

KONU ANLATIMLI SORU ÇÖZÜMLERİ

EKOK ve EBOB — En Küçük Ortak Kat ve En Büyük Ortak Bölen

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge CC BY-NC 4.0 lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabılır.

ÇÖZÜMLÜ SORU 1

Tek algoritmadan hem EKOK hem EBOB okuma ve altın bağıntıyla doğrulama

45 ve 60 sayıları veriliyor.

- Her iki sayıyı asal çarpanlarına ayırınız.
- EKOK(45, 60) ve EBOB(45, 60) değerlerini bulunuz.
- Sonuçlarınızı $A \cdot B = \text{EBOB} \cdot \text{EKOK}$ bağıntısıyla doğrulayınız.
- EBOB, EKOK'u böler mi? Kontrol ediniz.

1 a) Asal çarpanlara ayır

$$45: 45 : 3 = 15 \rightarrow 15 : 3 = 5 \rightarrow 5 : 5 = 1 \rightarrow 45 = 3^2 \cdot 5$$

$$60: 60 : 2 = 30 \rightarrow 30 : 2 = 15 \rightarrow 15 : 3 = 5 \rightarrow 5 : 5 = 1 \rightarrow 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

2 b) Üslü biçimden EKOK ve EBOB

Ortak asallar: **3 ve 5**. Ortak olmayan: **2**.

EKOK → ortak asalların **büyük** kuvveti + ortak olmayanlar:

3'ün kuvvetleri 2 ve 1 → **3²**; 5'in kuvvetleri 1 ve 1 → **5**; ortak olmayan **2²** aynen alınır.

$$\text{EKOK}(45, 60) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 4 \cdot 9 \cdot 5 = 180$$

EBOB → ortak asalların **küçük** kuvveti (2 alınmaz, çünkü 45'te yok):

$$\text{EBOB}(45, 60) = 3 \cdot 5 = 15$$

3 c) Altın bağıntıyla doğrula

$$A \cdot B = 45 \cdot 60 = 2700$$

$$\text{EBOB} \cdot \text{EKOK} = 15 \cdot 180 = 2700 \checkmark$$

İki taraf eşit; sonuçlar doğru.

Büyüklük kontrolü de yapalım: EKOK = 180, iki sayıdan da **büyük** ✓ EBOB = 15, iki sayıdan da **küçük** ✓

4 d) EBOB, EKOK'u böler mi?

$$180 : 15 = 12 \rightarrow \text{kalan yok, böler} \checkmark$$

Bu her zaman böyledir: EBOB iki sayıyı da böler, iki sayı da EKOK'u böler; dolayısıyla EBOB da EKOK'u böler.

Ayrıca EBOB her iki sayıyı böler: $45 : 15 = 3 \checkmark$ ve $60 : 15 = 4 \checkmark$

Sonuç: a) $45 = 3^2 \cdot 5$, $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ b) EKOK = 180, EBOB = 15 c) $45 \cdot 60 = 15 \cdot 180 = 2700 \checkmark$ d) Evet, $180 : 15 = 12$

Dikkat: Bir algoritmayı iki kez kurma: sağdaki bütün çarpanların çarpımı EKOK'u, yalnızca ortak olanların çarpımı EBOB'u verir.

ÇÖZÜMLÜ SORU 2 Tekrar eden olaylarda EKOK ve zaman hesabı

Bir duraktan **A otobüsü 18 dakikada bir, B otobüsü 24 dakikada bir** kalkmaktadır. İki otobüs saat **07.00**'de duraktan aynı anda kalkmıştır.

- İkinci kez aynı anda ne zaman kalkarlar?
- Üçüncü kez aynı anda ne zaman kalkarlar?
- Saat 07.00 ile 12.00 arasında (07.00 hariç) kaç kez aynı anda kalkarlar?

1 Hangisi aranıyor: EKOK mu EBOB mu?

Problemde iki olay **tekrar ediyor** ve **tekrar buluşuyor**. Aranan süre, 18'in de 24'ün de **katı** olmalıdır ve **en küçüğü** istenmektedir → **EKOK**.

