8. SINIF MATEMATİK Tema 1 · Sayılar ve Nicelikler

KONU ANLATIMI · CEVAPLI

Aralarında Asal Sayılar

Kazanımlar: MAT.8.1.3. İki doğal sayının aralarında asal olup olmadığını belirleyebilme ve aralarında asal sayıları EBOB-EKOK ile ilişkilendirebilme

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge **CC BY-NC 4.0** lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabilir.

Aralarında Asal Sayılar Nedir?

İki pozitif tam sayının **1'den başka ortak böleni yoksa** bu sayılara **aralarında asal sayılar** denir.

Dikkat: Tanım **çift** hakkındadır, tek tek sayılar hakkında değil. "5 aralarında asaldır" denemez; "5 ile 18 aralarında asaldır" denir.

ÖRNEK **8 ile 15** sayılarını inceleyelim.

8'in pozitif tam sayı bölenleri: **1, 2, 4, 8**
15'in pozitif tam sayı bölenleri: **1, 3, 5, 15**

İki listede ortak olan tek sayı **1**'dir. Başka ortak bölenleri yoktur.
Demek ki **8 ile 15 aralarında asaldır** ✓

NOT **En sık karıştırılan nokta:** İki sayının aralarında asal olması için **sayıların asal olması gerekmez**.

Yukarıdaki örnekte 8 de 15 de **asal değildir** ($8 = 2^3$, $15 = 3 \cdot 5$). Buna rağmen aralarında asaldırlar; çünkü aranan şey sayıların kendi yapısı değil, **ortak** bir bölenlerinin bulunup bulunmadığıdır.

Tersi de olur: 3 ile 9 sayılarından **3 asaldır**, ama 3 ikisinin de ortak bölenidir → aralarında asal **değildirler**.

1 ile bütün doğal sayılar aralarında asaldır.

Çünkü 1'in tek böleni kendisidir; herhangi bir sayıyla ortak bölenleri yalnızca 1 olabilir.

Örnek: 1 ile 36, 1 ile 100, 1 ile 7 — hepsi aralarında asaldır.

Nasıl Anlarız? — Üç Kontrol Yolu

İki sayının aralarında asal olup olmadığını üç farklı yoldan anlayabilirsin:

1. yol — Bölenleri listele. İki sayının da bölenlerini yazıp 1 dışında ortak olan var mı diye bak. Küçük sayılarda hızlıdır, büyük sayılarda çok uzar.

2. yol — Asal çarpanlarına ayır. İki sayıyı da asal çarpanlarına ayır; **ortak bir asal çarpan** varsa aralarında asal değildirler. En güvenilir yöntem budur.

3. yol — EBOB'u hesapla. EBOB 1 çıkıyorsa aralarında asaldırlar. Bu aslında 2. yolun kısa yazılışıdır.

ÖRNEK **2. yolla iki örnek:**

24 ile 35: $24 = 2^3 \cdot 3$ ve $35 = 5 \cdot 7$
Asal çarpanlar {2, 3} ile {5, 7} — **ortak asal yok** → **aralarında asaldır** ✓

18 ile 21: $18 = 2 \cdot 3^2$ ve $21 = 3 \cdot 7$
Her ikisinde de **3** var → **aralarında asal değildir** ×
EBOB(18, 21) = 3'tür.



İki sayının aralarında asal olup olmadığına karar verme akış şeması. Sayılar asal çarpanlarına ayrılır; ortak bir asal çarpan yoksa sayılar aralarında asaldır ve EBOB'ları 1, EKOK'ları çarpımlarıdır. Ortak asal çarpan varsa aralarında asal değildirler.

12 ile aralarında asal olan sayılar (1–30)

1	2	3	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	**25**	26	27	28	**29**	30

1'den 30'a kadar olan sayılar tablosunda, 12 ile aralarında asal olan sayılar yuvarlak içine alınmıştır: 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29. Bunlar $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ sayısının asal çarpanları olan 2 ve 3'e bölünmeyen sayılardır.

Yukarıdaki tabloda **12 ile aralarında asal** olan sayılar yuvarlak içine alınmıştır. Aralarında seçilme ölçütü şudur:

$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ olduğuna göre 12'nin asal çarpanları **2 ve 3**'tür. Bir sayının 12 ile ortak böleni olmaması için o sayının **ne 2'ye ne 3'e** bölünmesi gerekir.

