ÇÖZÜMLER

Tam Sayıların Tam Sayı Kuvvetleri

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge **CC BY-NC 4.0** lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabilir.

1. Bölüm Soru 1–5

1 Aşağıdaki üslü ifadeler iki kutuya ayrılacaktır: **"Değeri pozitif"** ve **"Değeri negatif"**.

I. $(-3)^4$ **II.** -3^4 **III.** $(-3)^5$ **IV.** $-(-3)^2$
V. $(-1)^{50}$ **VI.** -1^{50} **VII.** $(-2)^{-2}$ **VIII.** $(-2)^{-3}$

a) Her ifadenin değerini bulup kartları iki kutuya ayırınız.
b) Değeri tam sayı olmayan (kesir çıkan) ifadeler hangileridir? Bunun sebebi nedir?
c) I. ve II. ifadelerin sonuçları neden farklıdır? Açıklayınız.

- **a)** Her ifadeyi tek tek hesaplayalım:

  I. $(-3)^4$ → parantez var, üs çift → pozitif → **+81**

  II. -3^4 → parantez yok → $-(3^4)$ → **−81**

  III. $(-3)^5$ → parantez var, üs tek → negatif → **−243**

  IV. $-(-3)^2$ → önce $(-3)^2 = 9$, sonra dış eksi → **−9**

  V. $(-1)^{50}$ → parantez var, üs çift → **+1**

  VI. -1^{50} → parantez yok → $-(1^{50}) = -(1)$ → **−1**

  VII. $(-2)^{-2}$ → $1/(-2)^2 = 1/4$ → **+1/4**

  VIII. $(-2)^{-3}$ → $1/(-2)^3 = 1/(-8)$ → **−1/8**

  Değeri pozitif: I (+81) · V (+1) · VII (+1/4)

  Değeri negatif: II (−81) · III (−243) · IV (−9) · VI (−1) · VIII (−1/8)

- **b)** Kesir çıkan ifadeler: **VII (1/4)** ve **VIII (−1/8)**

  Sebebi: Bu iki ifadenin **üssü negatiftir**. Negatif üs, sayıyı $1/a^n$ biçimine, yani **kesre** çevirir.

  Dikkat edilecek nokta: Negatif üs sayıyı **kesir** yapar, **negatif** yapmaz. VII. ifadenin üssü negatif olduğu hâlde değeri pozitiftir (+1/4); çünkü işareti belirleyen taban ve üssün tekliğidir.

- **c) I.** $(-3)^4 = +81$ · **II.** $-3^4 = -81$

  Fark parantezden kaynaklanır:

  • **I.**'de eksi işareti **parantezin içinde**, yani tabanın bir parçası. Taban (−3) dört kez çarpılıyor; dört tane negatif sayının çarpımı (çift sayıda) **pozitif** olur.

devamı →

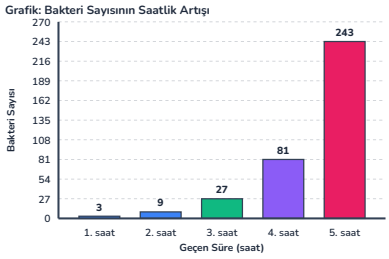
1 *(çözümün devamı)*

• **II.**'de parantez yok; üs yalnızca **3'e** ait. Önce $3^4 = 81$ hesaplanır, **sonra** başa eksi yazılır → −81.

Bu fark yalnızca **üs çift** olduğunda ortaya çıkar. Üs tek olsaydı (örneğin 5) iki ifade de aynı değeri verirdi: $(-3)^5 = -243$ ve $-3^5 = -243$ ✓

✓ Doğru Sonuç: a) Pozitif: I (+81), V (+1), VII (+1/4) — Negatif: II (−81), III (−243), IV (−9), VI (−1), VIII (−1/8) b) VII ve VIII, üsleri negatif olduğu için c) Parantez eksiyi tabana katıyor; üs çiftken fark oluşur

2 Bir laboratuvarda bir bakteri kültürü her saat **3 katına** çıkmaktadır. Başlangıçta kapta **1 bakteri** vardır. Şekildeki grafik ilk beş saatteki bakteri sayısını göstermektedir.



a) Grafikteki her değeri 3'ün bir kuvveti olarak yazınız.
b) 6. saatin sonunda kapta kaç bakteri bulunur?
c) Başlangıçtaki (0. saat) bakteri sayısı hangi üslü ifadeyle gösterilir? Bu, hangi kuralla açıklanır.
d) Bakteri sayısı ilk kez hangi saatte 2000'i geçer?

- **a)** Her saat sayı 3 katına çıktığına göre değerler 3'ün ardışık kuvvetleridir:

  1. saat: $3 = \mathbf{3^1}$

  2. saat: $9 = 3 \cdot 3 = \mathbf{3^2}$

  3. saat: $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = \mathbf{3^3}$

  4. saat: $81 = \mathbf{3^4}$

  5. saat: $243 = \mathbf{3^5}$

  Genel kural: n. saatin sonunda bakteri sayısı $\mathbf{3^n}$'dir.

- **b)** 6. saat için n = 6:

  $3^6 = 3^5 \cdot 3 = 243 \cdot 3 = \mathbf{729}$ **bakteri**

  Kontrol: $3^6 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 729$ ✓

- **c)** Başlangıçta 1 bakteri vardı ve henüz hiç saat geçmemişti, yani n = 0:

  $\mathbf{3^0 = 1}$ ✓

  Bu, "**sıfır hariç her tam sayının 0. kuvveti 1'dir**" kuralıyla açıklanır.

  Kural burada anlamlı bir karşılık buluyor: henüz hiç katlanma olmadığında başlangıç miktarı olduğu gibi durur. Üslü ifade modeli, 0. saati de doğru biçimde kapsar.

devamı →

2 *(çözümün devamı)*

- **d)** 3'ün kuvvetlerini 2000'i geçene kadar yazalım:

  $3^5 = 243 \cdot 3^6 = 729 \cdot \mathbf{3^7 = 2187}$

  $729 < 2000 < 2187$ olduğuna göre sayı ilk kez **7. saatte** 2000'i geçer.

