ÇÖZÜMLER

Aralarında Asal Sayılar

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge **CC BY-NC 4.0** lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabilir.

1. Bölüm Soru 1–5

1 Bir eşleştirme oyununda sayı çiftleri yazılı kartlar bulunmaktadır:

I. (9, 16) **II.** (14, 21) **III.** (25, 26) **IV.** (12, 35)
V. (18, 27) **VI.** (11, 44) **VII.** (8, 9) **VIII.** (15, 28)

a) Kartları aralarında asal olanlar ve olmayanlar biçiminde iki gruba ayırınız. Her çift için asal çarpanları yazınız.
b) Aralarında asal olmayan çiftlerin EBOB'larını bulunuz.
c) Aralarında asal olan çiftlerin içinde, iki sayısı da asal olan bir çift var mıdır? Sonucu yorumlayınız.

- **a)** Her çifti asal çarpanlarına ayırıp ortak asal arayalım:

  ARALARINDA ASAL:

  - **I. (9, 16)** → 3^2 ve 2^4 → ortak asal yok ✓
  - **III. (25, 26)** → 5^2 ve $2 \cdot 13$ → ortak yok ✓ (ayrıca ardışık sayılar)
  - **IV. (12, 35)** → $2^2 \cdot 3$ ve $5 \cdot 7$ → ortak yok ✓
  - **VII. (8, 9)** → 2^3 ve 3^2 → ortak yok ✓ (ardışık sayılar)
  - **VIII. (15, 28)** → $3 \cdot 5$ ve $2^2 \cdot 7$ → ortak yok ✓

  ARALARINDA ASAL DEĞİL:

  - **II. (14, 21)** → $2 \cdot \mathbf{7}$ ve $3 \cdot \mathbf{7}$ → ortak asal 7 ×
  - **V. (18, 27)** → $2 \cdot \mathbf{3^2}$ ve $\mathbf{3^3}$ → ortak asal 3 ×
  - **VI. (11, 44)** → **11** ve $2^2 \cdot$ **11** → ortak asal 11 ×

- **b)** Ortak asal çarpanların en küçük kuvvetlerinin çarpımı alınır:

  EBOB(14, 21) = 7

  EBOB(18, 27) = 3^2 = 9 (3'ün kuvvetleri 2 ve 3; küçüğü 3^2)

  EBOB(11, 44) = 11

  Hepsi 1'den büyük ✓ Bu, ayrımın doğru yapıldığını denetler.

- **c) Hayır, böyle bir çift yoktur.**

  Aralarında asal olan beş çifte bakalım:

devamı →

1 *(çözümün devamı)*

(9, 16) → ikisi de bileşik | (25, 26) → ikisi de bileşik | (12, 35) → ikisi de bileşik | (8, 9) → ikisi de bileşik | (15, 28) → ikisi de bileşik

Yorum: Beş çiftin hiçbirinde asal sayı yok, buna rağmen hepsi aralarında asal. Bu, **aralarında asal olmakla asal olmanın birbirinden bağımsız** olduğunu gösterir.

Tersine, VI. çiftte **11 asaldır** ama $44 = 2^2 \cdot 11$ olduğu için aralarında asal **değildirler**. Yani bir sayının asal olması da tek başına yetmez.

✓ Doğru Sonuç: a) Aralarında asal: I, III, IV, VII, VIII — Değil: II, V, VI b) EBOB'lar: 7, 9, 11 c) Hayır; hepsi bileşik olduğu hâlde aralarında asaldır

2 Bir okul dolabının şifresi şu kuralla belirlenmiştir: **1 ile 40 arasındaki sayılardan 20 ile aralarında asal olanlar** seçilecektir. Şekilde bu sayılar yuvarlak içine alınmıştır.

20 ile aralarında asal olan sayılar (1–40)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40

a) Şifreye kaç sayı girmektedir? Bu sayıları yazınız.
b) Seçilen sayıların ortak özelliği nedir? 20'yi asal çarpanlarına ayırarak açıklayınız. Sayıların birler basamağında nasıl bir düzen var?
c) Seçilen sayıların hepsi asal mıdır? Değilse asal olmayanları yazıp durumu yorumlayınız.

- **a)** Yuvarlak içine alınan sayılar:

  1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 27, 29, 31, 33, 37, 39

  Sayalım: **16 sayı** şifreye girmektedir.

- **b) $20 = 2^2 \cdot 5$** olduğuna göre 20'nin asal çarpanları **2 ve 5**'tir.

  Bir sayının 20 ile 1'den başka ortak böleni olmaması için, o sayının **ne 2'ye ne de 5'e** bölünmemesi gerekir.

  Birler basamağındaki düzen: Bir sayı 2'ye bölünmüyorsa birler basamağı 0, 2, 4, 6, 8 olamaz; 5'e bölünmüyorsa 0 ya da 5 olamaz. Geriye yalnızca dört rakam kalır:

  1, 3, 7 ve 9

  Gerçekten de seçilen bütün sayıların birler basamağı bu dört rakamdan biridir ✓

  Her onluk aralıkta tam **4** sayı seçilir; 40 sayı için $4 \cdot 4 =$ **16** ✓ (a) şıkkıyla uyuşuyor.

  Not: 20'de 2 çarpanı **iki kez** (2^2) bulunsa da kural değişmez; önemli olan hangi asalların bulunduğudur, kuvvetleri değil.

devamı →

2 *(çözümün devamı)*

- **c) Hayır, hepsi asal değildir.**

  Asal olmayanlar:

  • **1** → asal değildir (yalnızca bir böleni vardır)

  • **9** = 3^2 · **21** = 3 · 7 · **27** = 3^3 · **33** = 3 · 11 · **39** = 3 · 13 → hepsi bileşik

  Asal olanlar: 3, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37 → **10 tane**

  Asal olmayanlar: 1, 9, 21, 27, 33, 39 → **6 tane** (toplam 16 ✓)

  Yorum: Bileşik olanların hepsinde **3** asal çarpanı var; ama 3, 20'nin asal çarpanları olan 2 ve 5'ten farklı olduğu için aralarında asallığı bozmaz.

