$24 \cdot 4 = 96 \text{ (iki basamaklı } \times \text{)}$$

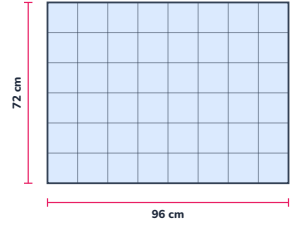
$$24 \cdot 5 = \mathbf{120} \text{ (üç basamaklı } \checkmark \text{)}$$

$$\text{Kontrol: } 120 : 6 = 20 \checkmark \quad 120 : 8 = 15 \checkmark$$

✓ **Doğru Sonuç: a) EKOK: I, III, V — EBOB: II, IV, VI b) "birlikte/tekrar + en az" → EKOK; "artmadan + en fazla" → EBOB c) 120**

- 2** Kenar uzunlukları **96 cm** ve **72 cm** olan dikdörtgen biçimindeki bir odanın zemini, **kare biçiminde özdeş fayanslarla**, fayanslar kırılmadan ve üst üste gelmeden kaplanacaktır. Fayansın santimetre cinsinden kenar uzunluğu bir tam sayıdır.

Şekilde ustanın **ilk denediği** döşeme gösterilmiştir.



- a) Şekildeki döşemede bir fayansın kenar uzunluğu kaç santimetredir ve kaç fayans kullanılmıştır?**
b) Fayansın kenar uzunluğu en fazla kaç santimetre olabilir?
c) (b) şıkkındaki fayansla kaplanırsa kaç fayans kullanılır? Bu sayı ilk düzenin kaçta kaçıdır?

- a) Şekilde uzun kenar boyunca 8, kısa kenar boyunca 6 fayans vardır.**

$$\text{Fayans kenarı: } 96 : 8 = \mathbf{12 \text{ cm}} \quad (\text{kontrol: } 72 : 6 = 12 \checkmark)$$

$$\text{Fayans sayısı: } 8 \cdot 6 = \mathbf{48 \text{ fayans}}$$

12 sayısı hem 96'yı hem 72'yi tam böldüğü için bu döşeme **geçerlidir**, ama en büyük seçenek olmayabilir.

- b) Fayansın kenarı hem 96'yı hem 72'yi kalansız bölmelidir ve en fazla soruluyor → EBOB.**

$$96 = 2^5 \cdot 3 \quad \text{ve} \quad 72 = 2^3 \cdot 3^2$$

Ortak asallar 2 ve 3; **küçük** kuvvetleri alınır: **2³** ve **3**

$$\text{EBOB}(96, 72) = 2^3 \cdot 3 = 8 \cdot 3 = \mathbf{24 \text{ cm}}$$

$$\text{Büüklük kontrolü: } 24 < 72 \text{ ve } 24 < 96 \checkmark$$

- c) 24 cm'lik fayansla:**

$$\text{Uzun kenar: } 96 : 24 = \mathbf{4 \text{ fayans}}$$

devamı →

2 (çözümün devamı)

Kısa kenar: $72 : 24 = 3$ fayans

Toplam: $4 \cdot 3 = 12$ fayans

İlk düzende 48 fayans kullanılıyordu:

$$12 : 48 = 1/4$$

Yani en büyük fayansla döşendiğinde fayans sayısı **dörtte bire** düşer. Bunun nedeni kenarın iki katına çıkmasıdır ($12 \rightarrow 24$); kenar iki katına çıkınca alan dört katına çıkar, gereken fayans sayısı da dörtte bire iner.

✓ **Doğru Sonuç: a) 12 cm, 48 fayans b) 24 cm (EBOB) c) 12 fayans, ilk düzenin 1/4'ü**

3 Bir kıyıdaki iki deniz fenerinden **A feneri 45 saniyede bir, B feneri 60 saniyede bir** çıkmaktadır. İki fener saat **20.00**'de aynı anda çıkmıştır.

a) İki fener kaç saniyede bir aynı anda çıkar? Dakika cinsinden de yazınız.

b) Saat 20.00 ile 21.00 arasında (20.00 hariç) kaç kez aynı anda çıkarlar?

c) Beşinci kez aynı anda çıktıklarında saat kaçtır? (20.00'deki çıkış birinci sayılacaktır.)

- **a) İki olay tekrar edip buluşuyor $\rightarrow$ EKOK.**

$$45 = 3^2 \cdot 5 \text{ ve } 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

Ortak asallar 3 ve 5, **büyük** kuvvetleri: 3^2 ve 5. Ortak olmayan 2^2 aynen alınır.

$$\text{EKOK}(45, 60) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 4 \cdot 9 \cdot 5 = 180 \text{ saniye}$$

$$180 : 60 = 3 \text{ dakika}$$

Büyüklik kontrolü: $180 > 60$ ve $180 > 45$ ✓

- **b) 20.00 ile 21.00 arası 1 saat = 3600 saniye'dir.**

Çakışmalar 180 saniyede bir olduğuna göre:

$$3600 : 180 = 20$$

20. çakış tam 21.00'de olur ve bu da aralığın içindedir. 20.00'deki çakış sayılmadığına göre **20 kez** aynı anda çıkarlar.

- **c) 20.00'deki çakış birincidir. Beşinci çakışa kadar aradan 4 tane 180 saniyelik aralık geçer:**

$$4 \cdot 180 = 720 \text{ saniye}$$

$$720 : 60 = 12 \text{ dakika}$$

devamı $\rightarrow$

3 (çözümün devamı)

$$20.00 + 12 \text{ dakika} = \mathbf{20.12}$$

Kontrol — çıkış saatleri: 20.00 (1.), 20.03 (2.), 20.06 (3.), 20.09 (4.), **20.12 (5.)** ✓

Dikkat: 5. çıkış için $5 \cdot 180$ değil $4 \cdot 180$ saniye eklenir; ilk çıkış başlangıç anındadır.