  Dikkat: 6. saatte henüz 729 bakteri var; 2000'e ulaşmak için bir saat daha geçmesi gerekiyor. Üstel artışta sayılar birdenbire sıçradığı için ara değerleri tahmin etmek yanıltıcı olabilir.

✔ Doğru Sonuç: a) $3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5$ b) $3^6 = 729$ c) $3^0 = 1$ (sıfırıncı kuvvet kuralı) d) 7. saat ($3^7 = 2187$)

3 Aşağıdaki işlemleri yapınız.
a) $2^{-4} \cdot (-2)^{-4} \cdot -2^{-4}$ ifadelerinin değerlerini bulunuz.
b) $3^{-1} + 6^{-1}$ işleminin sonucunu bulunuz.
c) $2^{-1} - 2^{-2}$ işleminin sonucunu bulunuz.
d) (b) ve (c) şıklarındaki sonuçları karşılaştırınız.

Her adımı ayrı ayrı yazarak çözünüz.

- **a)** Üç ifadeyi ayrı ayrı inceleyelim:

  2^{-4}: Taban pozitif, negatif üs → $1/2^4$ = **1/16**

  $(-2)^{-4}$: Parantez var, üs çift → paydadaki kuvvet pozitif çıkar

  $= 1/(-2)^4 = 1/(+16) =$ **1/16**

  -2^{-4}: Parantez yok → üs yalnızca 2'ye ait, eksi dışarıda

  $= -(1/2^4) =$ **−1/16**

  İlk ikisi eşit çıktı (üs çift olduğu için), üçüncüsü ise **ters işaretli**.
- **b)** Önce her terimi kesre çevirelim:

  $3^{-1} =$ **1/3** $\cdot$ $6^{-1} =$ **1/6**

  Paydaları eşitleyelim; 3 ile 6'nın ortak katlarının en küçüğü **6**:

  $1/3 = 2/6$

  $2/6 + 1/6 =$ **3/6**

  Sadeleştirelim (ikisi de 3'e bölünür): = **1/2**
- **c)** Terimleri çevirelim:

devamı →

3 *(çözümün devamı)*

$2^{-1} = \mathbf{1/2}$ · $2^{-2} = \mathbf{1/4}$

Ortak payda **4**:

1/2 = 2/4

2/4 − 1/4 = **1/4**

Dikkat: Tabanlar aynı olsa da **üsleri çıkarmadık**. Üslerle ilgili kurallar toplama ve çıkarmada geçerli değildir; her terim önce sayıya çevrilir.

- **d)** (b) sonucu **1/2**, (c) sonucu **1/4**'tür.

  Paylar eşit (1), paydalardan küçük olan daha büyüktür: 2 < 4 → **1/2 > 1/4**

  Ondalık gösterimle: 0,5 > 0,25 ✓

  İlginç bir gözlem: (b) şıkkında **toplama** yaptık ve 1/2 bulduk; (c) şıkkında **çıkarma** yaptık ve 1/4 bulduk. İşlemlerin türü farklı olsa da her iki sonuç da 0 ile 1 arasında kaldı; çünkü negatif üslü ifadelerin hepsi 1'den küçük birer kesirdi.

✔ Doğru Sonuç: a) 1/16, 1/16, −1/16 b) 1/2 c) 1/4 d) 1/2 > 1/4

4 Bir sınıfta üç iddia ortaya atılmıştır:

I. Ela: "Üssü negatif olan bir ifadenin **değeri de negatiftir**."
II. Mert: "Negatif üs, sayıyı her zaman **1'den küçük** yapar."
III. Sude: "a sıfırdan farklı olmak üzere $\mathbf{a^{-n} = 1/a^n}$ eşitliği her zaman geçerlidir."

a) Ela'nın iddiası doğru mudur? Karşıt örnek veriniz ve negatif üssün asıl etkisini açıklayınız.
b) Mert'in iddiası doğru mudur? Karşıt örnek veriniz.
c) Sude'nin iddiası doğru mudur? "Sıfırdan farklı" koşulu neden gereklidir?

- **a) Ela haksızdır.**

  Karşıt örnek: $2^{-3} = 1/2^3 = \mathbf{1/8}$

  Üs negatif olduğu hâlde değer **pozitiftir** ×

  Başka karşıt örnekler: $5^{-1} = 1/5$ · $(-2)^{-2} = 1/4$ · $10^{-4} = 1/10\,000$

  Negatif üssün asıl etkisi: Sayıyı **ters çevirmek**, yani kesre dönüştürmektir. İşareti ise **taban** ve **üssün tekliği** belirler; üssün negatif olması işaretle ilgili hiçbir şey söylemez.

  Kontrol yöntemi: Üssün eksi işaretini geçici olarak sil, işarete karar ver, sonra sayıyı kesre çevir. 2^{-3} için → $2^3 = 8$ (pozitif) → 1/8 (pozitif) ✓

devamı →

4 *(çözümün devamı)*

- **b) Mert haksızdır.**

  Negatif üs tabanı ters çevirir; taban **1'den küçükse** sonuç **1'den büyük** çıkar.

  Karşıt örnek: $(1/2)^{-3} = (2/1)^3 = 2^3 = \mathbf{8}$

  $8 > 1$ × İddia bozuldu.

  Başka karşıt örnekler:

  $(2/3)^{-2} = (3/2)^2 = 9/4 = 2{,}25 > 1$ ✓

  $(1/5)^{-2} = 25 > 1$ ✓

  Doğrusu: Negatif üs, 1'den **büyük** bir tabanı 1'den küçük bir sayıya; 1'den **küçük** bir tabanı ise 1'den büyük bir sayıya çevirir. Yani etkisi tabanın büyüklüğüne bağlıdır.

- **c) Sude haklıdır**; eşitlik negatif üssün **tanımıdır**.

  Örnek: $7^{-2} = 1/7^2 = 1/49$ ✓ · $(-3)^{-3} = 1/(-3)^3 = -1/27$ ✓

  "Sıfırdan farklı" koşulu neden gerekli:

  $a = 0$ olsaydı:

  $0^{-1} = 1/0^1 = \mathbf{1/0}$

  Paydası sıfır olan bir kesir **tanımsızdır**; bölme işleminde bölen asla sıfır olamaz. Bu yüzden **sıfırın negatif tam sayı kuvvetleri tanımsızdır**.