  Bu soru, "aralarında asal" ile "asal" kavramlarının neden karıştırılmaması gerektiğinin somut bir örneğidir: listede asal olmayan 6 sayı var ve hepsi koşulu sağlıyor.

✓ Doğru Sonuç: a) 16 sayı b) Ne 2'ye ne 5'e bölünenler ($20 = 2^2 \cdot 5$); birler basamağı 1, 3, 7 ya da 9 c) Hayır; 1, 9, 21, 27, 33, 39 asal değildir

3 Bir haritada iki şehir arasındaki kuş uçuşu mesafenin, karayolu mesafesine oranı **45/60** olarak verilmiştir.

x ile y **aralarında asal** pozitif tam sayılar olmak üzere bu oran x/y biçiminde yazılacaktır.

a) x ve y değerlerini bulunuz.
b) x + y ve x · y değerlerini hesaplayınız.
c) EKOK(x, y) kaçtır?
d) 45 ile 60 sayıları kendi EBOB'larına bölündüğünde ne elde edilir? Sonucu (a) şıkkıyla karşılaştırınız.

- **a)** "x ile y aralarında asaldır" koşulu, x/y kesrinin **en sade hâlde** olması demektir.

  45 = $3^2 \cdot 5$ ve 60 = $2^2 \cdot 3 \cdot 5$

  Ortak asalların küçük kuvvetleri: 3 ve 5

  EBOB(45, 60) = 3 · 5 = **15**

  Pay ve paydayı 15'e bölelim:

  45 : 15 = **3** ve 60 : 15 = **4**

  x = 3 ve y = 4

  Kontrol: 3 = 3 ve 4 = 2^2 → ortak asal yok ✓ (ayrıca ardışık sayılar)

devamı →

3 *(çözümün devamı)*

- **b)** x + y = 3 + 4 = **7**

  x · y = 3 · 4 = **12**

- **c)** x ile y aralarında asal olduğuna göre EKOK, çarpımlarına eşittir:

  EKOK(3, 4) = 3 · 4 = **12**

  Kontrol: 3'ün katları 3, 6, 9, **12**, … 4'ün katları 4, 8, **12**, … → ilk ortak kat 12 ✓

  Ayrıca altın bağıntı: x · y = EBOB · EKOK → 12 = 1 · 12 ✓

- **d)** 45 : 15 = **3** ve 60 : 15 = **4**

  Elde edilen sayılar (a) şıkkında bulduğumuz x ve y'nin **ta kendisidir** ✓

  Bu bir tesadüf değildir: iki sayı kendi EBOB'larına bölündüğünde geriye **aralarında asal** sayılar kalır. Çünkü bütün ortak çarpanlar EBOB'un içinde toplanmış ve bölmeyle atılmıştır.

  Genel kural: EBOB(A, B) = d ise A : d ile B : d aralarında asaldır.

✓ Doğru Sonuç: a) x = 3, y = 4 b) x + y = 7, x · y = 12 c) EKOK = 12 d) 45 : 15 = 3 ve 60 : 15 = 4, yani x ve y'nin kendisi

4 Bir sınıfta üç iddia ortaya atılmıştır:

I. Ela: "İki sayının aralarında asal olabilmesi için **ikisinin de asal** olması gerekir."
II. Mert: "**Farklı iki asal sayı** her zaman aralarında asaldır."
III. Sude: "Bir **asal sayı** ile herhangi bir doğal sayı her zaman aralarında asaldır."

a) Ela'nın iddiası doğru mudur? Doğru değilse karşıt örnek veriniz.
b) Mert'in iddiası doğru mudur? Gerekçelendiriniz.
c) Sude'nin iddiası doğru mudur? Doğru değilse karşıt örnek veriniz ve iddiayı düzeltiniz.

- **a) Ela haksızdır.**

  Aralarında asal olmak, sayıların **kendi yapısıyla** değil, **ortak bölenlerinin** bulunup bulunmamasıyla ilgilidir.

  Karşıt örnek: 8 ile 15

  $8 = 2^3$ → bileşik | 15 = 3 · 5 → bileşik

  Ortak asal çarpanları yok → **aralarında asaldırlar** ✓

devamı →

4 *(çözümün devamı)*

Yani ikisi de asal olmadığı hâlde aralarında asal olabilirler. Başka karşıt örnekler: (4, 9), (16, 25), (8, 9), (12, 35)

- **b) Mert haklıdır.**

  p ve q farklı iki asal sayı olsun.

  p'nin bölenleri: **1 ve p**

  q'nun bölenleri: **1 ve q**

  p ≠ q olduğuna göre iki listede ortak olan tek sayı **1**'dir → aralarında asaldırlar ✓

  Örnekler: (2, 3), (5, 7), (11, 13), (17, 41) — hepsi aralarında asaldır.

  Dikkat: "farklı" koşulu gereklidir. 5 ile 5 aynı sayı olduğu için EBOB(5, 5) = 5'tir, aralarında asal değildirler.

- **c) Sude haksızdır.**

  Asal sayı olan p, karşısındaki sayıyı **bölüyorsa** ortak bölen olur ve aralarında asallık bozulur.

  Karşıt örnek: 3 ile 9

  3 asaldır ✓ ama $9 = 3^2$ olduğu için 3, 9'u böler.

  EBOB(3, 9) = **3** ≠ 1 → aralarında asal **değildirler** ×

  Başka karşıt örnekler: (5, 20), (7, 63), (11, 44), (2, 8)

  Düzeltilmiş iddia:

  "Bir **p asal sayısı** ile bir n doğal sayısı, **p sayısı n'yi bölmüyorsa** aralarında asaldır."

  Gerekçe: p'nin 1 dışındaki tek böleni kendisidir. O hâlde ortak bölen olabilecek tek aday p'dir; p, n'yi bölmüyorsa geriye yalnızca 1 kalır.