Yuvarlak içindekiler: **1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29** → hepsi tek ve hiçbiri 3'ün katı değil ✓

Dikkat: **25** asal bir sayı değildir ($25 = 5^2$) ama 12 ile aralarında asaldır. Yine görüyoruz ki asal olmakla aralarında asal olmak farklı şeylerdir.

NOT **Sık yapılan hata:** İki sayıyı asal çarpanlarına ayırıp **ortak olmayan** çarpanlara bakmak. Karar verdiren şey ortak **olan** bir asal çarpanın bulunup bulunmamasıdır.
$45 = 3^2 \cdot 5$ ve $28 = 2^2 \cdot 7$ → çarpanlar tamamen farklı → aralarında asal ✓
$45 = 3^2 \cdot 5$ ve $35 = 5 \cdot 7$ → **5 ortak** → aralarında asal değil × (ortak olmayan 3^2, 7 çarpanları kararı değiştirmez)

Aralarında Asal Sayılar İçin Özel Durumlar

1. Aralarında asal olan iki sayının **EBOB'u 1**'dir.
2. Aralarında asal olan iki sayının **EKOK'u, bu iki sayının çarpımına eşittir**.
3. **Ardışık** iki doğal sayı her zaman aralarında asaldır.
4. **Ardışık tek** doğal sayılar da her zaman aralarında asaldır.
5. **Ardışık çift** doğal sayılar aralarında asal **değildir**; ortak çarpanları en az 2'dir.

ÖRNEK **1 ve 2. durum:** 5 ile 18 aralarında asaldır (5 asal, $18 = 2 \cdot 3^2$; ortak asal yok).
EBOB(5, 18) = **1**
EKOK(5, 18) = 5 · 18 = **90**

3. durum: 17 ile 18 · 25 ile 26 · 2023 ile 2024 — hepsi aralarında asaldır.

4. durum: 21 ile 23 · 27 ile 29 — aralarında asaldır.
(21 = 3 · 7 ve 23 asal; ortak çarpanları yok ✓)

5. durum: 8 ile 10 → ikisi de çift, **2 ortak bölendir** → aralarında asal **değildir**.
EBOB(8, 10) = 2'dir.

2. durum neden doğrudur? Altın bağıntıyı hatırlayalım:
A · B = EBOB(A, B) · EKOK(A, B)

Aralarında asal sayılarda EBOB = 1 olduğuna göre:
A · B = 1 · EKOK → **EKOK = A · B**

Sezgisel açıklama: ortak asal çarpan yoksa, ikisinin katı olabilecek en küçük sayı **bütün** çarpanları içermek zorundadır — bu da çarpımın kendisidir.

Sayı Çifti	Asal Çarpanları	Ortak Asal	Aralarında Asal mı?	EBOB	EKOK
8 ve 15	$2^3 \cdot 3 \cdot 5$	Yok	**Evet**	1	120
4 ve 9	$2^2 \cdot 3^2$	Yok	**Evet**	1	36
16 ve 27	$2^4 \cdot 3^3$	Yok	**Evet**	1	432
9 ve 12	$3^2 \cdot 2^2 \cdot 3$	**3**	Hayır	3	36
18 ve 21	$2 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 7$	**3**	Hayır	3	126
55 ve 77	$5 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 11$	**11**	Hayır	11	385

NOT **Sık yapılan hata:** "Ardışık sayılar aralarında asaldır" kuralını **ardışık çift** sayılara da uygulamak. 8 ile 10 ardışık **çift** sayılardır ve aralarında asal **değildirler**.
Kural yalnızca **ardışık doğal sayılar** (17 ve 18 gibi) ve **ardışık tek** sayılar (21 ve 23 gibi) için geçerlidir.

Kesirlerle Bağlantı: En Sade Hâl

Bir kesrin **en sade hâlde** olması ile payının ve paydasının **aralarında asal** olması **aynı şeydir**.

- Kesir en sade hâldeyse pay ile payda aralarında asaldır.
- Pay ile payda aralarında asalsa kesir zaten en sade hâldedir.

Çünkü sadeleştirme, pay ile paydanın **ortak bölenlerine** bölmektir. Ortak bölen 1'den başka kalmadığında işlem biter.