  Not: Sıfırın **pozitif** kuvvetleri tanımlıdır ve hepsi sıfırdır: $0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$ ✓ Sorun yalnızca üs negatif olduğunda ortaya çıkar.

✓ Doğru Sonuç: a) Yanlış; $2^{-3} = 1/8$ pozitif. Negatif üs kesre çevirir, işareti değiştirmez b) Yanlış; $(1/2)^{-3} = 8$ c) Doğru; $a = 0$ olsa 1/0 tanımsız olurdu

5 Bir öğrenci defterine şunu yazmıştır:

"-3^2 işleminde eksi ile eksi birbirini götürür, sonuç +9 olur."

a) Öğrencinin hatası nedir? Açıklayınız.
b) -3^2 ifadesinin doğru değerini bulunuz.
c) Öğrencinin bulduğu +9 değeri aslında hangi ifadenin sonucudur?
d) Üs 3 olsaydı, yani -3^3 ile $(-3)^3$ karşılaştırılsaydı sonuçlar farklı olur muydu? Gerekçelendiriniz.

- **a)** Öğrenci iki ayrı hata yapmıştır:

  1. İfadede **tek bir eksi** vardır; "eksi ile eksi birbirini götürür" diyebilmek için iki eksi gerekirdi. Burada götürülecek ikinci bir eksi yok.

  2. Asıl hata **parantezi göz ardı etmesidir**. -3^2 ifadesinde parantez **yoktur**; bu yüzden üs yalnızca **3'e** aittir, eksi işareti kuvvete **girmez**.

  Doğru okunuş: "3'ün karesinin negatifi", yani $-(3^2)$.

- **b)** Adım adım:

  $-3^2 = -(3^2) = -(3 \cdot 3) = \mathbf{-9}$

  Sonuç **negatiftir**. Parantezsiz yazılan $-a^n$ biçimindeki ifadelerin değeri **her zaman negatiftir** (a pozitifken).

- **c)** +9 değeri, eksinin **parantez içinde** olduğu ifadeye aittir:

  $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = +9$ ✓

  Burada eksi tabanın bir parçasıdır; iki negatif sayının çarpımı pozitif olur.

  Yani öğrenci aslında **$(-3)^2$** sorusunu çözmüş; verilen soruysa **-3^2** idi. İki ifade arasındaki tek fark parantez ve sonuçları **ters işaretli**.

- **d) Hayır, farklı olmazdı; ikisi de aynı çıkardı.**

  $-3^3 = -(3^3) = -(27) = \mathbf{-27}$

  $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = (+9) \cdot (-3) = \mathbf{-27}$

  Gerekçe: Üs **tek** olduğunda, parantezli yazılışta tek sayıda negatif çarpan bulunur ve sonuç zaten negatif çıkar. Parantezsiz yazılışta da sonuç negatiftir. İki yol aynı işarete ulaşır.

  Genel kural: Parantezin olup olmaması yalnızca **üs çift** olduğunda fark yaratır. Bu yüzden öğrencinin hatası -3^2 ifadesinde ortaya çıkmış, -3^3 ifadesinde çıkmayacaktı.

✓ Doğru Sonuç: a) Parantez yok, üs yalnız 3'e ait b) −9 c) $(-3)^2$ ifadesinin sonucu d) Hayır; üs tekken iki yazılış da −27 verir

2. Bölüm Soru 6–10

6 Aşağıdaki eşitliklerde a, b ve c birer tam sayıdır.

$5^a = 1/125 \quad b^{-2} = 1/36 \quad (1/2)^c = 32$

(b sayısı pozitiftir.)

a) a değerini bulunuz.
b) b değerini bulunuz.
c) c değerini bulunuz.
d) a + b + c toplamını hesaplayınız ve her sonucu yerine koyarak kontrol ediniz.

- **a)** Sağ tarafı 5'in bir kuvveti olarak yazalım:

  $125 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = \mathbf{5^3}$

  $1/125 = 1/5^3 = \mathbf{5^{-3}}$

  Eşitlik: $5^a = 5^{-3}$

  Tabanlar eşit olduğuna göre üsler de eşittir:

  a = −3

- **b)** Burada bilinmeyen **tabandır**.

  $b^{-2} = 1/b^2$ olduğuna göre:

  $1/b^2 = 1/36 \rightarrow \mathbf{b^2 = 36}$

  b pozitif olduğu söylendiğine göre:

  b = 6

  Kontrol: $6^{-2} = 1/6^2 = 1/36$ ✓

  Not: $b^2 = 36$ eşitliğini b = −6 da sağlar ve $(-6)^{-2} = 1/(-6)^2 = 1/36$ olur. Soru "b pozitiftir" dediği için tek cevap 6'dır.

- **c)** Taban 1/5 değil **1/2**, sonuç ise 32 gibi **büyük** bir sayı.

  1/2 sayısı 1'den küçüktür; kuvveti 32 olabilmesi için üssün **negatif** olması gerekir (negatif üs kesri ters çevirir).

  $32 = 2^5$ olduğuna göre:

  $(1/2)^{-5} = (2/1)^5 = 2^5 = \mathbf{32}$ ✓

  c = −5

- **d)** a + b + c = (−3) + 6 + (−5)

  = (+3) + (−5) = **−2**

devamı →

6 *(çözümün devamı)*

Kontroller:

- $5^{-3} = 1/5^3 = 1/125$ ✓
- $6^{-2} = 1/6^2 = 1/36$ ✓
- $(1/2)^{-5} = (2/1)^5 = 32$ ✓

Üç eşitlik de sağlanıyor.

Yöntem özeti: Sonuç **kesirliyse** üs negatiftir; sonuç tabandan **büyükse ve taban 1'den küçükse** yine üs negatiftir. Bilinmeyen tabansa önce üssü pozitife çevirip taban karesine ya da küpüne bak.

✓ Doğru Sonuç: a) a = −3 b) b = 6 c) c = −5 d) a + b + c = −2

7 Bilgisayarlarda hafıza birimleri **2'nin kuvvetleri** kullanılarak tanımlanır. Aşağıdaki tabloda bazı birimlerin bayt (B) cinsinden karşılıkları verilmiştir.

