KONU ANLATIMLI SORU ÇÖZÜMLERİ

Aralarında Asal Sayılar

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge **CC BY-NC 4.0** lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabilir.

ÇÖZÜMLÜ SORU 1 — Aralarında asallığı üç farklı yoldan denetleme

24 ve 35 sayıları veriliyor.
a) Bu iki sayının aralarında asal olup olmadığını **bölenlerini listeleyerek** belirleyiniz.
b) Aynı sonucu **asal çarpanlara ayırarak** gösteriniz.
c) EBOB(24, 35) ve EKOK(24, 35) değerlerini bulunuz.
d) 24 ve 35'in ikisi de asal sayı mıdır? Sonucu nasıl yorumlamak gerekir?

1 a) Bölenleri listele

24'ün bölenleri: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

35'in bölenleri: 1, 5, 7, 35

İki listeyi karşılaştıralım: 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 sayılarının hiçbiri 35'in listesinde yok; 5, 7, 35 sayılarının hiçbiri 24'ün listesinde yok.

Ortak olan tek sayı **1**'dir → **aralarında asaldırlar** ✓

2 b) Asal çarpanlara ayır

$24 : 2 = 12 \rightarrow 12 : 2 = 6 \rightarrow 6 : 2 = 3 \rightarrow 3 : 3 = 1 \rightarrow$ **$24 = 2^3 \cdot 3$**

$35 : 5 = 7 \rightarrow 7 : 7 = 1 \rightarrow$ **$35 = 5 \cdot 7$**

24'ün asal çarpanları: **{2, 3}**

35'in asal çarpanları: **{5, 7}**

İki küme arasında **ortak eleman yok** → aralarında asaldırlar ✓

Bu yol, bölen listelemekten çok daha kısadır; büyük sayılarda tek uygulanabilir yöntem budur.

3 c) EBOB ve EKOK

Ortak asal çarpan bulunmadığına göre:

EBOB(24, 35) = 1

Aralarında asal sayıların EKOK'u çarpımlarına eşittir:

EKOK(24, 35) = 24 · 35 = 840

Altın bağıntıyla doğrulayalım:

$A \cdot B = 24 \cdot 35 = 840$

EBOB · EKOK = 1 · 840 = 840 ✓

4 d) Asal olmakla aralarında asal olmayı ayır

Hayır, ikisi de asal değildir.

$24 = 2^3 \cdot 3 \rightarrow$ bileşik sayı

$35 = 5 \cdot 7 \rightarrow$ bileşik sayı

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 1 **Aralarında asallığı üç farklı yoldan denetleme** (devam)

Buna rağmen aralarında asaldırlar. Çünkü "aralarında asal olmak" sayıların **kendi yapısıyla** değil, **ortak bölenlerinin olup olmamasıyla** ilgilidir.

Tersi de mümkündür: 3 ile 9 sayılarından **3 asaldır**, ama ortak bölenleri 3 olduğu için aralarında asal **değildirler**.

İki kavram birbirinden tamamen bağımsızdır.

Sonuç: a) Ortak bölen yalnızca 1 → aralarında asal b) {2, 3} ile {5, 7}, ortak asal yok c) EBOB = 1, EKOK = 840 d) İkisi de bileşiktir; asal olmakla aralarında asal olmak farklı şeylerdir.

Dikkat: Büyük sayılarda bölen listelemeye kalkma; asal çarpanlarına ayır ve iki kümede ortak eleman var mı diye bak.

ÇÖZÜMLÜ SORU 2 **Aralarında asallık koşulundan kesrin pay ve paydasını bulma**

x ile y aralarında asal pozitif tam sayılardır ve
x/y = 36/48'dir.
a) x ve y değerlerini bulunuz.
b) x + y ve y − x değerlerini hesaplayınız.
c) EKOK(x, y) kaçtır?
d) x = 36, y = 48 alınsaydı hangi koşul bozulurdu?

1 **a) Kesri en sade hâline getir**

"x ile y aralarında asaldır" koşulu, x/y kesrinin **en sade hâlde** olduğu anlamına gelir. O hâlde 36/48'i sadeleştirmeliyiz.

