KONU ANLATIMLI SORU ÇÖZÜMLERİ

Tam Sayıların Tam Sayı Kuvvetleri

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge **CC BY-NC 4.0** lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabilir.

ÇÖZÜMLÜ SORU 1 — Parantezin işarete etkisini beş ifade üzerinde ayırt etme

Aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulunuz ve sonuçları karşılaştırınız.
a) $-2^4 \cdot (-2)^4 \cdot -(-2)^4$
b) $-2^5 \cdot (-2)^5 \cdot -(-2)^5$
c) (a) ve (b) şıklarındaki sonuçları karşılaştırıp bir **kural** çıkarınız.
d) -3^0 ve $(-3)^0$ ifadelerinin değerlerini bulup farkı açıklayınız.

1 a) Üs çift (4) olan üç ifade

-2^4: Parantez yok → üs yalnızca 2'ye ait.

$2^4 = 16$ → başa eksi yazılır → **−16**

$(-2)^4$: Parantez var → eksi de tabanın parçası.

$(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$ → dört negatif çarpılıyor, çift sayıda → **+16**

$-(-2)^4$: İki adım.

Önce parantezli kuvvet: $(-2)^4 = +16$

Sonra dıştaki eksi: **−16**

Sonuçlar: **−16, +16, −16**

2 b) Üs tek (5) olan üç ifade

-2^5: $2^5 = 32$ → **−32**

$(-2)^5$: Beş negatif çarpılıyor, tek sayıda → **−32**

$-(-2)^5$: Önce $(-2)^5 = -32$, sonra dıştaki eksi:

$-(-32)$ = **+32**

Sonuçlar: **−32, −32, +32**

3 c) Kuralı çıkar

İki şıkkı yan yana koyalım:

Üs ÇİFT iken: $-2^4 = -16$ ama $(-2)^4 = +16$ → sonuçlar **farklı**
Üs TEK iken: $-2^5 = -32$ ve $(-2)^5 = -32$ → sonuçlar **aynı**

Kural: Parantezin olup olmaması yalnızca **üs çift olduğunda** sonucu değiştirir. Üs tekse iki yazılış aynı değeri verir; çünkü tek sayıda negatif çarpanın çarpımı zaten negatiftir.

Ayrıca **dış eksi** her durumda sonucun işaretini ters çevirir: $-(-2)^4 = -16$ ve $-(-2)^5 = +32$.

4 d) Sıfır kuvvetinde parantez

$(-3)^0$: Parantez var → taban (−3), sıfırdan farklı → **1**

(Sıfır hariç her tam sayının 0. kuvveti 1'dir.)

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 1 **Parantezin işarete etkisini beş ifade üzerinde ayırt etme** (devam)

-3^0: Parantez yok → üs yalnızca 3'e ait.

$3^0 = 1$ → başa eksi yazılır → **−1**

Fark: Aynı kural burada da işliyor. Parantez, eksiyi tabanın içine alıyor; parantez yoksa eksi dışarıda kalıyor ve kuvvet hesaplandıktan sonra uygulanıyor.

Not: 0. kuvvet üs **çift sayılır** (0 çifttir), bu yüzden -3^0 ile $(-3)^0$ farklı çıkar — (c) şıkkındaki kuralla tutarlı ✓

Sonuç: a) −16, +16, −16 b) −32, −32, +32 c) Parantez yalnızca üs çiftken sonucu değiştirir d) $(-3)^0 = 1$, $-3^0 = -1$

Dikkat: Önce "eksi parantezin içinde mi dışında mı?" diye sor; sonra üssün tek mi çift mi olduğuna bak. İki soruyu ayrı ayrı cevapla.

ÇÖZÜMLÜ SORU 2 **Negatif üslü ifadelerde işaret ve kesre çevirme**

Aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulunuz.
a) $2^{-3} \cdot (3/4)^{-2}$
b) $(-5)^{-2} \cdot -5^{-2}$
c) $(-2)^{-3} \cdot (-1/2)^{-4}$
d) Bu altı sonuçtan hangileri **negatiftir?** İşareti neyin belirlediğini açıklayınız.

1 **a) Pozitif tabanlı negatif üsler**

2^{-3}: Negatif üs → payda ile pay yer değiştirir:

$2^{-3} = 1/2^3 =$ **1/8**

$(3/4)^{-2}$: Kesirli tabanda pay ile payda yer değiştirir, üs pozitife döner:

$(3/4)^{-2} = (4/3)^2 = 4^2/3^2 =$ **16/9**

İkisi de pozitif; çünkü tabanları pozitif.

2 **b) Parantez farkı negatif üste de geçerli**

$(-5)^{-2}$: Parantez var → taban (−5).

$= 1/(-5)^2 = 1/(+25) =$ **1/25**

(Üs çift olduğu için paydadaki kuvvet pozitif çıktı.)

-5^{-2}: Parantez yok → üs yalnızca 5'e ait, eksi dışarıda.

$= -(5^{-2}) = -(1/5^2) =$ **−1/25**

Yine aynı ayrım: **+1/25** ile **−1/25**. Parantez sonucun işaretini değiştirdi.

3 **c) Tek üslü negatif taban ve kesirli negatif taban**

$(-2)^{-3}$: Parantez var, üs tek.

$= 1/(-2)^3 = 1/(-8) =$ **−1/8**

(Paydadaki kuvvet negatif çıktı, bu yüzden kesir negatif.)