Birim	Bayt Cinsinden
1 KB	2^{10} B
1 MB	2^{20} B
1 GB	2^{30} B

$2^{10} = 1024$ olduğu bilinmektedir.

a) 1 KB kaç bayttır? Sayı olarak yazınız.
b) 2^{20} ifadesi $2^{10} \cdot 2^{10}$ biçiminde yazılabilir. Buna göre 1 MB kaç KB'tır?
c) Bir baytın KB cinsinden değeri negatif üslü bir ifadeyle nasıl yazılır?
d) 2^{-10} ifadesinin değerini kesir olarak yazınız ve ne anlama geldiğini açıklayınız.

- **a)** Tabloya göre 1 KB = 2^{10} B'tır ve soruda $2^{10} = 1024$ verilmiştir.

  1 KB = 1024 bayt

  Not: Günlük dilde "kilo" 1000 anlamına gelir, ama bilgisayarda 2'nin kuvvetleri kullanıldığı için 1 KB tam olarak 1000 değil **1024** bayttır.

- **b)** $2^{20} = 2^{10} \cdot 2^{10}$ yazılışını kullanalım (20 tane 2'yi, 10'arlı iki gruba ayırmak demektir):

  1 MB = 2^{20} B = $2^{10} \cdot 2^{10}$ B

devamı →

7 *(çözümün devamı)*

1 KB = 2^{10} B olduğuna göre $2^{10} \cdot 2^{10}$ B, **2^{10} tane** 1 KB eder.

1 MB = 2^{10} KB = 1024 KB

Aynı mantıkla 1 GB = 2^{30} B = $2^{10} \cdot 2^{20}$ B = **1024 MB**'tır.

- **c)** 1 KB = 2^{10} B olduğuna göre, 1 bayt bunun 2^{10}'da biridir:

  1 B = $1/2^{10}$ KB

  Negatif üslü biçimde:

  1 B = 2^{-10} KB

  Bu, negatif üssün ne işe yaradığının güzel bir örneğidir: "çok büyük" yerine "çok küçük" nicelikleri de aynı tabanla, kısa biçimde yazmayı sağlar.

- **d)** $2^{-10} = 1/2^{10}$ = **1/1024**

  Anlamı: Bir bayt, bir kilobaytın **1024'te biridir**. Yani 1024 bayt yan yana geldiğinde tam olarak 1 KB eder.

  Ondalık gösterimle: 1/1024 ≈ 0,000977 — yaklaşık binde bir.

  Dikkat: 2^{-10} sayısı **negatif değildir**; çok küçük ama pozitif bir kesirdir. Negatif üs, sayıyı 1'in altına indirmiştir çünkü taban (2) 1'den büyüktür.

✔ Doğru Sonuç: a) 1024 bayt b) 1 MB = 2^{10} KB = 1024 KB c) 1 B = 2^{-10} KB d) 1/1024; bir bayt, bir KB'ın 1024'te biridir

8 **Soru:** $2^{-2} + 2^{-1}$ işleminin sonucunu bulunuz.

Bir öğrenci şöyle çözmüştür:
"Tabanlar aynı olduğu için üsler toplanır:
$2^{-2} + 2^{-1} = 2^{(-2)+(-1)} = 2^{-3} = 1/8$"

a) Öğrencinin hatası nedir?
b) Doğru sonucu bulunuz.
c) Öğrencinin cevabı ile doğru cevabı ondalık gösterimle karşılaştırınız.
d) "Üsler toplanır" kuralı hangi işlemde geçerlidir? Bir örnekle gösteriniz.

- **a)** Öğrenci, **aynı tabanlı çarpma** işlemine ait olan "üsler toplanır" kuralını, **toplama** işlemine uygulamıştır.

  Toplama işleminde üslerle ilgili **hiçbir kural yoktur**. Tabanların aynı olması da bir şey değiştirmez.

devamı →

8 *(çözümün devamı)*

Sezgisel kontrol: 2^{-2} ile 2^{-1} iki ayrı **sayıdır** (1/4 ve 1/2). İki sayıyı toplamak, üslerini toplamakla ilgili değildir; nasıl ki 4 + 8 işleminde $4 = 2^2$ ve $8 = 2^3$ olduğu için sonuç $2^5 = 32$ olmuyorsa (doğrusu 12'dir).

- **b)** Her terimi ayrı ayrı sayıya çevirelim:

  $2^{-2} = 1/2^2 =$ **1/4**

  $2^{-1} = 1/2^1 =$ **1/2**

  Ortak payda **4**:

  1/2 = 2/4

  1/4 + 2/4 = **3/4**

  Doğru sonuç: 3/4

- **c)** Ondalık gösterimle karşılaştıralım:

  Öğrencinin cevabı: 1/8 = **0,125**

  Doğru cevap: 3/4 = **0,75**

  0,75, 0,125'in **6 katıdır** — arada çok büyük bir fark var.

  Hızlı bir mantık kontrolü de hatayı yakalardı: toplanan sayılardan biri zaten 1/2 = 0,5'tir. İki pozitif sayının toplamı, toplananların her birinden **büyük** olmalıdır. Oysa öğrencinin bulduğu 0,125, toplananlardan küçük ×

- **d)** "Üsler toplanır" kuralı **aynı tabanlı üslü ifadelerin ÇARPIMINDA** geçerlidir:

  $\mathbf{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$

  Örnek: $2^3 \cdot 2^2 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$ **$2^5 = 32$** ✓

  Gerçekten: 8 · 4 = 32 ✓

  Toplamada denenirse: $2^3 + 2^2 = 8 + 4 = 12$, ama $2^5 = 32$ × Kural çalışmaz.

  Kısaca: **çarpmada** üsler toplanır, **toplamada** her terim ayrı ayrı hesaplanır.

✓ Doğru Sonuç: a) Çarpma kuralını toplamaya uygulamış b) 3/4 c) 0,125 yerine 0,75 (6 katı fark) d) Aynı tabanlı çarpmada: $2^3 \cdot 2^2 = 2^5$

9 Aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulunuz.
a) $(2/3)^{-3}$
b) $(-3/4)^{-2}$
c) $(-1/5)^{-3}$
d) Bu üç sonuçtan hangisi **negatiftir?** İşareti neyin belirlediğini açıklayınız.