✓ Doğru Sonuç: a) Ela yanlış; 8 ile 15 b) Mert doğru (bölenleri 1 ve kendileri) c) Sude yanlış; 3 ile 9. Doğrusu: "p, n'yi bölmüyorsa aralarında asaldır"

5 **Soru:** x ile y aralarında asal pozitif tam sayılardır ve x/y = 42/56'dır. x + y kaçtır?

Bir öğrenci şöyle çözmüştür:
"x/y = 42/56 verilmiş. O hâlde x = 42 ve y = 56'dır.
x + y = 42 + 56 = 98'dir."

a) Öğrencinin hatası nedir?
b) EBOB(42, 56) değerini bulunuz ve kesri en sade hâline getiriniz.
c) Doğru cevabı bulunuz.
d) Öğrencinin seçtiği x = 42 ve y = 56 değerlerinin sorudaki koşulu neden sağlamadığını gösteriniz.

- **a)** Öğrenci, x/y = 42/56 eşitliğinden doğrudan x = 42 ve y = 56 sonucunu çıkarmış; ama sorudaki **"x ile y aralarında asaldır"** koşulunu hiç kullanmamıştır.

  Bir oran **sonsuz çoklukta** sayı çiftiyle yazılabilir: 42/56 = 21/28 = 6/8 = 3/4 ... Bunların hepsi aynı oranı verir. "Aralarında asal" koşulu, bu sonsuz seçenek arasından **tek birini** seçmek için konulmuştur: **en sade hâl**.

- **b)** $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ ve $56 = 2^3 \cdot 7$

  Ortak asallar 2 ve 7; küçük kuvvetleri alınır:

  EBOB(42, 56) = 2 · 7 = 14

  Pay ve paydayı 14'e bölelim:

  42 : 14 = **3** ve 56 : 14 = **4**

  42/56 = **3/4**

  Kontrol: 3 ile 4 ardışık sayılardır, yani aralarında asaldırlar ✓

- **c) x = 3 ve y = 4**

  x + y = 3 + 4 = **7**

  Öğrencinin bulduğu 98 ile doğru cevap 7 arasında büyük fark vardır; çünkü öğrenci sayıların 14 katını kullanmıştır (98 = 7 · 14).

- **d)** Öğrencinin seçtiği değerleri koşula sokalım:

  EBOB(42, 56) = **14**

  Aralarında asal olmak **EBOB = 1** demektir. Burada EBOB 14 çıkıyor, yani 42 ile 56'nın 1'den başka ortak bölenleri (2, 7, 14) vardır.

  Demek ki x = 42 ve y = 56 çifti, sorudaki koşulu **sağlamıyor** ve geçerli bir cevap değil.

  Kural: Bir soruda "aralarında asal" ifadesini gördüğün anda kesri sadeleştir; sadeleşmemiş hâl her zaman yanlış cevap verir.

devamı →

5 *(çözümün devamı)*

✔ Doğru Sonuç: a) "Aralarında asal" koşulunu kullanmamış, sadeleştirmemiş b) EBOB = 14, kesir 3/4 c) x + y = 7 d) EBOB(42, 56) = 14 ≠ 1

2. Bölüm Soru 6–10

6 x ile y **aralarında asal** pozitif tam sayılardır ve **x · y = 60**'tır. (x < y kabul ediniz.)

a) Koşulu sağlayan bütün (x, y) çiftlerini bulunuz.
b) x + y en küçük kaçtır?
c) x + y en büyük kaçtır?
d) Çift sayısını, 60'ın farklı asal çarpan sayısından hesaplayarak doğrulayınız.

- **a)** Önce 60'ın bütün çarpan çiftlerini yazalım (x < y):

  1 · 60 · 2 · 30 · 3 · 20 · 4 · 15 · 5 · 12 · 6 · 10

  Şimdi her çiftin ortak asal çarpanına bakalım:

  - **1 ve 60** → 1 ile her sayı aralarında asaldır ✓
  - 2 ve 30 → ikisi de çift → ortak asal 2 ×
  - **3 ve 20** → 3 ile $2^2 \cdot 5$ → ortak yok ✓
  - **4 ve 15** → 2^2 ile 3 · 5 → ortak yok ✓
  - **5 ve 12** → 5 ile $2^2 \cdot 3$ → ortak yok ✓
  - 6 ve 10 → ikisi de çift → ortak asal 2 ×

  Koşulu sağlayanlar: **(1, 60), (3, 20), (4, 15), (5, 12)** → **4 çift**

- **b)** Toplamlar:

  1 + 60 = 61 · 3 + 20 = 23 · 4 + 15 = 19 · **5 + 12 = 17**

  x + y en küçük = **17** (x = 5, y = 12)

  Beklenen sonuç: çarpanlar birbirine **yaklaştıkça** toplam küçülür. 60'ın birbirine en yakın çifti 6 ve 10'dur ama onlar aralarında asal olmadığı için elenmiş, bir sonraki en yakın çift seçilmiştir.

- **c)** Aynı listeden en büyük toplam **61**'dir (x = 1, y = 60)

  1 ile herhangi bir sayı her zaman aralarında asal olduğundan, bu çift **hiçbir zaman elenmez**. Bu yüzden bu tip sorularda en büyük toplam her zaman **1 + (çarpımın kendisi)**'dir.

- **d)** 60'ı asal çarpanlarına ayıralım:

devamı →

6 *(çözümün devamı)*

60 = 2^2 · 3 · 5 → **3 farklı** asal çarpanı var (2, 3, 5)

Aralarında asal bir çiftte her asalın **bütün kuvveti** tek bir tarafa gitmelidir; bölünemez. Her asal için 2 seçenek vardır (x'e ya da y'ye):

2 · 2 · 2 = **8** dağıtım

x ile y'nin yerleri değiştirilince aynı çift tekrarlandığından:

8 : 2 = **4 çift** ✓

(a) şıkkında elle bulduğumuz sayıyla uyuşuyor. Örneğin (4, 15) çiftinde 2^2 tamamen x'e, 3 ve 5 tamamen y'ye gitmiştir.