✓ **Doğru Sonuç: a) 180 saniye = 3 dakika b) 20 kez c) 20.12**

4 **Problem:** 84 kalem ve 126 silgi, artmadan ve her kutuda eşit sayıda kalem ile eşit sayıda silgi olacak biçimde özdeş kutulara konulacaktır. **En fazla kaç kutu** kullanılabilir?

İki öğrenci farklı cevap veriyor:

Ela: "EKOK(84, 126) = 252 → 252 kutu."

Mert: "EBOB(84, 126) = 42 → 42 kutu."

a) Hangi öğrenci haklıdır? Gerekçelendiriniz.

b) Yanlış cevabın neden imkânsız olduğunu bir hesapla gösteriniz.

c) Doğru cevaba göre bir kutuda kaç kalem ve kaç silgi bulunur?

- a) Mert haklıdır.**

Kutu sayısı, hem 84'ü hem 126'yı **kalansız bölmelidir**; çünkü hiçbir kalem ya da silgi artmayacaktır. Yani kutu sayısı bir **ortak bölen** ve "en fazla" istendiğine göre **ortak bölenlerin en büyüğü**, yani **EBOB** aranmaktadır.

$$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \text{ ve } 126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$$

Ortak asalların küçük kuvvetleri: 2, 3 ve 7

$$\text{EBOB}(84, 126) = 2 \cdot 3 \cdot 7 = \mathbf{42 \text{ kutu}}$$

- b) Ela'nın bulduğu 252 sayısı, 84 ve 126'nın ortak katıdır; ikisinden de büyüktür.**

Kalemler 252 kutuya dağıtılsaydı bir kutuya düşen kalem sayısı:

$$84 : 252 = \mathbf{1/3 \text{ kalem}}$$

Bir kutuya üçte bir kalem koymak **mümkün değildir**. Zaten $252 > 84$ olduğu için kutu sayısı kalem sayısını geçmiş olurdu; bazı kutular boş kalırdı ve "her kutuda eşit sayıda" koşulu bozulurdu.

Genel kontrol: EBOB sayılardan büyük olamaz. $252 > 126$ olduğu için bu değer bir EBOB olamaz — hesabı yapmadan da anlaşılır.

- c) Bir kutuya düşen miktarlar:**

$$\text{Kalem: } 84 : 42 = \mathbf{2 \text{ kalem}}$$

devamı →

4 (çözümün devamı)

Silgi: $126 : 42 = 3$ silgi

Kontrol: $42 \cdot 2 = 84 \checkmark$ $42 \cdot 3 = 126 \checkmark$ Hiçbir şey artmadı.

✓ **Doğru Sonuç: a) Mert haklı; ortak bölen aranıyor b) $84 : 252 = 1/3$ kalem, imkânsız (EBOB sayılardan büyük olamaz) c) 2 kalem, 3 silgi**

5 Bir öğrenci EBOB(60, 90) değerini bulmak için ortak asal çarpan algoritmasını şöyle kurmuştur:

```

60 90 | 2
30 45 | 3
10 15 | 5
 2  3 | 2
 1  3 | 3
 1  1

```

Ardından " $EBOB(60, 90) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 = 180$ 'dir" demiştir.

a) Öğrencinin algoritması doğru kurulmuş mudur? Kontrol ediniz.

b) Hatası nedir? Açıklayınız.

c) Doğru EBOB değerini bulunuz.

d) Öğrencinin bulduğu 180 sayısı aslında neyin değeridir? $A \cdot B = EBOB \cdot EKOK$ bağıntısıyla doğrulayınız.

- a) Bölme işlemleri tek tek kontrol edilir:

$$60 : 2 = 30 \checkmark \quad 90 : 2 = 45 \checkmark$$

$$30 : 3 = 10 \checkmark \quad 45 : 3 = 15 \checkmark$$

$$10 : 5 = 2 \checkmark \quad 15 : 5 = 3 \checkmark$$

$$2 : 2 = 1 \checkmark \quad 3 \text{ bölünmez, aynen iner } \checkmark$$

$$3 : 3 = 1 \checkmark$$

Algoritma doğru kurulmuştur; aritmetikte hata yoktur.

- b) Hata, **hangi bölenlerin toplanacağındadır.**

EBOB'a yalnızca **her iki sayıyı da bölen** (ortak) çarpanlar girer. Algoritmada:

- 2 → ikisi de bölündü → **ORTAK** ✓
- 3 → ikisi de bölündü → **ORTAK** ✓
- 5 → ikisi de bölündü → **ORTAK** ✓

devamı →

5 (çözümün devamı)

- 2 (dördüncü satır) → yalnızca 2 bölündü, 3 aynen indi → **ortak değil** ×
- 3 (beşinci satır) → yalnızca 3 bölündü → **ortak değil** ×

Öğrenci son iki satırdaki **ortak olmayan** bölenleri de çarpıma katmıştır. Sağdaki **bütün** sayıların çarpımı EBOB'u değil **EKOK'u** verir.

- **c)** Yalnızca ortak bölenler çarpılır:

$$\text{EBOB}(60, 90) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

Büüklük kontrolü: $30 < 60$ ve $30 < 90$ ✓

Bölme kontrolü: $60 : 30 = 2$ ✓ $90 : 30 = 3$ ✓

Öğrencinin bulduğu 180 ise 90'dan da büyüktür; bir EBOB bu kadar büyük **olamaz**. Bu tek başına hatanın işaretiydi.

- **d)** 180 sayısı **EKOK(60, 90)**'dir.

Gerçekten: $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ ve $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \rightarrow \text{EKOK} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$ ✓

Altın bağıntıyla doğrulayalım:

$$A \cdot B = 60 \cdot 90 = 5400$$

$$\text{EBOB} \cdot \text{EKOK} = 30 \cdot 180 = 5400 \quad \checkmark$$

Yani öğrenci algoritmayı doğru kurmuş ama **yanlış değeri okumuştur**. Bir alitritmadan ikisi de okunur: ortak bölenlerin çarpımı EBOB, hepsinin çarpımı EKOK.