Her adımı ayrı ayrı yazarak çözünüz.

- **a)** Kesirli tabanda negatif üs → pay ile payda **yer değiştirir**, üs pozitife döner:

  $(2/3)^{-3} = (3/2)^3$

  Üs, payı da paydayı da etkiler:

  $= 3^3/2^3 =$ **27/8**

  Kontrol: 27/8 = 3,375 → 1'den büyük. Taban 2/3 (1'den küçük) olduğu için negatif üste sonucun 1'i geçmesi beklenir ✓

- **b)** Taban negatif ve kesirli. Yine pay ile payda yer değiştirir; **işaret de birlikte taşınır**:

  $(-3/4)^{-2} = (-4/3)^2$

  Üs **çift** olduğundan sonuç pozitif:

  $= (-4)^2/3^2 =$ **16/9**

  Kontrol: 16/9 ≈ 1,78 → pozitif ve 1'den büyük ✓

- **c)** Aynı biçimde:

  $(-1/5)^{-3} = (-5/1)^3 = (-5)^3$

  Üs **tek** olduğundan sonuç negatif:

  $= (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) =$ **−125**

  Kontrol: Üç negatif çarpanın çarpımı negatiftir ✓

- **d)** Üç sonuç: 27/8, 16/9 ve **−125**

  Negatif olan yalnızca (c) şıkkıdır.

  İşareti belirleyen iki şey:

  1. Tabanın işareti: (a) şıkkında taban pozitifti (2/3) → sonuç kesin pozitif.

  2. Üssün tekliği: (b) ve (c) şıklarında taban negatifti. (b)'de üs **çift** (2) → pozitif; (c)'de üs **tek** (3) → negatif.

  Üssün negatif olması işareti etkilemez; yalnızca kesri ters çevirir. Üç şıkta da üs negatifti, buna rağmen sonuçlardan ikisi pozitif çıktı.

devamı →

9 *(çözümün devamı)*

Pratik yöntem: Önce üssün eksi işaretini görmezden gelip işarete karar ver, sonra tabanı ters çevirip hesapla.

✔ Doğru Sonuç: a) 27/8 b) 16/9 c) −125 d) Yalnızca (c); tabanın işareti ve üssün tekliği belirler, üssün negatifliği değil

10 Aşağıdaki üslü ifadeler değerlerine göre dört gruba ayrılacaktır: **"Değeri 1"**, **"Değeri −1"**, **"Değeri kesir"** ve **"Değeri tam sayı (1 ve −1 dışında)"**.

I. $(-1)^{100}$ **II.** -1^{100} **III.** 5^0 **IV.** -5^0
V. 3^{-2} **VI.** $(-2)^5$ **VII.** $(1/3)^{-2}$ **VIII.** $(-4)^{-2}$

a) Her ifadenin değerini bulup dört gruba ayırınız.
b) I. ile II., III. ile IV. ifadeleri neden farklı değerler veriyor? Ortak açıklamayı yazınız.
c) VII. ifadenin değeri neden tam sayı çıktı? Tabanı kesir olmasına rağmen bu nasıl mümkün?

- **a)** Değerleri bulalım:

  I. $(-1)^{100}$ → parantez var, üs çift → **1**

  II. -1^{100} → parantez yok → $-(1^{100}) = -(1)$ → **−1**

  III. 5^0 → sıfırıncı kuvvet → **1**

  IV. -5^0 → parantez yok → $-(5^0) = -(1)$ → **−1**

  V. 3^{-2} → $1/3^2$ → **1/9**

  VI. $(-2)^5$ → üs tek → **−32**

  VII. $(1/3)^{-2}$ → $(3/1)^2 = 3^2$ → **9**

  VIII. $(-4)^{-2}$ → $1/(-4)^2 = 1/16$ → **1/16**

  Değeri 1: I · III

  Değeri −1: II · IV

  Değeri kesir: V (1/9) · VIII (1/16)

  Değeri tam sayı (1 ve −1 dışında): VI (−32) · VII (9)

- **b)** Her iki çiftte de fark **parantezden** kaynaklanır.

  I. ile II.: $(-1)^{100}$'de eksi tabanın parçası; 100 tane negatif sayının çarpımı (çift sayıda) pozitif olur → 1. -1^{100}'de ise üs yalnızca 1'e ait; önce $1^{100} = 1$ hesaplanır, sonra başa eksi yazılır → −1.

devamı →

10 *(çözümün devamı)*

III. ile IV.: Aynı mantık. $(-5)^0$ olsaydı 1 çıkardı; ama -5^0'da parantez yok, önce $5^0 = 1$ hesaplanıp başa eksi yazılıyor → −1.

Ortak açıklama: Parantez yoksa üs **yalnızca sayıya** aittir; eksi işareti kuvvet alındıktan **sonra** uygulanır. Bu yüzden parantezsiz yazılışların değeri her zaman negatif çıkar.

- **c) VII.** $(1/3)^{-2}$ ifadesinde **üs negatiftir**. Negatif üs, kesrin **payı ile paydasını yer değiştirir**:

  $(1/3)^{-2} = (3/1)^2 = 3^2 = \mathbf{9}$

  Yani taban kesir olsa bile, ters çevrildiğinde **tam sayı** hâline gelebilir. 1/3'ün tersi 3'tür ve 3 bir tam sayıdır.

  Genel kural: Payı 1 olan bir kesrin negatif kuvveti her zaman tam sayı verir:

  $(1/a)^{-n} = a^n$

  Örnekler: $(1/2)^{-3} = 8$ · $(1/5)^{-2} = 25$ · $(1/10)^{-4} = 10\,000$

✓ Doğru Sonuç: a) 1: I, III — −1: II, IV — Kesir: V (1/9), VIII (1/16) — Tam sayı: VI (−32), VII (9) b) Parantez yoksa eksi kuvvete girmez c) Negatif üs kesri ters çevirip tam sayı yapar

3. Bölüm Soru 11–15

11 a pozitif bir tam sayı ve n bir doğal sayı olmak üzere üç iddia ortaya atılmıştır:

I. "n **tek** olduğunda $(-a)^n = -a^n$'dir."
II. "n **çift** olduğunda $(-a)^n = a^n$'dir."
III. "Her üslü ifadenin değeri, **tabanından büyüktür**."

a) I. iddia doğru mudur? Bir örnekle gösterip gerekçelendiriniz.
b) II. iddia doğru mudur? Bir örnekle gösterip gerekçelendiriniz.
c) III. iddia doğru mudur? Doğru değilse üç farklı karşıt örnek veriniz.