✓ Doğru Sonuç: a) (1, 60), (3, 20), (4, 15), (5, 12) b) 17 c) 61 d) 60 = 2^2 · 3 · 5 → 2^3 : 2 = 4 çift ✓

7 Aşağıdaki tabloda dört sayı çifti için EBOB ve EKOK değerleri verilmiştir:

Çift	A	B	EBOB	EKOK
1	9	16	1	144
2	12	18	6	36
3	7	30	1	210
4	20	24	4	120

a) Hangi çiftler aralarında asaldır? Nasıl anladığınızı yazınız.
b) Aralarında asal olan çiftlerde EKOK ile A · B arasında nasıl bir ilişki vardır? Hesaplayarak gösteriniz.
c) 2. ve 4. çiftte EKOK neden A · B'den küçüktür?
d) Her satırda A · B = EBOB · EKOK eşitliğinin sağlandığını kontrol ediniz.

- **a)** Aralarında asal olmanın ölçütü **EBOB = 1**'dir. Tablodan doğrudan okunur:

  1. çift (9, 16) → EBOB = 1 ✓ **aralarında asal**

  3. çift (7, 30) → EBOB = 1 ✓ **aralarında asal**

  2. çift (EBOB = 6) ve 4. çift (EBOB = 4) aralarında asal **değildir**.

devamı →

7 *(çözümün devamı)*

Doğrulama: $9 = 3^2$ ve $16 = 2^4$ → ortak asal yok ✓ · 7 asaldır ve $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$'i bölmez ✓

- **b)** Aralarında asal çiftlerde **EKOK = A · B**'dir:

  1. çift: A · B = 9 · 16 = **144** → tablodaki EKOK da **144** ✓

  3. çift: A · B = 7 · 30 = **210** → tablodaki EKOK da **210** ✓

  Nedeni altın bağıntıdır: A · B = EBOB · EKOK. EBOB = 1 olduğunda A · B = 1 · EKOK = EKOK olur.

- **c)** Altın bağıntıyı EKOK için düzenleyelim:

  EKOK = (A · B) : EBOB

  2. çift: A · B = 12 · 18 = 216 → EKOK = 216 : 6 = **36** ✓

  4. çift: A · B = 20 · 24 = 480 → EKOK = 480 : 4 = **120** ✓

  EBOB 1'den büyük olduğunda çarpım bir sayıya bölündüğü için **küçülür**. EBOB ne kadar büyükse EKOK, çarpımdan o kadar uzaklaşır.

  Sezgisel açıklama: ortak çarpanlar EKOK'ta **iki kez sayılmaz**; bu yüzden EKOK çarpımdan küçük kalır.

- **d)** Satır satır kontrol:

  1. 9 · 16 = 144 | 1 · 144 = 144 ✓

  2. 12 · 18 = 216 | 6 · 36 = 216 ✓

  3. 7 · 30 = 210 | 1 · 210 = 210 ✓

  4. 20 · 24 = 480 | 4 · 120 = 480 ✓

  Dört satırda da eşitlik sağlanıyor. Bu bağıntı her doğal sayı çifti için geçerlidir ve sonuçları denetlemenin en hızlı yoludur.

✓ Doğru Sonuç: a) 1. ve 3. çift (EBOB = 1) b) EKOK = A · B (144 ve 210) c) EKOK = A·B : EBOB, EBOB > 1 olduğu için küçülür d) Dört satırda da sağlanıyor

8 Bir öğrenci şöyle bir akıl yürütme yapmıştır:

> *"Ardışık sayılar aralarında asaldır. 14 ile 16 ardışık çift sayılardır. O hâlde 14 ile 16 aralarında asaldır."*

a) Öğrencinin akıl yürütmesindeki hata nedir?
b) 14 ile 16 gerçekten aralarında asal mıdır? Asal çarpanlarına ayırarak gösteriniz.
c) Kural hangi durumlarda geçerlidir? İkisine de birer örnek veriniz.
d) 14 sayısı ile 15, 16 ve 21 sayılarının EBOB'larını bulup karşılaştırınız.

- **a)** İki ayrı hata iç içe geçmiş:

  1. 14 ile 16 **ardışık sayı değildir**; aralarında 15 vardır. Bunlar **ardışık çift** sayılardır ve aradaki fark 1 değil **2**'dir.

  2. Kural **ardışık doğal sayılar** (farkı 1 olanlar) ve **ardışık tek sayılar** için geçerlidir; **ardışık çift** sayılar için **geçerli değildir**. Tam tersine, ardışık çift sayılar hiçbir zaman aralarında asal olamaz.

- **b) Hayır, aralarında asal değildirler.**

  $14 = \mathbf{2} \cdot 7$ ve $16 = \mathbf{2^4}$

  Her ikisinde de **2** asal çarpanı var → ortak asal çarpan var → aralarında asal **değil** ×

  EBOB(14, 16) = **2**

  Genel kural: iki sayı da çiftse 2 her ikisini de böler; bu yüzden ardışık çift sayılar **asla** aralarında asal olamaz.

- **c)** Kural iki durumda geçerlidir:

  1. Ardışık doğal sayılar (farkı 1):

  Örnek: **14 ile 15** → $2 \cdot 7$ ve $3 \cdot 5$ → ortak asal yok ✓

  Neden: Ortak bir bölen d, iki sayıyı da bölseydi farklarını da bölerdi. Fark 1 olduğuna göre d = 1'dir.

  2. Ardışık tek sayılar (farkı 2, ikisi de tek):

  Örnek: **13 ile 15** → 13 asal ve $15 = 3 \cdot 5$ → ortak asal yok ✓

  Neden: Ortak bölen d, farkı olan 2'yi de bölmelidir → d = 1 ya da d = 2. İkisi de tek olduğu için d = 2 olamaz → d = 1.