✓ **Doğru Sonuç: a) Algoritma doğru b) Ortak olmayan bölenleri de çarpmış c) EBOB = 30 d) 180 = EKOK; $60 \cdot 90 = 30 \cdot 180 = 5400$ ✓**

2. Bölüm Soru 6–10

- 6** Bir terziye **105 metre** ve **147 metre** uzunluğunda iki top kumaş vardır. Kumaşlar **artmadan** ve her parça **eşit uzunlukta** olacak biçimde kesilecektir. Terzi, parçaların **olabildiğince uzun** olmasını istemektedir.

a) Bir parça en fazla kaç metre olabilir?

b) Toplam kaç parça elde edilir?

c) Her kesim işlemi 1 dakika sürdüğüne göre kesim işi toplam kaç dakika sürer? (Dikkat: topun sonunda kesim yapılmaz.)

- a) Parça uzunluğu hem 105'i hem 147'yi **kalansız bölmelidir** ve **en uzun** isteniyor → **EBOB**.

$$105 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \text{ ve } 147 = 3 \cdot 7^2$$

Ortak asallar 3 ve 7, küçük kuvvetleri: 3 ve 7

(5 ortak değil → alınmaz)

$$\text{EBOB}(105, 147) = 3 \cdot 7 = \mathbf{21 \text{ metre}}$$

Büyüklik kontrolü: $21 < 105$ ve $21 < 147$ ✓

- b) Her top ayrı ayrı kesilir:

$$\text{Birinci top: } 105 : 21 = \mathbf{5 \text{ parça}}$$

$$\text{İkinci top: } 147 : 21 = \mathbf{7 \text{ parça}}$$

$$\text{Toplam: } 5 + 7 = \mathbf{12 \text{ parça}}$$

$$\text{Kontrol: } 5 \cdot 21 = 105 \text{ ✓ } 7 \cdot 21 = 147 \text{ ✓ Hiç kumaş artmadı.}$$

- c) Bir topu **n parçaya** bölmek için **n – 1** kesim gerekir; son parçanın ucu topun kendi sonudur, orada kesim yapılmaz.

$$\text{Birinci top: } 5 \text{ parça} \rightarrow \mathbf{4 \text{ kesim}}$$

$$\text{İkinci top: } 7 \text{ parça} \rightarrow \mathbf{6 \text{ kesim}}$$

$$\text{Toplam kesim: } 4 + 6 = \mathbf{10 \text{ kesim} \rightarrow 10 \text{ dakika}}$$

Dikkat: parça sayısı 12 olduğu için "12 dakika" demek yanlış olur. Parça sayısı ile kesim sayısı **aynı değildir**; her topta bir kesim daha az yapılır.

✓ **Doğru Sonuç: a) 21 metre b) 12 parça (5 + 7) c) 10 kesim → 10 dakika**

7 Aşağıdaki tabloda dört sayı çifti için bazı değerler verilmiş, bazıları boş bırakılmıştır:

Çift	A	B	EBOB	EKOK	A · B
1	16	24	8	48	384
2	18	?	6	90	?
3	?	35	7	140	?
4	21	22	?	?	462

- a) Tablodaki boş bırakılan değerleri bulunuz. Hangi bağıntıyı kullandığınızı yazınız.
b) Hangi çiftte sayılar ardışıktır? Bunu EBOB ve EKOK değerlerinden nasıl anladınız?
c) Tablodaki bütün satırlarda "EBOB sayılardan küçük ya da eşit, EKOK sayılardan büyük ya da eşit" kuralının sağlandığını kontrol ediniz.

- a) Kullanılan bağıntı: $A \cdot B = \text{EBOB} \cdot \text{EKOK}$

Çift 2: $A \cdot B = 6 \cdot 90 = 540$

$B = 540 : 18 = 30$

Kontrol: $18 = 2 \cdot 3^2$, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \rightarrow \text{EBOB} = 2 \cdot 3 = 6 \checkmark$ $\text{EKOK} = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90 \checkmark$

Çift 3: $A \cdot B = 7 \cdot 140 = 980$

$A = 980 : 35 = 28$

Kontrol: $28 = 2^2 \cdot 7$, $35 = 5 \cdot 7 \rightarrow \text{EBOB} = 7 \checkmark$ $\text{EKOK} = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 = 140 \checkmark$

Çift 4: 21 ve 22 **ardışık** iki doğal sayıdır $\rightarrow \text{EBOB} = 1$

$\text{EKOK} = (A \cdot B) : \text{EBOB} = 462 : 1 = 462$

Kontrol: $21 \cdot 22 = 462 \checkmark$

- b) Ardışık olan **4. çifttir** (21 ve 22).

Bunu iki işareten anlarız:

- **EBOB = 1** $\rightarrow$ sayıların 1'den başka ortak böleni yok.

- **EKOK = A · B** $\rightarrow$ EKOK sayıların çarpımına eşit. Bu yalnızca EBOB = 1 olduğunda gerçekleşir; çünkü $\text{EKOK} = (A \cdot B) : \text{EBOB}$ 'tur.

Not: EBOB = 1 olması sayıların ardışık olmasını **gerektirmez** (örneğin 4 ve 9); ama ardışık iki sayının EBOB'u **her zaman 1**'dir.

devamı $\rightarrow$

7 (çözümün devamı)

- **c) Satır satır kontrol:**
 - **Çift 1:** EBOB $8 \leq 16 \checkmark$ ve $8 \leq 24 \checkmark$ | EKOK $48 \geq 24 \checkmark$
 - **Çift 2:** EBOB $6 \leq 18 \checkmark$ ve $6 \leq 30 \checkmark$ | EKOK $90 \geq 30 \checkmark$
 - **Çift 3:** EBOB $7 \leq 28 \checkmark$ ve $7 \leq 35 \checkmark$ | EKOK $140 \geq 35 \checkmark$
 - **Çift 4:** EBOB $1 \leq 21 \checkmark$ | EKOK $462 \geq 22 \checkmark$

Dört satırda da kural sağlanıyor. Bu kural, bir sonucun doğruluğunu **hesap yapmadan** eleyebilmek için en hızlı kontroldür.