- **a) I. iddia DOĞRUDUR.**

  Örnek: a = 2, n = 5

  $(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = \mathbf{-32}$

  $-2^5 = -(32) = \mathbf{-32}$

  Eşit ✓

devamı →

11 *(çözümün devamı)*

Gerekçe: $(-a)^n$ açılımında **n tane** negatif çarpan vardır. n tek olduğunda negatif çarpanların sayısı tektir ve çarpım **negatif** çıkar. Sayısal büyüklük a^n, işaret ise eksi olduğuna göre sonuç tam olarak $-a^n$'dir.

Bir örnek daha: $(-3)^3 = -27$ ve $-3^3 = -27$ ✓

- **b) II. iddia DOĞRUDUR.**

  Örnek: a = 2, n = 4

  $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) =$ **+16**

  $2^4 =$ **16**

  Eşit ✓

  Gerekçe: n çift olduğunda negatif çarpanlar **ikişer ikişer** eşleşir; her çift pozitif bir sonuç verir. Geriye hiç eksi kalmaz ve çarpım a^n'ye eşit olur.

  Bir örnek daha: $(-5)^2 = 25$ ve $5^2 = 25$ ✓

  Not: Bu iki iddia birlikte, konunun temel kuralını oluşturur: parantezli negatif tabanda **üs tekse negatif, çiftse pozitif**.

- **c) III. iddia YANLIŞTIR.** Üslü ifadenin değeri tabandan küçük de olabilir, eşit de.

  1. karşıt örnek — negatif üs:

  $2^{-1} = 1/2 = 0{,}5$

  $0{,}5 < 2$ → değer tabandan **küçük** ×

  2. karşıt örnek — sıfırıncı kuvvet:

  $5^0 = 1$

  $1 < 5$ → değer tabandan **küçük** ×

  3. karşıt örnek — birinci kuvvet:

  $7^1 = 7$

  $7 = 7$ → değer tabana **eşit**, büyük değil ×

  Dördüncü bir örnek: 1'den küçük taban → $(1/2)^2 = 1/4 < 1/2$ ×

  Düzeltilmiş iddia:

  "Tabanı **1'den büyük** bir tam sayı ve üssü **1'den büyük** bir doğal sayı olan üslü ifadelerin değeri tabanından büyüktür."

devamı →

11 *(çözümün devamı)*

Bu hâliyle doğrudur: $2^2 = 4 > 2$ ✓ · $3^4 = 81 > 3$ ✓ · $10^3 = 1000 > 10$ ✓

✓ Doğru Sonuç: a) I doğru (tek sayıda negatif çarpan) b) II doğru (çarpanlar ikişer eşleşir) c) III yanlış; $2^{-1} = 0{,}5 \cdot 5^0 = 1 \cdot 7^1 = 7$

12 Aşağıdaki üslü ifadeler veriliyor:

$$\mathbf{a = 2^{-3} \cdot b = (-2)^{-2} \cdot c = 3^{-2} \cdot d = (1/2)^{-2} \cdot e = -2^{-2}}$$

a) Beş ifadenin de değerini bulunuz.
b) Değerleri küçükten büyüğe sıralayınız.
c) Mutlak değerlerini küçükten büyüğe sıralayınız.
d) Mutlak değeri birbirine eşit olan iki ifade var mıdır? Varsa bunların ilişkisini açıklayınız.

- **a)** Tek tek hesaplayalım:

  a = 2^{-3} = $1/2^3$ = **1/8** = 0,125

  b = $(-2)^{-2}$ = $1/(-2)^2$ = 1/4 = **1/4** = 0,25 (üs çift → payda pozitif)

  c = 3^{-2} = $1/3^2$ = **1/9** ≈ 0,111

  d = $(1/2)^{-2}$ = $(2/1)^2 = 2^2$ = **4**

  e = -2^{-2} = $-(1/2^2)$ = **−1/4** = −0,25 (parantez yok → eksi dışarıda)

- **b)** Ondalık değerlerle sıralayalım:

  e = −0,25 · c ≈ 0,111 · a = 0,125 · b = 0,25 · d = 4

  Önce işarete bakalım: yalnızca **e negatiftir**, o hâlde en küçüktür.

  Kalanlar arasında: 0,111 < 0,125 < 0,25 < 4

  e < c < a < b < d

  Kesirlerle kontrol: 1/9 ile 1/8 → paylar eşit, paydası büyük olan küçük → 1/9 < 1/8 ✓

- **c)** Mutlak değerleri alalım:

  |a| = 1/8 = 0,125 · |b| = 1/4 = 0,25 · |c| = 1/9 ≈ 0,111 · |d| = 4 · **|e| = 1/4 = 0,25**

  Küçükten büyüğe:

  0,111 < 0,125 < 0,25 = 0,25 < 4

  |c| < |a| < |b| = |e| < |d|

devamı →

12 *(çözümün devamı)*

Dikkat: Sayı sıralamasında **e en küçüktü**; mutlak değer sıralamasında ise **ortalarda**. Mutlak değer işareti sildiği için sıralama değişti.

- **d) Evet: b ve e.**

  $|b| = |(-2)^{-2}| = 1/4$ ve $|e| = |-2^{-2}| = 1/4$

  İlişkileri: b = **+1/4** ve e = **−1/4** → birbirinin **tersidir** (toplamları sıfırdır).

  Neden böyle oldu: İki ifadede de taban 2, üs −2'dir. Tek fark **parantez**:

  • b'de eksi parantez içinde → üs çift olduğu için işaret pozitife döndü

  • e'de eksi parantez dışında → kuvvet hesaplandıktan sonra uygulandı, işaret negatif kaldı

  Yine aynı ders: parantezin yeri, sonucun işaretini tersine çevirebilir.