- **d)** Üç karşılaştırma:

  EBOB(14, 15) → $2 \cdot 7$ ve $3 \cdot 5$ → ortak yok → **1** ✓ aralarında asal

  EBOB(14, 16) → $2 \cdot 7$ ve 2^4 → ortak asal 2 → **2** ×

devamı →

8 *(çözümün devamı)*

EBOB(14, 21) → 2 · 7 ve 3 · 7 → ortak asal 7 → **7** ×

Karşılaştırma: Aynı sayı (14), farkına ya da büyüklüğüne bakılmaksızın bazı sayılarla aralarında asal, bazılarıyla değildir. Belirleyici olan tek şey **ortak asal çarpanın** bulunup bulunmamasıdır.

✓ Doğru Sonuç: a) 14 ile 16 ardışık değil, ardışık çift; kural onlara uygulanmaz b) Hayır; ortak asal 2, EBOB = 2 c) Ardışık doğal (14, 15) ve ardışık tek (13, 15) d) 1, 2 ve 7

9 A bir rakam olmak üzere iki basamaklı **4A** sayısı ile **12** sayısı aralarında asaldır.

a) A yerine yazılabilecek rakamları bulunuz.
b) Bu rakamların toplamı kaçtır?
c) Bulduğunuz 4A sayılarından hangileri asal sayıdır?
d) Asal olmadığı hâlde 12 ile aralarında asal olan sayı hangisidir? Bunun nasıl mümkün olduğunu açıklayınız.

- **a)** $12 = 2^2 \cdot 3$ olduğuna göre 12'nin asal çarpanları **2 ve 3**'tür. 4A sayısının 12 ile aralarında asal olması için:
  - 4A **2'ye bölünmemeli** → tek sayı olmalı
  - 4A **3'e bölünmemeli** → rakamları toplamı 3'ün katı olmamalı

  40'tan 49'a kadar deneyelim:

  40, 42, 44, 46, 48 → çift ×

  41 → tek ✓, 4 + 1 = 5 ✓ → **uygun**

  43 → tek ✓, 4 + 3 = 7 ✓ → **uygun**

  45 → tek ama 4 + 5 = 9, 3'e bölünür ×

  47 → tek ✓, 4 + 7 = 11 ✓ → **uygun**

  49 → tek ✓, 4 + 9 = 13 ✓ → **uygun**

  Uygun sayılar: **41, 43, 47, 49**

  A yerine yazılabilecek rakamlar: **1, 3, 7, 9**
- **b)** 1 + 3 + 7 + 9 = **20**
- **c)** Bulunan sayıları asallık bakımından inceleyelim:

  41 → 2, 3, 5 bölmez; 7 · 7 = 49 > 41 olduğu için denemeler biter → **ASAL** ✓

  43 → aynı biçimde → **ASAL** ✓

devamı →

9 *(çözümün devamı)*

47 → 2, 3, 5 bölmez; 7 · 7 = 49 > 47 → **ASAL** ✓

49 → 49 = **7 · 7** → asal **DEĞİL**

Asal olanlar: **41, 43 ve 47** → 3 tane

- **d)** Asal olmadığı hâlde koşulu sağlayan sayı **49**'dur.

  Nasıl mümkün: 49 = 7^2 olduğuna göre 49'un tek asal çarpanı **7**'dir. 12'nin asal çarpanları ise **2 ve 3**'tür.

  {7} ile {2, 3} kümelerinde **ortak eleman yok** → EBOB(49, 12) = **1** → aralarında asaldırlar ✓

  Bu, konunun en önemli ayrımını gösteriyor: bir sayının **kendi içinde** asal olup olmaması ile, **başka bir sayıyla** aralarında asal olması birbirinden bağımsızdır. Önemli olan iki sayının asal çarpan kümelerinin **kesişmemesidir**.

✓ Doğru Sonuç: a) A = 1, 3, 7, 9 (sayılar 41, 43, 47, 49) b) 20 c) 41, 43, 47 asaldır d) 49 = 7^2; asal çarpanı 7, 12'ninkiler 2 ve 3 — kesişmiyor

10 Aşağıda sekiz sayı çifti verilmiştir:

I. (19, 20) **II.** (35, 37) **III.** (24, 26) **IV.** (16, 25)
V. (100, 101) **VI.** (51, 53) **VII.** (18, 20) **VIII.** (21, 40)

a) Çiftleri "ardışık doğal sayılar", "ardışık tek sayılar", "ardışık çift sayılar" ve "diğer" olmak üzere dört gruba ayırınız.
b) Hangi gruplarda aralarında asallık kesin olarak söylenebilir? Hangi grupta tek tek incelemek gerekir?
c) Aralarında asal olmayan çiftlerin EBOB'larını bulunuz.

- **a)** Gruplandırma:

  Ardışık doğal sayılar (farkı 1): I (19, 20) · V (100, 101)

  Ardışık tek sayılar: II (35, 37) · VI (51, 53)

  Ardışık çift sayılar: III (24, 26) · VII (18, 20)

  Diğer: IV (16, 25) · VIII (21, 40)

- **b) Kesin olarak söylenebilenler:**
  - **Ardışık doğal sayılar** → her zaman **aralarında ASALDIR**. (19, 20) ✓ ve (100, 101) ✓
  - **Ardışık tek sayılar** → her zaman **aralarında ASALDIR**. (35, 37) ✓ ve (51, 53) ✓

devamı →

10 *(çözümün devamı)*

(Not: 51 = 3 · 17 asal değildir, ama 53 asaldır ve 51'i bölmez → aralarında asaldırlar.)

• **Ardışık çift sayılar** → her zaman aralarında asal **DEĞİLDİR**. İkisi de çift olduğu için 2 ortak bölendir.

Tek tek incelenmesi gereken grup: "diğer"

• **IV. (16, 25)** → 2^4 ile 5^2 → ortak asal yok → **aralarında asal** ✓

• **VIII. (21, 40)** → 3 · 7 ile $2^3 \cdot 5$ → ortak asal yok → **aralarında asal** ✓

Bu gruptaki çiftler de aralarında asal çıktı; ama bu bir kuraldan değil, **hesaptan** geliyor. Örneğin (16, 24) olsaydı EBOB 8 çıkardı.