ÖRNEK **x ile y aralarında asal sayılar olmak üzere x/y = 2/3'tür. x + y kaçtır?**

2 ile 3 aralarında asaldır, yani 2/3 **zaten en sade hâldedir**. O hâlde:
x = **2** ve y = **3**
x + y = 2 + 3 = **5**

Not: x = 4, y = 6 de x/y = 2/3 verir; ama 4 ile 6 aralarında asal **değildir** (ortak bölen 2). Sorudaki "aralarında asal" koşulu, cevabı **tek** bir çifte indiriyor.

ÖRNEK **x ile y aralarında asaldır ve x/y = 14/20'dir. y − x kaçtır?**

14/20 kesri en sade hâlde **değildir**; 14 ile 20'nin ortak böleni 2'dir. Sadeleştirelim:
14/20 = **7/10**

7 = 7 ve 10 = 2 · 5 → ortak asal yok → aralarında asal ✓
x = **7** ve y = **10**
y − x = 10 − 7 = **3**

NOT **Sık yapılan hata:** Kesri **sadeleştirmeden** x ve y'yi okumak. 14/20 için doğrudan x = 14, y = 20 demek yanlıştır; çünkü 14 ile 20 aralarında asal değildir ve soru bunu şart koşmuştur.
Kural: "aralarında asal" ifadesini gördüğün anda kesri **en sade hâline** getir.

x · y ve x + y Problemleri

Bu soru tipinde x · y çarpımı verilir, x ile y'nin **aralarında asal** olduğu söylenir ve x + y'nin **en büyük** ya da **en küçük** değeri istenir.

Çözüm üç adımdır:
1. Çarpımın bütün çarpan çiftlerini yaz.
2. Aralarında asal **olmayan** çiftleri ele.
3. Kalanlar arasında toplamı en büyük/en küçük olanı seç. Toplam, çarpanlar **birbirinden uzaklaştıkça büyür**, **yaklaştıkça küçülür**.

ÖRNEK **x ile y aralarında asaldır ve x · y = 40'tır. x + y en büyük kaçtır?**

1. 40'ın çarpan çiftleri: 1 · 40 · 2 · 20 · 4 · 10 · 5 · 8
2. Aralarında asal olanları seçelim:
• 1 ve 40 → EBOB = 1 ✓
• 2 ve 20 → ikisi de çift, EBOB = 2 ×
• 4 ve 10 → ikisi de çift, EBOB = 2 ×
• 5 ve 8 → 5 ile 2^3, ortak asal yok ✓
3. Toplamlar: 1 + 40 = **41** ve 5 + 8 = 13

x + y en büyük = **41**

ÖRNEK **x ile y aralarında asaldır ve x · y = 84'tür. x + y en küçük kaçtır?**

84 = 2^2 · 3 · 7'nin çarpan çiftleri: 1 · 84 · 2 · 42 · 3 · 28 · 4 · 21 · 6 · 14 · 7 · 12

Aralarında asal olanlar:
• 1 ve 84 ✓ | 2 ve 42 × (ikisi de çift) | **3 ve 28** ✓ | **4 ve 21** ✓
• 6 ve 14 × (ikisi de çift) | **7 ve 12** ✓

Toplamlar: 85 · 31 · 25 · **19**

x + y en küçük = **19** (7 ve 12)

Bir düzen fark ettin mi? Aralarında asal çiftlerde, her asal çarpan **bütünüyle** bir tarafa gider; bölünmez.

84 = 2^2 · 3 · 7'de üç farklı asal vardır: 2^2, 3 ve 7. Her birini x'e ya da y'ye vermek üzere 2 · 2 · 2 = **8** dağıtım vardır; x ile y'nin yerleri değiştirilince aynı çift tekrarlandığı için 8 : 2 = **4** farklı çift kalır ✓ Gerçekten de 4 çift bulduk.

Genel kural: **n farklı asal çarpanı** olan bir sayının aralarında asal çarpan çifti sayısı **2^n : 2**'dir.