✓ **Doğru Sonuç: a) Çift 2: B = 30, A·B = 540 — Çift 3: A = 28, A·B = 980 — Çift 4: EBOB = 1, EKOK = 462 b) 4. çift (EBOB = 1 ve EKOK = A·B) c) Dört satırda da sağlanıyor**

8 **Problem:** Bir kutudaki bilyeler 6'şarlı veya 9'arlı sayıldığında her defasında **4 bilye artmaktadır**. Kutuda **en az kaç bilye** vardır?

Bir öğrenci şöyle çözmüştür:

"EKOK(6, 9) = 18'dir. Bilyeler arttığına göre 18'den 4 çıkarılır:
 $18 - 4 = 14$ bilye."

a) Öğrencinin hatası nedir?

b) Doğru sonucu bulunuz.

c) Öğrencinin bulduğu 14 sayısının koşulu sağlamadığını bölme yaparak gösteriniz.

d) Hangi problem tipinde sayılardan çıkarma yapılır? Bir örnekle açıklayınız.

- **a) Öğrenci EKOK'u doğru bulmuş** ($\text{EKOK}(6, 9) = 18 \checkmark$) ama fazlalığı **çıkarmıştır**.

"Her defasında 4 artıyor" ifadesi şu demektir: bilye sayısı, 6 ve 9'un ortak katından **4 fazladır**. Yani ortak kata **4 eklenir**:

$$\text{bilye sayısı} = (\text{ortak kat}) + 4$$

- **b) EKOK(6, 9):** $6 = 2 \cdot 3$ ve $9 = 3^2 \rightarrow \text{EKOK} = 2 \cdot 3^2 = 18$

$$\text{En az bilye sayısı} = 18 + 4 = 22$$

$$\text{Kontrol: } 22 : 6 = 3, \text{ kalan } 4 \checkmark \quad 22 : 9 = 2, \text{ kalan } 4 \checkmark$$

Her iki sayımda da tam 4 bilye artıyor ✓

- **c) Öğrencinin bulduğu 14 sayısını deneyelim:**

$$14 : 6 = 2, \text{ kalan } 2 \times (4 \text{ olmalıydı})$$

devamı →

8 (çözümün devamı)

$$14 : 9 = 1, \text{ kalan } 5 \times (4 \text{ olmalıydı})$$

İki sayımda da farklı kalanlar çıkıyor; oysa problem her ikisinde de 4 artması gerektiğini söylüyor. Demek ki 14 **koşulu sağlamıyor**.

- **d) Çıkarma, "böldüğünde k kalanını veren en büyük sayı" tipinde yapılır. Orada aranan şey bir bölendir, kat değil.**

Örnek: "58 ve 82'yi böldüğünde 4 kalanını veren en büyük doğal sayı kaçtır?"

$$\text{Kalan atılır: } 58 - 4 = 54 \text{ ve } 82 - 4 = 78$$

$$54 = 2 \cdot 3^3 \text{ ve } 78 = 2 \cdot 3 \cdot 13 \rightarrow \text{EBOB}(54, 78) = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\text{Kontrol: } 58 : 6 = 9 \text{ kalan } 4 \checkmark \quad 82 : 6 = 13 \text{ kalan } 4 \checkmark \text{ ve } 6 > 4 \checkmark$$

Ayrım: "artıyor" → EKOK'a **ekle** | "kalanını veren bölen" → sayılardan **çıkart**, sonra EBOB.

✓ **Doğru Sonuç: a) Fazlalığı çıkarmış, eklemeliydi b) $18 + 4 = 22$ c) $14 : 6$ kalan 2, $14 : 9$ kalan 5 × d) "k kalanını veren en büyük bölen" tipinde çıkarılır**

- 9** Bir spor salonuna **Ali 4 günde bir, Berk 6 günde bir, Can 10 günde bir** antrenmana gelmektedir. Üçü de bugün salondadır.

- Ali ile Berk kaç günde bir birlikte antrenman yapar?
- Berk ile Can kaç günde bir birlikte antrenman yapar?
- Üçü birlikte kaç günde bir antrenman yapar?
- Bugünden itibaren 365 gün içinde (bugün hariç) üçü kaç kez birlikte antrenman yapar?

- **a) Tekrar edip buluşma → EKOK.**

$$4 = 2^2 \text{ ve } 6 = 2 \cdot 3$$

$$\text{EKOK}(4, 6) = 2^2 \cdot 3 = 12 \text{ gün}$$

- **b) $6 = 2 \cdot 3$ ve $10 = 2 \cdot 5$**

$$\text{EKOK}(6, 10) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 \text{ gün}$$

- **c) Üç sayı için de aynı kural işler: her asalın en büyük kuvveti alınır.**

$$4 = 2^2 \mid 6 = 2 \cdot 3 \mid 10 = 2 \cdot 5$$

2'nin en büyük kuvveti: **2^2** (4'ten)

3'ün en büyük kuvveti: **3** (6'dan)

5'in en büyük kuvveti: **5** (10'dan)

devamı →

9 (çözümün devamı)

$$\text{EKOK}(4, 6, 10) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 4 \cdot 15 = \mathbf{60 \text{ gün}}$$

$$\text{Kontrol: } 60 : 4 = 15 \checkmark \quad 60 : 6 = 10 \checkmark \quad 60 : 10 = 6 \checkmark$$

Ayrıca 60, (a) ve (b) şıklarındaki 12 ve 30'un da katıdır ✓

- **d)** Üçü 60 günde bir buluşur. 365 gün içinde:

$$365 : 60 = \mathbf{6 \text{ tam, kalan } 5}$$

Buluşmalar 60, 120, 180, 240, 300 ve 360. günlerde olur → **6 kez**

(420. gün 365'i aştığı için sayılmaz.)