$36 = 2^2 \cdot 3^2$ ve $48 = 2^4 \cdot 3$

EBOB(36, 48) = $2^2 \cdot 3$ = **12**

Pay ve paydayı 12'ye bölelim:

36 : 12 = **3** ve 48 : 12 = **4**

x = 3 ve y = 4

Kontrol: 3 = 3 ve $4 = 2^2$ → ortak asal yok → aralarında asal ✓

2 **b) İstenen işlemleri yap**

x + y = 3 + 4 = **7**

y − x = 4 − 3 = **1**

Not: y − x = 1 çıkması, 3 ile 4'ün **ardışık** sayılar olduğunu gösteriyor. Ardışık sayılar zaten her zaman aralarında asaldır; bulduğumuz sonuç bu kuralla da tutarlı ✓

3 **c) EKOK'u bul**

x ile y aralarında asal olduğuna göre EKOK, çarpımlarına eşittir:

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 2 **Aralarında asallık koşulundan kesrin pay ve paydasını bulma**

(devam)

EKOK(3, 4) = 3 · 4 = **12**

Kontrol edelim: 3'ün katları 3, 6, 9, **12**, ... 4'ün katları 4, 8, **12**, ...

İlk ortak kat gerçekten 12 ✓

4 d) Koşulu bozan durum

x = 36 ve y = 48 alınsaydı x/y = 36/48 eşitliği **sağlanırdı**; ama:

EBOB(36, 48) = **12** ≠ 1

Yani 36 ile 48 **aralarında asal değildir** ve sorudaki koşul bozulurdu.

Aynı biçimde x = 6, y = 8 (EBOB = 2) ya da x = 9, y = 12 (EBOB = 3) da eşitliği sağlar ama koşulu sağlamaz.

"Aralarında asal" ifadesi, sonsuz çoklukta çözümü **tek** bir çifte indirir — bu yüzden soruda bulunur.

Sonuç: a) x = 3, y = 4 b) x + y = 7, y – x = 1 c) EKOK = 12 d) EBOB(36, 48) = 12 ≠ 1 olduğu için aralarında asallık koşulu bozulurdu.

Dikkat: "Aralarında asal" ifadesini görür görmez kesri sadeleştir; sadeleşmemiş hâl her zaman yanlış cevap verir.

ÇÖZÜMLÜ SORU 3 **Çarpımı verilen aralarında asal çiftleri bulup toplamı sınırlama**

x ile y aralarında asal pozitif tam sayılardır ve x · y = 90'dır. (x < y kabul ediniz.)
a) Koşulu sağlayan bütün (x, y) çiftlerini bulunuz.
b) x + y **en büyük** kaçtır?
c) x + y **en küçük** kaçtır?
d) Çift sayısını, 90'ın asal çarpan sayısından **hesaplayarak** doğrulayınız.

1 a) Bütün çarpan çiftlerini yaz ve ele

Önce 90'ın çarpan çiftleri (x < y):

1 · 90 · 2 · 45 · 3 · 30 · 5 · 18 · 6 · 15 · 9 · 10

Şimdi her çiftin EBOB'una bakalım:

- **1 ve 90** → EBOB = 1 ✓
- **2 ve 45** → 2 ile $3^2 \cdot 5$, ortak asal yok → EBOB = 1 ✓
- 3 ve 30 → ikisi de 3'ün katı → EBOB = 3 ×
- **5 ve 18** → 5 ile $2 \cdot 3^2$, ortak asal yok → EBOB = 1 ✓
- 6 ve 15 → ikisi de 3'ün katı → EBOB = 3 ×
- **9 ve 10** → 3^2 ile 2 · 5, ortak asal yok → EBOB = 1 ✓

Koşulu sağlayanlar: **(1, 90), (2, 45), (5, 18), (9, 10)** → **4 çift**

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 3 **Çarpımı verilen aralarında asal çiftleri bulup toplamı sınırlama**

(devam)

2 b) Toplamın en büyük değeri

Toplamlar: 1 + 90 = **91** · 2 + 45 = 47 · 5 + 18 = 23 · 9 + 10 = 19

x + y en büyük = **91** (x = 1, y = 90)

Beklenen sonuç: çarpanlar **birbirinden en uzak** olduğunda toplam en büyüktür ve 1 ile sayının kendisi her zaman aralarında asaldır.

3 c) Toplamın en küçük değeri

Aynı listeden en küçük toplam **19**'dur (x = 9, y = 10)

Dikkat edilecek nokta: 90'ın çarpan çiftleri arasında birbirine en yakın olanı zaten 9 ve 10'dur; bu çift aynı zamanda **ardışık** olduğu için otomatik olarak aralarında asaldır ✓

Her zaman böyle olmayabilir: en yakın çift aralarında asal değilse bir sonraki en yakın çifte geçilir.