Etkinlikler

ETKİNLİK 1 **Aşağıdaki ifadelerden doğru olanların yanına "D", yanlış olanların yanına "Y" yazınız.**

a) Y İki sayının aralarında asal olması için ikisinin de asal sayı olması gerekir.

b) D 1 ile bütün doğal sayılar aralarında asaldır.

c) D Aralarında asal iki sayının EBOB'u 1'dir.

d) D Aralarında asal iki sayının EKOK'u, bu sayıların çarpımına eşittir.

e) D Ardışık iki doğal sayı her zaman aralarında asaldır.

f) Y Ardışık iki çift doğal sayı her zaman aralarında asaldır.

g) D Ardışık iki tek doğal sayı her zaman aralarında asaldır.

h) D 8 ile 15 aralarında asaldır.

ı) Y 3 ile 9 aralarında asaldır.

i) D Bir kesir en sade hâldeyse payı ile paydası aralarında asaldır.

j) D Aralarında asal iki sayıdan en az biri tek sayıdır.

k) Y 25 ile 12 aralarında asal değildir, çünkü 25 asal bir sayı değildir.

ETKİNLİK 2 **Aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri doldurunuz.**

Sayı Çifti	Asal Çarpanları	Ortak Asal Çarpan	Aralarında Asal mı?	EBOB	EKOK
4 ve 9	2^2 ve 3^2	Yok	Evet	1	36
16 ve 27	2^4 ve 3^3	Yok	Evet	1	432
18 ve 25	$2 \cdot 3^2$ ve 5^2	Yok	Evet	1	450
8 ve 125	2^3 ve 5^3	Yok	Evet	1	1000
12 ve 20	$2^2 \cdot 3$ ve $2^2 \cdot 5$	2	Hayır	4	60
45 ve 35	$3^2 \cdot 5$ ve $5 \cdot 7$	5	Hayır	5	315
21 ile 22	$3 \cdot 7$ ve $2 \cdot 11$	Yok (ardışık)	Evet	1	462

ETKİNLİK 3 **Aşağıdaki sayı çiftlerinin aralarında asal olup olmadığını belirleyiniz. Aralarında asal değilse ortak asal çarpanını yazınız.**

a) 6 ile 7 **Aralarında ASAL ✓ (ardışık sayılar)**

b) 9 ile 12 **DEĞİL × → ortak asal çarpan 3 (EBOB = 3)**

c) 11 ile 15 **Aralarında ASAL ✓ (11 asal, 15 = 3 · 5; 11, 15'i bölmez)**

d) 22 ile 25 **Aralarında ASAL ✓ ($2 \cdot 11$ ile 5^2; ortak asal yok)**

e) 27 ile 28 **Aralarında ASAL ✓ (ardışık sayılar)**

f) 33 ile 35 **Aralarında ASAL ✓ ($3 \cdot 11$ ile $5 \cdot 7$; ardışık tek sayılar)**

g) 7 ile 63 **DEĞİL × → $63 = 3^2 \cdot 7$, ortak asal çarpan 7 (EBOB = 7)**

h) 55 ile 77 **DEĞİL × → $5 \cdot 11$ ile $7 \cdot 11$, ortak asal çarpan 11 (EBOB = 11)**

ı) 45 ile 46 **Aralarında ASAL ✓ (ardışık sayılar)**

i) 18 ile 24 **DEĞİL × → $2 \cdot 3^2$ ile $2^3 \cdot 3$, ortak asal çarpanlar 2 ve 3 (EBOB = 6)**

ETKİNLİK 4 **Aşağıdaki soruları çözünüz. x ile y her maddede aralarında asal pozitif tam sayılardır.**

a) $x/y = 3/5$ ise $x + y$ kaçtır? **3 ile 5 aralarında asaldır, kesir en sade hâldedir → x = 3, y = 5 → x + y = 8**

b) $x/y = 24/36$ ise $y - x$ kaçtır? **EBOB(24, 36) = 12 → 24/36 = 2/3 → x = 2, y = 3 → y – x = 1**

c) $x \cdot y = 36$ ise $x + y$ en büyük kaçtır? **Çiftler: 1·36 ✓, 2·18 ×, 3·12 ×, 4·9 ✓, 6·6 × → toplamlar 37 ve 13 → en büyük 37**

d) $x \cdot y = 36$ ise $x + y$ en küçük kaçtır? **Aralarında asal çiftler 1·36 ve 4·9 → toplamlar 37 ve 13 → en küçük 13**