Kalan 5 gün, son buluşmadan sonra geçen ve yeni bir buluşmaya yetmeyen süredir.

✓ **Doğru Sonuç: a) 12 gün b) 30 gün c) 60 gün d) 6 kez**

10 Aşağıda sekiz sayı çifti verilmiştir:

I. (14, 42) **II.** (19, 20) **III.** ($2^3 \cdot 5$, $2 \cdot 5^2$) **IV.** (36, 48)

V. (100, 300) **VI.** (2024, 2025) **VII.** ($3^2 \cdot 7$, $3 \cdot 7^2$) **VIII.** (45, 60)

a) Çiftleri "biri diğerinin katı", "ardışık", "üslü biçimde verilmiş" ve "genel algoritma gerekir" olmak üzere dört gruba ayırınız.

b) Her gruptan birer çift seçip EKOK ve EBOB değerlerini bulunuz.

c) Dördüncü gruptaki çiftler neden kısa yol kabul etmiyor? Açıklayınız.

- **a) Biri diğerinin katı:** I ($42 = 14 \cdot 3$) · V ($300 = 100 \cdot 3$)

Ardışık: II (19, 20) · VI (2024, 2025)

Üslü biçimde verilmiş: III · VII

Genel algoritma gerekir: IV (36, 48) · VIII (45, 60)

- **b)** Her gruptan bir örnek:

I. (14, 42) — kat:

$$\text{EKOK} = \text{büyük olan} = \mathbf{42} \quad | \quad \text{EBOB} = \text{küçük olan} = \mathbf{14}$$

II. (19, 20) — ardışık:

$$\text{EKOK} = 19 \cdot 20 = \mathbf{380} \quad | \quad \text{EBOB} = \mathbf{1}$$

III. ($2^3 \cdot 5$, $2 \cdot 5^2$) — üslü:

Ortak asallar 2 ve 5.

devamı →

10 (çözümün devamı)

EKOK → büyük kuvvetler: $2^3 \cdot 5^2 = 8 \cdot 25 = 200$

EBOB → küçük kuvvetler: $2 \cdot 5 = 10$

Kontrol: $40 \cdot 50 = 2000$ ve $10 \cdot 200 = 2000$ ✓

IV. (36, 48) — genel:

$36 = 2^2 \cdot 3^2$ ve $48 = 2^4 \cdot 3$

EKOK = $2^4 \cdot 3^2 = 144$ | EBOB = $2^2 \cdot 3 = 12$

Kontrol: $36 \cdot 48 = 1728$ ve $12 \cdot 144 = 1728$ ✓

• **c) IV ve VIII'de:**

- Sayılardan hiçbirisi diğerinin **katı değildir** ($48 : 36$ tam bölünmüyor, $60 : 45$ tam bölünmüyor).
- Sayılar **ardışık değildir** (aralarında 12 ve 15 fark var).
- Sayılar **asal çarpanlarına ayrılmış olarak verilmemiştir**.

Yani kısa yolların üç koşulundan hiçbirisi sağlanmıyor. Bu durumda ya ortak asal çarpan algoritması kurulur ya da **önce iki sayı asal çarpanlarına ayrılır** — ayırdıktan sonra zaten "üslü biçim" kuralı kullanılabilir hâle gelir.

Yani dördüncü grup aslında **fazladan bir adım** gerektiren gruptur; yeni bir kural değildir.

✓ **Doğru Sonuç: a) Kat: I, V — Ardışık: II, VI — Üslü: III, VII — Genel: IV, VIII b) 42/14, 380/1, 200/10, 144/12 c) Üç kısa yol koşulu da sağlanmıyor; önce asal çarpanlara ayrılmalı**

3. Bölüm Soru 11–15**11** A ve B birer doğal sayı olmak üzere üç iddia ortaya atılmıştır:

- I. " $A \cdot B = \text{EBOB}(A, B) \cdot \text{EKOK}(A, B)$ eşitliği **her** doğal sayı çifti için geçerlidir."
- II. " $\text{EBOB}(A, B) = 1$ ise $\text{EKOK}(A, B) = A \cdot B$ 'dir."
- III. " $\text{EKOK}(A, B) = A \cdot B$ ise A ve B **ardışık** iki doğal sayıdır."

a) I. iddiayı bir örnekle doğrulayınız.

b) II. iddia doğru mudur? Altın bağıntıyı kullanarak gösteriniz.

c) III. iddia doğru mudur? Doğru değilse karşıt örnek veriniz ve iddiayı düzeltiniz.

- a) I. iddia **DOĞRUDUR**.

Örnek: $A = 12, B = 30$

devamı →

11 (çözümün devamı)

$$12 = 2^2 \cdot 3 \text{ ve } 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\text{EBOB} = 2 \cdot 3 = 6 \mid \text{EKOK} = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

$$A \cdot B = 12 \cdot 30 = 360$$

$$\text{EBOB} \cdot \text{EKOK} = 6 \cdot 60 = 360 \checkmark$$

Neden her zaman doğru: Üslü biçimde bakalım. Her asal için EBOB **küçük** kuvveti, EKOK **büyük** kuvveti alır. Çarpıldıklarında o asalin üssü "küçük + büyük" olur — bu da A ve B'deki üslerin toplamının ta kendisidir. Yani her asal için iki tarafta aynı üs çıkar.