- **c)** Aralarında asal olmayanlar yalnızca **ardışık çift** gruptakilerdir:

III. (24, 26): $24 = 2^3 \cdot 3$ ve $26 = 2 \cdot 13$

Ortak asal yalnızca 2 (en küçük kuvveti 2^1) → **EBOB = 2**

VII. (18, 20): $18 = 2 \cdot 3^2$ ve $20 = 2^2 \cdot 5$

Ortak asal yalnızca 2 → **EBOB = 2**

İkisinde de EBOB tam olarak 2 çıktı. Bu her ardışık çift sayı çiftinde böyledir: farkları 2 olduğu için ortak bölen 2'yi de bölmeli, yani 1 ya da 2 olabilir; ikisi de çift olduğundan **EBOB = 2**'dir.

✓ Doğru Sonuç: a) Ardışık: I, V — Ardışık tek: II, VI — Ardışık çift: III, VII — Diğer: IV, VIII b) İlk üç grup kesin; "diğer" incelenmeli c) EBOB(24, 26) = 2 ve EBOB(18, 20) = 2

3. Bölüm Soru 11–15

11 A ve B birer doğal sayı olmak üzere üç iddia ortaya atılmıştır:

I. "EKOK(A, B) = A · B ise A ile B **aralarında asaldır**."
II. "A ile B aralarında asalsa **EBOB(A, B) = 1**'dir."
III. "EBOB(A, B) = 1 ise A ile B'den **en az biri asaldır**."

a) I. iddia doğru mudur? Altın bağıntıyı kullanarak gösteriniz.
b) II. iddia doğru mudur? Gerekçelendiriniz.
c) III. iddia doğru mudur? Doğru değilse iki farklı karşıt örnek veriniz.

- **a) I. iddia DOĞRUDUR.**

Altın bağıntı: A · B = EBOB(A, B) · EKOK(A, B)

devamı →

11 *(çözümün devamı)*

Verilene göre EKOK(A, B) = A · B'dir. Yerine yazalım:

A · B = EBOB · (A · B)

Her iki taraf A · B'ye bölünürse (A · B ≠ 0):

EBOB(A, B) = 1

EBOB'un 1 olması, aralarında asal olmanın tanımıdır ✓

Örnek: EKOK(9, 16) = 144 = 9 · 16 → EBOB(9, 16) = 1 ✓

- **b) II. iddia DOĞRUDUR.**

  Aralarında asal olmak, "1'den başka ortak böleni yoktur" demektir. Ortak bölenlerin en büyüğü olan EBOB, tek ortak bölen olan 1'e eşit olmak zorundadır:

  EBOB(A, B) = 1

  Bu aslında bir teorem değil, **tanımın başka bir yazılışıdır**. İki ifade birbirinin yerine kullanılabilir.

  Örnek: 8 ile 15 aralarında asaldır → EBOB(8, 15) = 1 ✓

- **c) III. iddia YANLIŞTIR.**

  Aralarında asal olmak için asal çarpan **kümelerinin kesişmemesi** yeterlidir; sayıların kendilerinin asal olması gerekmez.

  1. karşıt örnek: 8 ile 9

  $8 = 2^3$ → bileşik | $9 = 3^2$ → bileşik

  Ortak asal yok → EBOB(8, 9) = 1 ✓ ama **hiçbiri asal değil** ×

  2. karşıt örnek: 16 ile 25

  $16 = 2^4$ → bileşik | $25 = 5^2$ → bileşik

  EBOB(16, 25) = 1 ✓ ama ikisi de bileşik ×

  Başka karşıt örnekler: (4, 9), (12, 35), (27, 49), (8, 15)

  Not: İddianın tersi de yanlıştır: A ile B'den biri asal olsa bile aralarında asal olmayabilirler (3 ile 9 gibi). İki kavram birbirinden tamamen bağımsızdır.

✓ Doğru Sonuç: a) I doğru; A·B = EBOB · (A·B) → EBOB = 1 b) II doğru (tanımın kendisi) c) III yanlış; (8, 9) ve (16, 25)

12 A ve B pozitif tam sayılardır. **EBOB(A, B) = 6** ve **EKOK(A, B) = 180** olduğu bilinmektedir. (A < B kabul ediniz.)

a) A · B çarpımını bulunuz.
b) A = 6a ve B = 6b yazıldığında a ile b arasında hangi koşul bulunmalıdır? a · b kaçtır?
c) Koşulu sağlayan bütün (A, B) çiftlerini bulunuz.
d) A + B en küçük kaçtır? Bulduğunuz çifti EBOB ve EKOK hesabıyla doğrulayınız.

- **a)** Altın bağıntı:

  A · B = EBOB(A, B) · EKOK(A, B) = 6 · 180 = **1080**

- **b)** EBOB(A, B) = 6 olduğuna göre **6 her iki sayıyı da böler**. O hâlde A = 6a ve B = 6b yazılabilir.

  Koşul: a ile b **aralarında asal** olmalıdır.

  Neden? Eğer a ile b'nin 1'den büyük ortak bir böleni olsaydı, bu bölen 6 ile çarpılıp A ve B'nin daha büyük bir ortak böleni olurdu; o zaman EBOB 6'dan büyük çıkardı. Bu, verilenle çelişir.

  Şimdi çarpımı yazalım:

  A · B = 6a · 6b = 36ab = 1080

  ab = 1080 : 36 = **30**

- **c)** a · b = 30 ve a ile b aralarında asal, a < b olacak biçimde çiftleri bulalım.

  30 = 2 · 3 · 5 → 3 farklı asal → $2^3 : 2$ = **4 çift** beklenir.

  30'un çarpan çiftleri: 1 · 30 ✓ · 2 · 15 ✓ · 3 · 10 ✓ · 5 · 6 ✓ (dördü de aralarında asal)

  Şimdi A = 6a ve B = 6b:

  - a = 1, b = 30 → **A = 6, B = 180**
  - a = 2, b = 15 → **A = 12, B = 90**
  - a = 3, b = 10 → **A = 18, B = 60**
  - a = 5, b = 6 → **A = 30, B = 36**

  Toplam **4 çift** ✓ Beklentiyle uyuşuyor.