✓ Doğru Sonuç: a) 1/8, 1/4, 1/9, 4, −1/4 b) e < c < a < b < d c) |c| < |a| < |b| = |e| < |d| d) b ve e; birbirinin tersi (+1/4 ve −1/4)

13 Uzunluğu **300 cm** olan bir çubuk, santimetre cinsinden uzunlukları **3'ün pozitif tam sayı kuvvetlerine** eşit olan **üç parçaya** ayrılacaktır. Parçaların uzunlukları birbirine eşit olabilir. Kesim sonunda çubuktan bir parça artmaktadır.

a) 3'ün 300'den küçük olan pozitif tam sayı kuvvetlerini yazınız.
b) Artan parçanın uzunluğunun en az olması için hangi üç parça seçilmelidir?
c) Bu durumda artan parça kaç santimetredir?
d) Üç parçanın uzunlukları birbirinden farklı olmak zorunda olsaydı artan parça en az kaç santimetre olurdu?

- **a)** 3'ün kuvvetlerini sırayla yazalım:

  $3^1 = \mathbf{3} \cdot 3^2 = \mathbf{9} \cdot 3^3 = \mathbf{27} \cdot 3^4 = \mathbf{81} \cdot 3^5 = \mathbf{243}$

  $3^6 = 729 > 300$ olduğu için listeye girmez.

  Kullanılabilecek uzunluklar: **3, 9, 27, 81, 243**

- **b)** Artan parçanın en az olması, seçilen üç parçanın toplamının **300'e en yakın** (ama onu geçmeyen) olması demektir.

  En büyük parçayla başlayalım: **243**. Geriye 300 − 243 = **57 cm** kalır.

  57'yi geçmeyecek iki kuvvet seçmeliyiz. 81 > 57 olduğundan en büyük seçenek **27**'dir:

  27 + 27 = 54 ≤ 57 ✓ (parçalar eşit olabilir)

devamı →

13 *(çözümün devamı)*

27 + 9 = 36 · 27 + 3 = 30 → daha küçük

243 kullanılmasaydı en fazla 81 + 81 + 81 = 243 olurdu; bu da 297'den küçüktür.

Seçilecek parçalar: 243, 27 ve 27 (yani 3^5, 3^3 ve 3^3)

Toplam: 243 + 27 + 27 = **297 cm**

- **c)** Artan parça = 300 − 297 = **3 cm**

  Not: Artan 3 cm de aslında 3'ün bir kuvvetidir (3^1); ama soru **üç** parça istediği için dördüncü olarak sayılmaz.

- **d)** Parçalar farklı olmak zorunda olsaydı 27'yi iki kez kullanamazdık.

  243 ile başlayalım; kalan 57 için **farklı** iki kuvvet:

  27 + 9 = **36** ✓ (en büyük seçenek; 27 + 81 = 108 > 57)

  27 + 3 = 30 · 9 + 3 = 12 → daha küçük

  Toplam: 243 + 27 + 9 = **279 cm**

  243 kullanılmasaydı: 81 + 27 + 9 = 117 → çok daha küçük.

  Artan parça = 300 − 279 = **21 cm**

  Karşılaştırma: Tekrara izin verildiğinde artan 3 cm, izin verilmediğinde 21 cm. Tek bir koşul cümlesi sonucu **yedi katına** çıkardı.

✓ Doğru Sonuç: a) 3, 9, 27, 81, 243 b) 243 + 27 + 27 c) 3 cm d) 243 + 27 + 9 = 279 → 21 cm

14 n bir tam sayı olmak üzere üç iddia ortaya atılmıştır:

I. "**0'ın her kuvveti 0'dır.**"
II. "**1'in her tam sayı kuvveti 1'dir** (negatif üsler dâhil)."
III. "$(-1)^n$ ifadesi yalnızca **1 ve −1** değerlerini alabilir."

a) I. iddia doğru mudur? Doğru değilse hangi durumda bozulduğunu gösteriniz ve iddiayı düzeltiniz.
b) II. iddia doğru mudur? Negatif bir üs için hesaplayarak gösteriniz.
c) III. iddia doğru mudur? n'nin tek, çift ve negatif olduğu durumları ayrı ayrı inceleyiniz.

- **a) I. iddia YANLIŞTIR** — "her kuvveti" ifadesi fazla geniştir.

  Pozitif kuvvetlerde doğrudur:

devamı →

14 *(çözümün devamı)*

$0^2 = 0 \cdot 0 = \mathbf{0}$ ✓ · $0^5 = \mathbf{0}$ ✓

Negatif kuvvetlerde bozulur:

$0^{-1} = 1/0^1 = \mathbf{1/0}$ → paydası sıfır → **TANIMSIZ** ×

$0^{-3} = 1/0^3 = 1/0$ → **TANIMSIZ** ×

Bir değer bulunamadığına göre "0'dır" demek mümkün değildir.

Düzeltilmiş iddia:

"0'ın **pozitif tam sayı** kuvvetleri 0'dır; **negatif tam sayı** kuvvetleri ise tanımsızdır."

(0^0 ifadesi de özel bir durumdur ve ortaokul düzeyinde tanımsız kabul edilir.)

- **b) II. iddia DOĞRUDUR.**

Pozitif üs: $1^{50} = 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = \mathbf{1}$ ✓ (kaç tane 1 çarpılırsa çarpılsın sonuç 1'dir)

Sıfır üs: $1^0 = \mathbf{1}$ ✓

Negatif üs: Hesaplayalım:

$1^{-4} = 1/1^4 = 1/1 = \mathbf{1}$ ✓

$1^{-7} = 1/1^7 = 1/1 = \mathbf{1}$ ✓

Gerekçe: Negatif üs, sayıyı $1/a^n$ biçimine çevirir. Taban 1 olduğunda payda da 1 çıkar ve 1/1 = 1 olur. Bu yüzden 1'in kuvveti üssün işaretinden **hiç etkilenmez**.

Dikkat: -1^4 ifadesi bundan farklıdır; orada parantez yoktur ve sonuç −1'dir.