e) $x \cdot y = 100$ ise koşulu sağlayan kaç farklı (x, y) çifti vardır? $(x < y)$ **$100 = 2^2 \cdot 5^2$ → 2 farklı asal → $2^2 : 2 = 2$ çift. Bunlar (1, 100) ve (4, 25)'tir.**

f) EKOK(x, y) = 143 ve $x < y$ ise $x + y$ kaçtır? **Aralarında asal oldukları için EKOK = $x \cdot y$ = 143 = $11 \cdot 13$. x = 11, y = 13 → x + y = 24 (1 ve 143 de olur → 144)**

g) İki basamaklı 3A sayısı ile 10 aralarında asal olduğuna göre A'nın alabileceği değerlerin toplamı kaçtır? **10 = $2 \cdot 5$ → sayı ne 2'ye ne 5'e bölünmeli, yani tek ve birler basamağı 5 olmamalı. 31, 33, 37, 39 ✓ (35 elenir) → A ∈ {1, 3, 7, 9} → toplam 20**

ETKİNLİK 5 **Aşağıdaki koşulları sağlayan sayıları bulunuz ve seçiminizi gerekçelendiriniz. Bazı maddelerde koşulu sağlayan sayı bulunmayabilir; öyleyse bunu gerekçesiyle yazınız.**

a) İkisi de bileşik (asal olmayan) ve aralarında asal olan iki sayı. **Örneğin 8 ve 9 → 2^3 ile 3^2, ortak asal yok → EBOB = 1 ✓ (4 ve 25, 9 ve 16, 27 ve 35 de olur)**

b) 20 ile aralarında asal olan, 20'den büyük ve iki basamaklı üç sayı. **$20 = 2^2 \cdot 5$ → sayı ne 2'ye ne 5'e bölünmeli. Örneğin 21, 23, 27 ✓ (29, 31, 33, 39 da olur)**

c) EBOB'u 1, EKOK'u 60 olan iki doğal sayı. **Aralarında asal oldukları için $x \cdot y$ = EKOK = 60. Aralarında asal çiftler: (1, 60), (3, 20), (4, 15), (5, 12) ✓ Örneğin 4 ve 15.**

d) İkisi de ÇİFT olan ve aralarında asal olan iki sayı. **YOKTUR. İkisi de çiftse 2 her ikisini de böler, yani 2 ortak bölendir → EBOB ≥ 2. Aralarında asal olmaları imkânsızdır.**

e) Kendisi ile 24 aralarında asal olan, 24'ten küçük EN BÜYÜK sayı. **$24 = 2^3 \cdot 3$ → sayı ne 2'ye ne 3'e bölünmeli. 23'ten geriye doğru: 23 tek ve 3'ün katı değil ✓ → cevap 23**

f) x ile y aralarında asal, $x \cdot y = 30$ ve $x + y = 11$ olan x ve y sayıları. **30'un aralarında asal çiftleri: (1, 30), (2, 15), (3, 10), (5, 6). Toplamları 31, 17, 13, 11 → x = 5, y = 6 ✓ (ardışık oldukları için zaten aralarında asaldırlar)**

Konu Özeti

ÖZET İki pozitif tam sayının **1'den başka ortak böleni yoksa** bu sayılar **aralarında asaldır**. Bunun için sayıların kendilerinin asal olması **gerekmez** (8 ile 15 gibi) ve asal olmaları da yetmez (3 ile 9 gibi). En güvenilir kontrol yolu ikisini de **asal çarpanlarına ayırıp ortak asal aramaktır**; ortak asal yoksa **EBOB = 1** ve **EKOK = iki sayının çarpımı**dır. **Ardışık** sayılar ve **ardışık tek** sayılar her zaman aralarında asaldır; **ardışık çift** sayılar ise asla değildir (2 her zaman ortaktır). Bir kesrin **en sade hâlde** olması ile pay ve paydasının aralarında asal olması aynı şeydir — "aralarında asal" ifadesini gördüğünde kesri mutlaka sadeleştir. Son olarak $x \cdot y$ verilip $x + y$ sorulan sorularda önce bütün çarpan çiftleri yazılır, aralarında asal olmayanlar elenir; toplam, çarpanlar **uzaklaştıkça büyür**, **yaklaştıkça küçülür**.