2 a) EKOK(18, 24)'ü bul

$$18 = 2 \cdot 3^2 \text{ ve } 24 = 2^3 \cdot 3$$

Ortak asallar 2 ve 3; büyük kuvvetleri alınır: 2^3 ve 3^2

$$\text{EKOK}(18, 24) = 2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = \mathbf{72 \text{ dakika}}$$

$$72 \text{ dakika} = \mathbf{1 \text{ saat } 12 \text{ dakika}}$$

$$\text{İkinci kez birlikte kalkış: } 07.00 + 1.12 = \mathbf{08.12}$$

3 b) Üçüncü buluşma

Buluşmalar 72 dakikada bir tekrarlar. Üçüncü buluşma, başlangıçtan $2 \cdot 72 = \mathbf{144 \text{ dakika}}$ sonradır.

$$144 \text{ dakika} = \mathbf{2 \text{ saat } 24 \text{ dakika}}$$

$$07.00 + 2.24 = \mathbf{09.24}$$

$$\text{Kontrol: } 08.12 + 1.12 = 09.24 \checkmark$$

4 c) 07.00 – 12.00 arası buluşma sayısı

$$\text{Aradaki süre: } 5 \text{ saat} = \mathbf{300 \text{ dakika}}$$

Buluşmalar 72, 144, 216, 288 ve 360. dakikalarda olur.

$360 > 300$ olduğu için son buluşma sayılmaz.

Uygun olanlar: **72, 144, 216, 288** → **4 kez**

Saat olarak: 08.12, 09.24, 10.36, **11.48**

Hesapla da doğrulayalım: $300 : 72 = 4 \text{ tam, kalan } 12 \rightarrow \mathbf{4 \text{ kez } \checkmark}$

Sonuç: a) 08.12 b) 09.24 c) 4 kez (08.12, 09.24, 10.36, 11.48)

Dikkat: Kaç kez sorularında bölümün tam kısmını al; kalan, son buluşmadan sonra geçen boş süredir.

ÇÖZÜMLÜ SORU 3 Artmadan eşit paylaştırmada EBOB

Bir tesiste **72 litre ayçiçek yağı** ile **60 litre zeytinyağı** vardır. Yağlar **birbirine karıştırılmadan** ve **artmadan**, her birinde **eşit miktarda** yağ olacak biçimde özdeş şişelere doldurulacaktır.

- a) Bir şişeye en fazla kaç litre yağ konulabilir?
- b) Toplam kaç şişe kullanılır?
- c) Şişe sayısının **en az** olması ile şişe hacminin **en fazla** olması neden aynı şeydir?

1 Hangisi aranıyor?

Bir bütün **artmadan eşit parçalara** ayrılıyor ve **en fazla** soruluyor. Şişe hacmi hem 72'yi hem 60'ı **kalansız bölmelidir** → **EBOB**.

2 a) EBOB(72, 60)'ı bul

$$72 = 2^3 \cdot 3^2 \text{ ve } 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

Ortak asallar 2 ve 3; **küçük** kuvvetleri alınır: **2²** ve **3**

(5 ortak değil → alınmaz)

$$\text{EBOB}(72, 60) = 2^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = \mathbf{12 \text{ litre}}$$

Büyüklik kontrolü: $12 < 60$ ve $12 < 72$ ✓

3 b) Şişe sayısını hesapla

Yağlar karıştırılmadığı için her tür **ayrı ayrı** şişelenir:

$$\text{Ayçiçek yağı: } 72 : 12 = \mathbf{6 \text{ şişe}}$$

$$\text{Zeytinyağı: } 60 : 12 = \mathbf{5 \text{ şişe}}$$

$$\text{Toplam: } 6 + 5 = \mathbf{11 \text{ şişe}}$$

Kontrol: $6 \cdot 12 = 72$ ✓ $5 \cdot 12 = 60$ ✓ Hiç yağ artmadı.

4 c) İki ifadenin neden aynı olduğu

Toplam yağ miktarı **sabittir** ($72 + 60 = 132$ litre). Şişe sayısı:

$$132 : (\text{bir şişenin hacmi})$$

Bölünen sabit olduğuna göre **bölen büyüdükçe bölüm küçülür**. Yani şişe hacmi en fazla olduğunda şişe sayısı en az olur.