- **c) III. iddia DOĞRUDUR.** Üç durumu inceleyelim:

1. n çift (pozitif): $(-1)^4 = (-1)(-1)(-1)(-1) = \mathbf{+1}$

Negatif çarpanlar ikişer eşleşir, hepsi pozitife döner.

2. n tek (pozitif): $(-1)^5 = \mathbf{-1}$

Eşleşmeden bir eksi artar.

3. n negatif: Negatif üs kuralını uygulayalım:

$(-1)^{-2} = 1/(-1)^2 = 1/(+1) = \mathbf{+1}$

$(-1)^{-3} = 1/(-1)^3 = 1/(-1) = \mathbf{-1}$

Görüldüğü gibi negatif üslerde de sonuç yalnızca **1 ya da −1** çıkıyor; çünkü payda her zaman +1 ya da −1 oluyor ve 1/1 = 1, 1/(−1) = −1'dir.

devamı →

14 *(çözümün devamı)*

Sonuç: n hangi tam sayı olursa olsun $(-1)^n$ yalnızca iki değer alır: **n çiftse 1, n tekse −1**. Başka bir değer imkânsızdır; çünkü 1 sayısı kaç kez çarpılırsa çarpılsın büyüklüğü değişmez, yalnızca işareti değişir.

✓ Doğru Sonuç: a) Yanlış; 0^{-1} tanımsız. Yalnız pozitif kuvvetlerde 0'dır b) Doğru; $1^{-4} = 1/1^4 = 1$ c) Doğru; çift üste 1, tek üste −1 (negatif üslerde de)

15 Bir "sayı atölyesi" etkinliğinde öğrencilerden, verilen koşulları sağlayan **üslü ifadeler yazmaları** ve seçimlerini gerekçelendirmeleri isteniyor. Çoğu maddede birden çok doğru cevap vardır.

a) Değeri −27 olan iki farklı üslü ifade.
b) Değeri 1/16 olan ve tabanı negatif olan bir üslü ifade.
c) Değeri −1/32 olan bir üslü ifade.
d) Tabanı kesir, değeri 8 olan bir üslü ifade.
e) Hem tabanı hem üssü negatif olan ve değeri 1 olan bir üslü ifade.
f) Değeri 0 olan bir üslü ifade yazılabilir mi?

- **a)** $27 = 3^3$ olduğuna göre iki yol var:

  1. $\mathbf{(-3)^3} = (-3)(-3)(-3) = -27$ ✓ (parantez var, üs tek → negatif)

  2. $\mathbf{-3^3} = -(3^3) = -27$ ✓ (parantez yok → negatif)

  Üs **tek** olduğu için iki yazılış da aynı değeri verdi. Üs çift olsaydı (örneğin 2) farklı çıkarlardı.

  Başka bir cevap: $-(-3)^3$ olmaz, çünkü o +27 verir.

- **b)** Değer pozitif (1/16) ve kesirli olduğuna göre üs **negatif**, taban negatifse üs **çift** olmalı.

  $16 = 2^4 = 4^2$ olduğundan:

  Cevap: $\mathbf{(-2)^{-4}} = 1/(-2)^4 = 1/16$ ✓

  Başka cevap: $\mathbf{(-4)^{-2}} = 1/(-4)^2 = 1/16$ ✓

  Dikkat: $(-2)^{-3}$ olmaz; üs tek olduğu için sonuç −1/8 çıkardı.

- **c)** Değer hem **negatif** hem **kesirli**: üs negatif olmalı ve işaret negatif çıkmalı.

  $32 = 2^5$ olduğuna göre:

  Cevap: $\mathbf{(-2)^{-5}} = 1/(-2)^5 = 1/(-32) = -1/32$ ✓ (üs tek → negatif)

  Başka cevap: $\mathbf{-2^{-5}} = -(1/2^5) = -1/32$ ✓ (parantez yok → negatif)

devamı →

15 *(çözümün devamı)*

Üs tek olduğu için burada da iki yazılış aynı sonucu verdi.

- **d)** Taban kesir olacak, değer 8 gibi bir tam sayı çıkacak. Kesirli taban ancak **negatif üs** ile ters çevrilip büyüyebilir.

  $8 = 2^3$ olduğuna göre:

  Cevap: $(1/2)^{-3}$ $= (2/1)^3 = 2^3 = 8$ ✓

  Başka cevaplar: $(2/4)^{-3}$ (sadeleşince aynı) · $(1/8)^{-1} = 8$ ✓

  Genel kural: $(1/a)^{-n} = a^n$

- **e)** Taban negatif, üs negatif ve sonuç **1** olacak.

  Sonucun 1 çıkması için tabanın mutlak değeri **1** olmalı (başka her taban kesir ya da büyük sayı verir). Taban negatif olacağına göre **−1** seçilir.

  İşaretin pozitif kalması için üs **çift** olmalı:

  Cevap: $(-1)^{-2}$ $= 1/(-1)^2 = 1/(+1) =$ **1** ✓

  Başka cevaplar: $(-1)^{-4} = 1$ ✓ · $(-1)^{-100} = 1$ ✓

  Dikkat: $(-1)^{-3}$ olmaz; üs tek olduğu için $1/(-1) = -1$ çıkardı.

- **f) Evet, yazılabilir:** tabanı **0** ve üssü **pozitif** bir tam sayı olan her ifade 0 değerini verir.

  Cevap: 0^3 $= 0 \cdot 0 \cdot 0 =$ **0** ✓ (0^2, 0^5, 0^{100} da olur)

  Ama dikkat: Üs negatif olursa ifade **tanımsızdır**:

  $0^{-2} = 1/0^2 = 1/0 \rightarrow$ tanımsız ×

  Ayrıca 0'dan farklı bir taban için değer **asla** 0 olamaz; çünkü sıfırdan farklı sayıların çarpımı hiçbir zaman sıfır vermez. Yani değeri 0 olan bir üslü ifadenin tabanı **zorunlu olarak** 0'dır.

✓ Doğru Sonuç: a) $(-3)^3$ ve -3^3 b) $(-2)^{-4}$ (ya da $(-4)^{-2}$) c) $(-2)^{-5}$ (ya da -2^{-5}) d) $(1/2)^{-3}$ e) $(-1)^{-2}$ f) Evet, $0^3 = 0$ (üs pozitif olmalı)