- **d)** Toplamlar:

  6 + 180 = 186 · 12 + 90 = 102 · 18 + 60 = 78 · **30 + 36 = 66**

  A + B en küçük = **66** (A = 30, B = 36)

  Doğrulama:

  30 = 2 · 3 · 5 ve $36 = 2^2 \cdot 3^2$

devamı →

12 *(çözümün devamı)*

EBOB → ortak asalların küçük kuvvetleri: $2 \cdot 3 = \mathbf{6}$ ✓

EKOK → ortak asalların büyük kuvvetleri + ortak olmayanlar: $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 4 \cdot 9 \cdot 5 = \mathbf{180}$ ✓

Altın bağıntı: $30 \cdot 36 = 1080$ ve $6 \cdot 180 = 1080$ ✓

✓ Doğru Sonuç: a) 1080 b) a ile b aralarında asal, a · b = 30 c) (6, 180), (12, 90), (18, 60), (30, 36) d) 66 (30 ve 36)

13 Birbirine geçmiş iki dişli çarktan biri **24 dişli**, diğeri **35 dişlidir**. Çarkların birer dişi işaretlenmiştir ve başlangıçta bu iki işaretli diş **karşı karşıyadır**. Çarklar dönmeye başlar.

a) 24 ile 35 aralarında asal mıdır? Gösteriniz.
b) İşaretli dişlerin tekrar karşı karşıya gelmesi için kaç diş ilerlemek gerekir?
c) Bu sırada her çark kaçar tur atmış olur?
d) Dişli sayıları 24 ve 36 olsaydı buluşma ne kadar sürerdi? Sonucu (b) ile karşılaştırıp yorumlayınız.

- **a)** $24 = 2^3 \cdot 3$ ve $35 = 5 \cdot 7$

  Asal çarpan kümeleri {2, 3} ile {5, 7} → **ortak eleman yok**

  → **Aralarında asaldırlar** ✓ EBOB(24, 35) = 1

- **b)** İşaretli dişlerin tekrar karşılaşması için ilerleyen diş sayısı, hem 24'ün hem 35'in **katı** olmalıdır; en erken buluşma için **en küçük** ortak kat aranır → **EKOK**.

  Aralarında asal oldukları için EKOK, çarpımlarına eşittir:

  EKOK(24, 35) = 24 · 35 = **840 diş**

  Yani işaretli dişler ancak **840 diş** ilerledikten sonra tekrar karşı karşıya gelir.

- **c)** Her çarkın attığı tur sayısı, ilerleyen diş sayısının kendi diş sayısına bölümüdür:

  24 dişli çark: 840 : 24 = **35 tur**

  35 dişli çark: 840 : 35 = **24 tur**

  İlginç bir düzen: her çark, **diğerinin diş sayısı kadar** tur atmıştır. Bu, aralarında asal çarklarda her zaman böyledir; çünkü EKOK çarpıma eşittir ve bölme işleminde diğer sayı kalır.

- **d)** Dişli sayıları 24 ve 36 olsaydı:

  $24 = 2^3 \cdot 3$ ve $36 = 2^2 \cdot 3^2$

devamı →

13 *(çözümün devamı)*

Ortak asallar 2 ve 3 → **aralarında asal değiller**

EBOB(24, 36) = $2^2 \cdot 3$ = **12**

EKOK(24, 36) = $2^3 \cdot 3^2$ = **72 diş**

Tur sayıları: 72 : 24 = **3 tur** ve 72 : 36 = **2 tur**

Karşılaştırma ve yorum:

840 diş yerine yalnızca **72 diş** — buluşma **çok daha erken** gerçekleşir.

Nedeni şudur: EKOK = (A · B) : EBOB'tur. Aralarında asal çarklarda EBOB = 1 olduğu için EKOK çarpımın tamamıdır ve buluşma **en geç** gerçekleşir. Ortak çarpan büyüdükçe EKOK küçülür ve buluşma erkene gelir.

Mühendislikteki karşılığı: Dişlilerin aynı dişlerinin sürekli aynı dişlerle karşılaşması aşınmayı bir noktada toplar. Bunu önlemek için diş sayıları çoğu zaman **bilerek aralarında asal** seçilir; böylece aşınma bütün dişlere eşit dağılır.

✓ Doğru Sonuç: a) Evet, {2,3} ile {5,7} kesişmiyor b) 840 diş c) 35 ve 24 tur d) 72 diş — çok daha erken; EBOB = 12 olduğu için EKOK küçülür

14 a ve b birer pozitif tam sayı olmak üzere üç iddia ortaya atılmıştır:

I. "Aralarında asal iki sayıdan **en az biri tektir**."
II. "Aralarında asal iki sayının **toplamı her zaman tektir**."
III. "a ile b aralarında asalsa, **a ile b^2** de aralarında asaldır."

a) I. iddia doğru mudur? Gerekçelendiriniz.
b) II. iddia doğru mudur? Doğru değilse karşıt örnek veriniz.
c) III. iddia doğru mudur? Asal çarpanlar üzerinden gerekçelendirip bir örnek veriniz.

- **a) I. iddia DOĞRUDUR.**

  Varsayalım ki **ikisi de çift** olsun. O zaman her ikisi de 2'ye bölünür, yani **2 ortak bölendir**:

  EBOB(a, b) ≥ 2

  Bu, aralarında asal olmalarıyla (EBOB = 1) **çelişir**. Demek ki ikisi birden çift olamaz; **en az biri tek** olmak zorundadır ✓

  Örnekler: (8, 15) → 15 tek ✓ · (9, 16) → 9 tek ✓ · (7, 13) → ikisi de tek ✓

  İddia "en az biri" dediği için ikisinin de tek olduğu durumlar da kapsanır.

- **b) II. iddia YANLIŞTIR.**

devamı →

14 *(çözümün devamı)*

Toplamın tek olması için sayılardan **birinin tek, birinin çift** olması gerekir. Oysa aralarında asal iki sayının **ikisi de tek** olabilir.