- b) II. iddia DOĞRUDUR.**

Altın bağıntıda EBOB yerine 1 yazalım:

$$A \cdot B = \text{EBOB} \cdot \text{EKOK} = 1 \cdot \text{EKOK} = \text{EKOK}$$

Yani **EKOK(A, B) = A · B** olur ✓

Örnek: $A = 8, B = 9 \rightarrow \text{EBOB}(8, 9) = 1$ ($8 = 2^3, 9 = 3^2$, ortak asal yok)

$$\text{EKOK}(8, 9) = 2^3 \cdot 3^2 = 72 = 8 \cdot 9 \checkmark$$

Sezgisel açıklama: ortak asal çarpan yoksa EKOK'un ikisini birden içerebilmek için **bütün** çarpanları alması gerekir; bu da çarpımın kendisidir.

- c) III. iddia YANLIŞTIR.**

Karşıt örnek: $A = 4, B = 9$

$$4 = 2^2 \text{ ve } 9 = 3^2 \rightarrow \text{ortak asal çarpanları yok} \rightarrow \text{EBOB} = 1$$

$$\text{EKOK}(4, 9) = 2^2 \cdot 3^2 = 36 = 4 \cdot 9 \checkmark$$

Ama 4 ile 9 **ardışık değildir** (aralarında 5 fark var).

Başka karşıt örnekler: (8, 9) ardışık ama (9, 16), (4, 25), (15, 28) değil — hepsinde $\text{EKOK} = A \cdot B$.

Düzeltilmiş iddia: " $\text{EKOK}(A, B) = A \cdot B$ ise A ve B **aralarında asaldır**, yani $\text{EBOB}(A, B) = 1$ 'dir."

İlişki tek yönlüdür: **ardışık olmak** $\text{EBOB} = 1$ olmasını gerektirir, ama $\text{EBOB} = 1$ olmak **ardışık olmayı gerektirmez**.

✓ Doğru Sonuç: a) $12 \cdot 30 = 6 \cdot 60 = 360$ ✓ b) Doğru; $\text{EBOB} = 1 \rightarrow A \cdot B = \text{EKOK}$ c) Yanlış; karşıt örnek (4, 9). Doğrusu: "aralarında asaldır"

12 $A = 2^4 \cdot 3^a \cdot 5$ ve $B = 2^b \cdot 3^2 \cdot 7$ sayıları için

$$\text{EBOB}(A, B) = 2^2 \cdot 3^2 \text{ ve } \text{EKOK}(A, B) = 2^4 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7$$

olduğu bilinmektedir. (a ve b birer pozitif tam sayıdır.)

a) b değerini bulunuz.

b) a değerini bulunuz.

c) A ve B sayılarını hesaplayınız.

d) A : EBOB ve B : EBOB bölümlerinin EBOB'u 1 midir? Gösteriniz.

- a) Kuralı hatırlayalım: EBOB her asal için **küçük** kuvveti, EKOK **büyük** kuvveti alır.

2 için: A'da üs 4, B'de üs b.

EBOB'da 2'nin üssü **2** verilmiş → küçük olan 2 olmalı.

4 ve b'den küçüğü 2 ise → **b = 2**

Kontrol: EKOK'ta 2'nin üssü büyük olan, yani 4 olmalı. Verilen EKOK'ta gerçekten **2⁴** var ✓

- b) **3 için:** A'da üs a, B'de üs 2.

EKOK'ta 3'ün üssü **5** verilmiş → büyük olan 5 olmalı.

a ve 2'den büyüğü 5 ise → **a = 5**

Kontrol: EBOB'da 3'ün üssü küçük olan, yani $\min(5, 2) = 2$ olmalı. Verilen EBOB'da gerçekten **3²** var ✓

Ayrıca 5 yalnız A'da, 7 yalnız B'de olduğu için ikisi de EKOK'ta var, EBOB'da yok ✓
Verilenlerle tutarlı.

- c) **A = 2⁴ · 3⁵ · 5 = 16 · 243 · 5**

$$16 \cdot 243 = 3888 \quad | \quad 3888 \cdot 5 = \mathbf{19\,440}$$

$$\mathbf{B = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 4 \cdot 9 \cdot 7 = 252}$$

Altın bağıntıyla doğrulayalım (üsler üzerinden, çarpmadan):

$$A \cdot B = 2^{4+2} \cdot 3^{5+2} \cdot 5 \cdot 7 = \mathbf{2^6 \cdot 3^7 \cdot 5 \cdot 7}$$

$$\text{EBOB} \cdot \text{EKOK} = (2^2 \cdot 3^2) \cdot (2^4 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7) = \mathbf{2^6 \cdot 3^7 \cdot 5 \cdot 7} \quad \checkmark \text{ Aynı.}$$

- d) **EBOB = 2² · 3² = 4 · 9 = 36**

$$A : \text{EBOB} = 19\,440 : 36 = \mathbf{540}$$

$$\text{Üslü olarak: } (2^4 \cdot 3^5 \cdot 5) : (2^2 \cdot 3^2) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \rightarrow 4 \cdot 27 \cdot 5 = 540 \quad \checkmark$$

$$B : \text{EBOB} = 252 : 36 = \mathbf{7}$$

devamı →

12 (çözümün devamı)

Üslü olarak: $(2^2 \cdot 3^2 \cdot 7) : (2^2 \cdot 3^2) = 7 \checkmark$

Şimdi EBOB(540, 7)'ye bakalım:

$540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$ ve 7 asaldır ve 540'ın çarpanları arasında **yoktur**.

Ortak asal çarpan bulunmadığından **EBOB(540, 7) = 1** ✓

Bu her zaman böyledir: iki sayı kendi EBOB'larına bölündüğünde geriye **aralarında asal** sayılar kalır.

✓ **Doğru Sonuç: a) b = 2 b) a = 5 c) A = 19 440, B = 252 d) 540 ve 7 → EBOB = 1** ✓

- 13** Dikdörtgen biçimindeki bir parkın kenar uzunlukları **84 metre** ve **126 metre**'dir. Parkın çevresine, **eşit aralıklarla** ve **her köşeye birer tane gelecek** biçimde lamba dikilecektir. Belediye, **en az sayıda** lamba kullanmak istemektedir.