Kontrol: EBOB yerine ortak bölenlerden 6'yı seçseydik $72 : 6 + 60 : 6 = 12 + 10 = \mathbf{22}$ **şişe** gerekirdi — iki katı.

Not: $132 : 12 = 11$ ✓ (b) şıkkıyla uyuyor; yağlar karıştırılmasa bile ikisi de 12'ye tam bölündüğü için toplam bölme de sonucu verir.

Sonuç: a) 12 litre b) 11 şişe (6 + 5) c) Toplam sabit olduğu için bölen büyüdükçe bölüm küçülür

Dikkat: "Karıştırılmadan" ifadesi, her türü ayrı saymanı gerektirir; şişe sayısını tek bir bölmeyle bulmaya çalışma.

ÇÖZÜMLÜ SORU 4**Üslü biçimde verilen sayılarda EKOK, EBOB ve altın bağıntı**

$A = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ ve $B = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 7$ sayıları veriliyor.

- EBOB(A, B) değerini bulunuz.
- EKOK(A, B) değerini bulunuz.
- $A \cdot B = \text{EBOB} \cdot \text{EKOK}$ eşitliğini sayılarla doğrulayınız.
- $A : \text{EBOB}$ ve $B : \text{EBOB}$ bölümlerinin **EBOB'u 1** midir? Gösteriniz.

1 a) EBOB — ortak asalların küçük kuvveti

A'nın asalları: 2, 3, 5 | B'nin asalları: 2, 3, 7

Ortak asallar: 2 ve 3 (5 yalnız A'da, 7 yalnız B'de → alınmaz)

2'nin kuvvetleri 3 ve 2 → küçüğü 2^2

3'ün kuvvetleri 2 ve 4 → küçüğü 3^2

$$\text{EBOB}(A, B) = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$$

2 b) EKOK — ortak asalların büyük kuvveti + ortak olmayanlar

2'nin büyük kuvveti 2^3 , 3'ün büyük kuvveti 3^4

Ortak olmayanlar aynen alınır: 5 ve 7

$$\text{EKOK}(A, B) = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$$

$$= 8 \cdot 81 \cdot 35$$

$$8 \cdot 81 = 648 \quad | \quad 648 \cdot 35 = 22\,680$$

3 c) Altın bağıntıyı doğrula

Önce sayıları hesaplayalım:

$$A = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 8 \cdot 9 \cdot 5 = 360$$

$$B = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 7 = 4 \cdot 81 \cdot 7 = 2268$$

$$A \cdot B = 360 \cdot 2268 = 816\,480$$

$$\text{EBOB} \cdot \text{EKOK} = 36 \cdot 22\,680 = 816\,480 \quad \checkmark$$

Üslü biçimde de görülebilir: $A \cdot B = 2^5 \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7$ ve $\text{EBOB} \cdot \text{EKOK} = (2^2 \cdot 3^2) \cdot (2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7) = 2^5 \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7 \quad \checkmark$ Her asalın üsleri iki tarafta da aynı.

4 d) Bölümlerin EBOB'u

$$A : \text{EBOB} = 360 : 36 = 10 \quad (10 = 2 \cdot 5)$$

$$B : \text{EBOB} = 2268 : 36 = 63 \quad (63 = 3^2 \cdot 7)$$

$10 = 2 \cdot 5$ ve $63 = 3^2 \cdot 7 \rightarrow$ **ortak asal çarpanları yoktur.**

$$\text{EBOB}(10, 63) = 1 \quad \checkmark$$

Bu her zaman böyledir: iki sayı kendi EBOB'larına bölündüğünde geriye kalan sayıların ortak bölenleri yalnızca 1'dir. Böyle sayılara **aralarında asal sayılar** denir; bir sonraki konunun tam konusu budur.

Sonuç: a) EBOB = 36 b) EKOK = 22 680 c) $360 \cdot 2268 = 36 \cdot 22\,680 = 816\,480 \quad \checkmark$ d) Evet; 10 ve 63'ün EBOB'u 1'dir

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 4**Üslü biçimde verilen sayılarda EKOK, EBOB ve altın bağıntı (devam)**

Dikkat: Üslü biçimde bırakabildiğin yerde bırak; 22 680 gibi büyük sayıları çarpmadan da bağıntıyı üsler üzerinden doğrulayabilirsin.