Karşıt örnek: 3 ile 5

EBOB(3, 5) = 1 ✓ aralarında asaldırlar

3 + 5 = **8** → **çift** × İddia bozuldu.

Başka karşıt örnekler: 7 + 9 = 16 · 25 + 27 = 52 · 11 + 13 = 24 — hepsinde sayılar aralarında asal, toplam çift.

Düzeltilmiş iddia: "Aralarında asal iki sayının toplamı, sayılardan yalnızca biri çiftse tektir."

- **c) III. iddia DOĞRUDUR.**

Gerekçe: Bir sayının karesi alındığında **yeni asal çarpan eklenmez**; yalnızca var olan asalların üsleri iki katına çıkar.

$b = p^x \cdot q^y$ ise $b^2 = p^{2x} \cdot q^{2y}$ olur. Yani b ile b^2'nin **asal çarpan kümeleri aynıdır**.

a ile b'nin ortak asal çarpanı yoksa, a ile b^2'nin de olamaz — çünkü b^2 hiçbir yeni asal getirmemiştir ✓

Örnek: a = 8 ve b = 15

$8 = 2^3$ ve $15 = 3 \cdot 5$ → aralarında asal ✓

$b^2 = 15^2 = 225 = 3^2 \cdot 5^2$

$8 = 2^3$ ile $225 = 3^2 \cdot 5^2$ → ortak asal yok → **aralarında asal** ✓

Aynı gerekçeyle a^2 ile b^2 de, hatta a^m ile b^n de aralarında asaldır.

✓ Doğru Sonuç: a) I doğru (ikisi de çift olsa 2 ortak olurdu) b) II yanlış; 3 + 5 = 8 çift c) III doğru; kare almak yeni asal çarpan eklemez (8 ile 225)

15 Bir "sayı atölyesi" etkinliğinde öğrencilerden, verilen koşulları sağlayan sayılar **üretmeleri** isteniyor. **Dikkat:** Bir maddede koşulu sağlayan sayı **bulunmayabilir**; öyleyse bunu gerekçesiyle yazınız.

a) EBOB'u 1, EKOK'u 84 olan ve ikisi de 1'den büyük iki doğal sayı.
b) 30 ile aralarında asal olan, 30'dan büyük iki basamaklı üç sayı.
c) İkisi de üç basamaklı, ikisi de bileşik ve aralarında asal olan iki sayı.
d) Toplamı 20 olan, aralarında asal iki doğal sayı.
e) İkisi de çift olan ve aralarında asal olan iki doğal sayı.

- **a)** EBOB = 1 olduğuna göre sayılar aralarında asaldır ve EKOK **çarpımlarına** eşittir:

  $x \cdot y = 84$

  $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ → 3 farklı asal → $2^3 : 2 =$ **4 çift**

  Aralarında asal çiftler: (1, 84), (3, 28), (4, 21), (7, 12)

  "İkisi de 1'den büyük" koşulu (1, 84) çiftini eler. Geriye **(3, 28), (4, 21), (7, 12)** kalır.

  Cevap: 4 ve 21

  Kontrol: $4 = 2^2$, $21 = 3 \cdot 7$ → ortak asal yok ✓ EKOK = $4 \cdot 21 = 84$ ✓

- **b) $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$** → seçilecek sayı ne 2'ye, ne 3'e, ne 5'e bölünmemeli.

  30'dan büyük iki basamaklı sayıları tarayalım:

  31 → tek ✓, 3 + 1 = 4 ✓, birler basamağı 1 ✓ → **uygun**

  33 → 3'e bölünür × · 35 → 5'e bölünür ×

  37 → tek ✓, 3 + 7 = 10 ✓ → **uygun**

  39 → 3'e bölünür × · 41 → **uygun**

  Cevap: 31, 37 ve 41 (43, 47, 49, 53, 59 da olur)

  Not: $49 = 7^2$ asal değildir ama 30 ile aralarında asaldır ✓

- **c)** İkisi de bileşik ama ortak asal çarpanı olmayan üç basamaklı sayılar arıyoruz. En kolay yol, **farklı asalların kuvvetlerini** seçmektir:

  Cevap: 125 ve 128

  $125 = 5^3$ → bileşik ✓ | $128 = 2^7$ → bileşik ✓

  Asal çarpan kümeleri {5} ile {2} → kesişmiyor → aralarında asal ✓

  Başka cevaplar: 121 (11^2) ve 128 (2^7) · 243 (3^5) ve 625 (5^4) · 169 (13^2) ve 512 (2^9)

- **d)** Toplamı 20 olan çiftleri yazıp EBOB'larına bakalım:

  (1, 19) → EBOB = 1 ✓ · (2, 18) → ikisi de çift × · **(3, 17)** → ✓ · (4, 16) → ×

devamı →

15 *(çözümün devamı)*

(5, 15) → ortak 5 ✗ · (6, 14) → ✗ · **(7, 13)** → ✓ · (8, 12) → ✗ · **(9, 11)** → ✓

Cevap: 7 ve 13 (3 ve 17, 9 ve 11, 1 ve 19 da olur)

Bir düzen: toplam **çift** olduğu için iki sayı da tek olmak zorundadır; ikisi de çift olsaydı EBOB en az 2 çıkardı.

- **e) Böyle iki sayı YOKTUR.**

  İki sayı da çiftse, her ikisi de **2'ye bölünür**. Demek ki **2 bir ortak bölendir**:

  EBOB(a, b) ≥ **2**

  Aralarında asal olmak EBOB = 1 demektir; EBOB en az 2 olduğuna göre bu koşul **hiçbir zaman** sağlanamaz.

  Aynı gerekçe daha genel olarak da işler: iki sayının **ortak bir asal çarpanı** varsa aralarında asal olamazlar. "İkisi de çift" demek, ortak asal çarpanın 2 olduğunu baştan söylemektir.

✓ Doğru Sonuç: a) 4 ve 21 b) 31, 37, 41 c) 125 ve 128 d) 7 ve 13 e) YOK — ikisi de çiftse EBOB ≥ 2