- a) Lambalar arasındaki aralık en fazla kaç metre olabilir? Gerekçelendiriniz.
 b) Toplam kaç lamba dikilir?
 c) Parkın içi de aynı aralıkla eş kare bölgelere ayrılıysaydı kaç kare oluşurdu?
 d) Belediye aralığı 21 metre seçseydi kaç lamba gerekirdi? Neden 42 metre tercih edildi?

- a) Köşelere lamba denk gelmesi için aralık, **her iki kenarı da tam bölmelidir**. Lamba sayısının **en az** olması için aralık **en büyük** seçilir → **EBOB**.

$$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \text{ ve } 126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$$

Ortak asalların küçük kuvvetleri: 2, 3 ve 7

$$\text{EBOB}(84, 126) = 2 \cdot 3 \cdot 7 = \mathbf{42 \text{ metre}}$$

Kontrol: $84 : 42 = 2 \checkmark$ $126 : 42 = 3 \checkmark$ İki kenar da tam bölünüyor.

- b) Çevre = $2 \cdot (84 + 126) = 2 \cdot 210 = \mathbf{420 \text{ metre}}$

Çevre **kapalı** bir yol olduğu için aralık sayısı ile lamba sayısı **eşittir** (başlangıç lambası aynı zamanda bitiş lambasıdır):

$$420 : 42 = \mathbf{10 \text{ lamba}}$$

Dağılım kontrolü: 84 metrelik kenarlarda 2'şer, 126 metrelik kenarlarda 3'er aralık →

$$2 + 3 + 2 + 3 = \mathbf{10 \checkmark}$$

- c) 42 metrelik kareler:

$$\text{Uzun kenar: } 126 : 42 = \mathbf{3 \text{ kare}}$$

$$\text{Kısa kenar: } 84 : 42 = \mathbf{2 \text{ kare}}$$

devamı →

13 (çözümün devamı)

Toplam: $3 \cdot 2 = 6$ kare

Kontrol (alanla): Park alanı $84 \cdot 126 = 10\,584 \text{ m}^2$; bir kare $42 \cdot 42 = 1764 \text{ m}^2$; $10\,584 : 1764 = 6 \checkmark$

- **d)** 21 metre de bir ortak bölendir ($84 : 21 = 4 \checkmark$, $126 : 21 = 6 \checkmark$), yani köşelere lamba denk gelir.

$420 : 21 = 20$ lamba

Aralık **yarıya** indiğinde lamba sayısı **iki katına** çıktı. Çevre sabit olduğu için:

lamba sayısı = çevre : aralık

Bölünen sabitken **bölen büyüdükçe bölüm küçülür**. Belediye en az lamba istediği için ortak bölenlerin **en büyüğünü**, yani EBOB'u seçmiştir.

Not: Aralık 42'den büyük seçilemez; örneğin 60 metre ne 84'ü ne 126'yı böler, köşelere lamba denk gelmez.

✓ **Doğru Sonuç: a) 42 m (EBOB) b) 10 lamba c) 6 kare d) 21 m için 20 lamba; en büyük aralık en az lambayı verir**

14 A ve B birer doğal sayı olmak üzere üç iddia ortaya atılmıştır:

- I. "EBOB(A, B) sayısı hem A'yı hem B'yi **her zaman** böler."
- II. "EKOK(A, B) sayısı, $A \cdot B$ çarpımından **büyük olamaz**."
- III. " $A < B$ ise EBOB(A, B) $< A$ 'dır."

a) I. iddia doğru mudur? Gerekçelendiriniz.

b) II. iddia doğru mudur? Altın bağıntıyı kullanarak gösteriniz ve eşitliğin ne zaman sağlandığını belirtiniz.

c) III. iddia doğru mudur? Doğru değilse karşıt örnek veriniz ve iddiayı düzeltiniz.

- **a) I. iddia DOĞRUDUR.**

EBOB, tanımı gereği A ve B'nin **ortak bölenlerinden** biridir — hem de en büyüğü. "Ortak bölen" olmak zaten her ikisini de bölmek demektir.

Örnek: $\text{EBOB}(36, 48) = 12 \rightarrow 36 : 12 = 3 \checkmark \quad 48 : 12 = 4 \checkmark$

Ayrıca daha güçlü bir özellik de doğrudur: A ve B'nin **bütün** ortak bölenleri, EBOB'u böler. 36 ve 48'in ortak bölenleri 1, 2, 3, 4, 6, 12'dir ve hepsi 12'yi böler ✓

- **b) II. iddia DOĞRUDUR.**

devamı →

14 (çözümün devamı)

Altın bağıntıdan EKOK'u yalnız bırakalım:

$$\text{EKOK}(A, B) = (A \cdot B) : \text{EBOB}(A, B)$$

EBOB en küçük değerinde bile **1**'dir (hiçbir zaman 0 olamaz). Bir sayıyı 1'den büyük bir sayıya bölmek onu **küçültür**:

- EBOB = 1 ise EKOK = $A \cdot B \rightarrow$ **eşitlik**
- EBOB > 1 ise EKOK < $A \cdot B \rightarrow$ **küçük**

Yani EKOK asla $A \cdot B$ 'yi geçemez.

Eşitlik durumu: EBOB(A, B) = 1 olduğunda, yani A ile B **aralarında asal** olduğunda sağlanır.

Örnek: EKOK(8, 9) = 72 = $8 \cdot 9 \checkmark$ | EKOK(12, 18) = 36 < 216 (EBOB = 6 olduğu için)

- **c) III. iddia YANLIŞTIR.**

İddia "kesinlikle küçüktür" diyor; oysa EBOB, küçük sayıya **eşit** de olabilir.