4 d) Çift sayısını formülle doğrula

90'ı asal çarpanlarına ayıralım:

$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ → 3 farklı asal çarpanı var (2, 3, 5)

Aralarında asal bir çiftte her asal çarpan **bütünüyle** bir tarafa gitmelidir; bölünemez. Her asal için 2 seçenek (x'e ya da y'ye) vardır:

$2 \cdot 2 \cdot 2 =$ **8** dağıtım

x ile y'nin yerleri değiştirilince aynı çift tekrarlandığından:

8 : 2 = **4 çift** ✓

(a) şıkkında elle bulduğumuz sayıyla uyuşuyor. Genel kural: **n farklı asal çarpanı** olan bir sayı için aralarında asal çift sayısı **$2^n : 2$**'dir.

Sonuç: a) (1, 90), (2, 45), (5, 18), (9, 10) b) 91 c) 19 d) $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ → 3 farklı asal → $2^3 : 2 = 4$ çift ✓

Dikkat: Aralarında asal çiftlerde bir asalın kuvveti bölünemez: 90'daki 3^2 ya tamamen x'e ya tamamen y'ye gider.

ÇÖZÜMLÜ SORU 4

Eksik rakamlı sayının aralarında asal olma koşulunu sağlayan rakamları bulma

A bir rakam olmak üzere iki basamaklı **2A** sayısı ile **15** sayısı aralarında asaldır.
a) A yerine yazılabilecek rakamları bulunuz.
b) Bu rakamların toplamı kaçtır?
c) Koşulu sağlamayan sayıların 15 ile EBOB'larını yazınız.
d) 2A sayısı ile 15 aralarında asal olduğunda EKOK(2A, 15) nasıl bulunur? En büyük değerini hesaplayınız.

1 Koşulu asal çarpanlara çevir

15 = 3 · 5'tir. 2A sayısının 15 ile aralarında asal olması için 15'in asal çarpanlarından **hiçbirine** bölünmemesi gerekir:

- 2A **3'e bölünmemeli**
- 2A **5'e bölünmemeli**

Not: 2A'nın çift ya da tek olması önemli değildir; 15'te 2 çarpanı yoktur.

2 a) 20'den 29'a kadar dene

20 → 5'e bölünür ×
21 → 2 + 1 = 3, 3'e bölünür ×
22 → 3'e bölünmez (2+2=4), 5'e bölünmez ✓
23 → ✓
24 → 2 + 4 = 6, 3'e bölünür ×
25 → 5'e bölünür ×
26 → ✓
27 → 2 + 7 = 9, 3'e bölünür ×
28 → ✓
29 → ✓

Koşulu sağlayan sayılar: **22, 23, 26, 28, 29**
A yerine yazılabilecek rakamlar: **2, 3, 6, 8, 9** → **5 tane**

3 b) Rakamların toplamı

2 + 3 + 6 + 8 + 9 = **28**

4 c) Elenen sayıların EBOB'ları

20 = $2^2 \cdot 5$ → 15 ile ortak asal: 5 → EBOB(20, 15) = **5**
21 = $3 \cdot 7$ → ortak asal: 3 → EBOB(21, 15) = **3**
24 = $2^3 \cdot 3$ → ortak asal: 3 → EBOB(24, 15) = **3**
25 = 5^2 → ortak asal: 5 → EBOB(25, 15) = **5**
27 = 3^3 → ortak asal: 3 → EBOB(27, 15) = **3**

Hepsinde EBOB 1'den büyük çıkıyor ✓ Bu, elemenin doğru yapıldığını denetler.

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 4

Eksik rakamlı sayının aralarında asal olma koşulunu sağlayan rakamları bulma

(devam)

5 d) EKOK'un en büyük değeri

Aralarında asal sayıların EKOK'u **çarpımlarına** eşittir:

EKOK(2A, 15) = 2A · 15

Bu çarpımın en büyük olması için 2A en büyük seçilmelidir. Uygun sayıların en büyüğü **29**'dur:

EKOK(29, 15) = 29 · 15 = **435**

Kontrol: 29 asaldır, 15 = 3 · 5 → ortak asal yok ✓ EBOB = 1 ✓

Altın bağıntı: 29 · 15 = 1 · 435 ✓

Sonuç: a) A = 2, 3, 6, 8, 9 b) 28 c) EBOB'lar: 20→5, 21→3, 24→3, 25→5, 27→3 d) EKOK = 2A · 15; en büyüğü 29 · 15 = 435

Dikkat: Önce verilen sayıyı asal çarpanlarına ayır; koşul "şu asallara bölünmesin" biçimine dönüşünce deneme çok hızlanır.