Karşıt örnek: A = 6, B = 18

6, 18'i böldüğü için EBOB(6, 18) = **6** = A

Burada EBOB < A değil, **EBOB = A**'dır.

Başka karşıt örnekler: EBOB(15, 45) = 15 | EBOB(8, 24) = 8 | EBOB(120, 720) = 120

Düzeltilmiş iddia: "A < B ise EBOB(A, B) ≤ A'dır; **eşitlik yalnızca A sayısı B'yi böldüğünde** sağlanır."

Aynı biçimde EKOK için de doğrusu şudur: EKOK(A, B) ≥ B ve eşitlik yalnızca A, B'yi böldüğünde sağlanır.

✓ **Doğru Sonuç: a) I doğru b) II doğru; EKOK = $A \cdot B : \text{EBOB} \leq A \cdot B$, eşitlik EBOB = 1 iken c) III yanlış; EBOB(6, 18) = 6 = A. Doğrusu "EBOB ≤ A"**

15 Bir "sayı atölyesi" etkinliğinde öğrencilerden, verilen koşulları sağlayan sayılar **üretmeleri** istenmektedir. **Dikkat:** Bazı maddelerde koşulu sağlayan sayı **bulunmayabilir**; öyleyse bunu gerekçesiyle yazınız.

- a) EBOB'u 12, EKOK'u 72 olan iki doğal sayı.
- b) İki de iki basamaklı, EBOB'u 5, EKOK'u 150 olan iki doğal sayı.
- c) EKOK'u sayılardan birine eşit olan üç farklı sayı çifti.
- d) İki de çift olan ve EBOB'u 1 olan iki doğal sayı.
- e) EBOB'u 8, EKOK'u 12 olan iki doğal sayı.

- a) Altın bağıntıdan: $A \cdot B = 12 \cdot 72 = 864$

Her iki sayı da 12'nin katı olmalı: $A = 12a$, $B = 12b$ (a ve b aralarında asal).

$$144 \cdot a \cdot b = 864 \rightarrow a \cdot b = 6$$

- $a = 1$, $b = 6 \rightarrow A = 12$, $B = 72$ (EBOB(12, 72) = 12 ✓, EKOK = 72 ✓)

- $a = 2$, $b = 3 \rightarrow A = 24$, $B = 36$ ($24 = 2^3 \cdot 3$, $36 = 2^2 \cdot 3^2 \rightarrow$ EBOB = $2^2 \cdot 3 = 12$ ✓, EKOK = $2^3 \cdot 3^2 = 72$ ✓)

Cevap: 24 ve 36 (12 ve 72 de olur). $a = 6$, $b = 1$ aynı çifti verir; $a \cdot b$ çarpanları aralarında asal seçilmelidir.

- b) $A \cdot B = 5 \cdot 150 = 750$

$$A = 5a, B = 5b \rightarrow 25ab = 750 \rightarrow a \cdot b = 30, a \text{ ile } b \text{ aralarında asal.}$$

30'un aralarında asal çarpan çiftleri: (1, 30), (2, 15), (3, 10), (5, 6)

- (1, 30) $\rightarrow$ 5 ve 150 $\times$ (iki basamaklı değil)
- (2, 15) $\rightarrow$ **10 ve 75** ✓ (EBOB = 5, EKOK = 150 ✓)
- (3, 10) $\rightarrow$ **15 ve 50** ✓
- (5, 6) $\rightarrow$ **25 ve 30** ✓

Cevap: 25 ve 30 (10 ve 75 ya da 15 ve 50 de olur).

Not: (6, 5) gibi çiftlerde a ile b aralarında asal olmazsa EBOB 5'ten büyük çıkar.

- c) EKOK'un sayılardan birine eşit olması, o sayının **diğerinin katı** olması demektir.

$$(3, 9) \rightarrow \text{EKOK} = 9 \checkmark \quad | \quad (5, 25) \rightarrow \text{EKOK} = 25 \checkmark \quad | \quad (7, 14) \rightarrow \text{EKOK} = 14 \checkmark$$

Bu çiftlerde EBOB da küçük sayıya eşittir: EBOB(3, 9) = 3, EBOB(5, 25) = 5, EBOB(7, 14) = 7 ✓

- d) **Böyle iki sayı YOKTUR.**

İki sayı da çiftse, ikisi de **2'ye bölünür**. Demek ki **2** bunların bir ortak bölenidir.

Ortak bölenlerin en büyüğü olan EBOB, 2'den küçük olamaz:

devamı $\rightarrow$

15 (çözümün devamı)

$$\text{EBOB}(A, B) \geq 2$$

Dolayısıyla EBOB hiçbir zaman 1 olamaz.

Genel kural: EBOB'un 1 olabilmesi için sayıların **hiçbir ortak asal çarpanı** bulunmamalıdır; ikisi de çiftken 2 her zaman ortaktır.

- **e) Böyle iki sayı YOKTUR.**

EBOB her zaman **EKOK'u böler** (çünkü EBOB iki sayıyı, iki sayı da EKOK'u böler).

Burada $12 : 8 = 1,5 \rightarrow 8, 12\text{'yi bölmez}$ ×

Ayrıca altın bağıntı da tutarsız sonuç verir: $A \cdot B = 8 \cdot 12 = 96$ olurdu. İki sayı da 8'in katı olmalı $\rightarrow A = 8a, B = 8b \rightarrow 64ab = 96 \rightarrow ab = 1,5$. Oysa a ve b birer **tam sayı** olmak zorundadır.

Kural: $\text{EBOB}(A, B)$ değeri $\text{EKOK}(A, B)$ değerini bölmüyorsa böyle bir sayı çifti kurulamaz.

✓ **Doğru Sonuç: a) 24 ve 36 b) 25 ve 30 c) (3, 9), (5, 25), (7, 14) d) YOK — ikisi de çiftse EBOB ≥ 2 e) YOK — EBOB, EKOK'u bölmeli ($8 \nmid 12$)**