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 2 **Negatif üslü ifadelerde işaret ve kesre çevirme** (devam)

$(-1/2)^{-4}$: Kesirli tabanda pay ile payda yer değiştirir:
$= (-2/1)^4 = (-2)^4 =$ **+16**
(Üs çift olduğu için sonuç pozitif.)

4 d) İşareti ne belirler?
Altı sonuç: 1/8, 16/9, 1/25, **−1/25**, **−1/8**, 16

Negatif olanlar: -5^{-2} (= −1/25) ve $(-2)^{-3}$ (= −1/8)

İşareti belirleyen iki şey vardır:
1. Tabanın işareti ve parantez durumu
2. Üssün tek mi çift mi olduğu

Üssün negatif olması işareti ETKİLEMEZ. Negatif üs yalnızca sayıyı **kesre çevirir** (ters çevirir).

Bunu şöyle kontrol edebilirsin: -5^{-2} ifadesinde üssün işaretini görmezden gel → $-5^2 = -25$ (negatif). Negatif üs bunu −1/25 yapar; işaret aynı kalır ✓
Aynı biçimde $(-2)^{-3}$ için → $(-2)^3 = -8$ (negatif) → negatif üs bunu −1/8 yapar ✓

Sonuç: a) 1/8 ve 16/9 b) 1/25 ve −1/25 c) −1/8 ve +16 d) Negatif olanlar: -5^{-2} ve $(-2)^{-3}$; işareti taban ve parantez belirler, üssün negatifliği değil.

Dikkat: Negatif üslü bir ifadede önce üssü pozitif kabul edip işareti bul; sonra sonucu kesre çevir. İki adımı karıştırma.

ÇÖZÜMLÜ SORU 3 **Üslü ifadelerle toplama ve çıkarma**

$3^{-1} + 2^{-2} - (-4)^0$ işleminin sonucunu bulunuz.
a) Her terimin değerini ayrı ayrı bulunuz.
b) Paydaları eşitleyip işlemi tamamlayınız.
c) Bir öğrenci "üsleri toplayıp $3^{-1} + 2^{-2} = 5^{-3}$ olur" diyor. Bu neden yanlıştır?
d) Sonucu ondalık gösterimle yazınız.

1 a) Terimleri tek tek hesapla
3^{-1}: Negatif üs → $1/3^1 =$ **1/3**

2^{-2}: $1/2^2 =$ **1/4**

$(-4)^0$: Parantez var, taban (−4) ve sıfırdan farklı → **1**

İşlem şu hâle geldi:
1/3 + 1/4 − 1

2 b) Paydaları eşitle ve hesapla
Paydalar 3, 4 ve 1'dir. Ortak payda **12**:
1/3 = **4/12** · 1/4 = **3/12** · 1 = **12/12**

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 3 **Üslü ifadelerle toplama ve çıkarma** (devam)

4/12 + 3/12 − 12/12
= (4 + 3 − 12)/12
= **−5/12**

Sonuç **negatif** çıktı; çünkü çıkarılan 1, toplanan iki kesrin toplamından (7/12) büyüktü.

3 **c) Öğrencinin hatası**

Öğrenci, **aynı tabanlı çarpmada** geçerli olan "üsler toplanır" kuralını **toplama** işlemine uygulamış. İki ayrı hata var:

1. Burada işlem **toplama**, çarpma değil. Toplama için üslerle ilgili hiçbir kural yoktur.

2. Tabanlar da **farklı** (3 ve 2). Üslerle ilgili kurallar zaten yalnızca **aynı tabanlı** ifadeler için geçerlidir.

Kontrol: Öğrencinin cevabı $5^{-3} = 1/125 = 0{,}008$ olurdu.
Doğrusu ise 1/3 + 1/4 = 7/12 ≈ 0,583.
İki sonuç arasında 70 kattan fazla fark var ×

Kural: Üslü ifadeler toplanırken ya da çıkarılırken her biri **ayrı ayrı değerine çevrilir**.

4 **d) Ondalık gösterim**

−5/12 kesrini ondalığa çevirelim. Önce sonlu mu devirli mi olduğuna bakalım:
$12 = 2^2 \cdot 3$ → paydada **3** var → gösterim **devirlidir**.

5 : 12 = 0,41666...

−5/12 = **$-0{,}41\overline{6}$**

Kontrol: 0,41666... ≈ 0,417 ve 1/3 + 1/4 − 1 ≈ 0,333 + 0,250 − 1 = −0,417 ✓

Sonuç: a) 1/3, 1/4 ve 1 b) −5/12 c) Üsler yalnızca aynı tabanlı çarpmada toplanır; burada işlem toplama ve tabanlar farklı d) $-0{,}41\overline{6}$

Dikkat: Üslü ifadelerle toplama sorularında ilk iş her terimi sayıya çevirmektir; üslerle oynamaya kalkma.

ÇÖZÜMLÜ SORU 4 **Bilinmeyen üs ve tabanı belirleme**

Aşağıdaki eşitliklerde x, y ve z tam sayılardır.
$2^x = 1/32$ $(-3)^y = -1/27$ $(1/5)^z = 25$
a) x değerini bulunuz.
b) y değerini bulunuz.
c) z değerini bulunuz.
d) x + y + z toplamını hesaplayıp her sonucu yerine koyarak kontrol ediniz.

1 a) Sağ tarafı aynı tabana çevir

1/32 sayısını 2'nin kuvveti olarak yazalım:

$32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = \mathbf{2^5}$

$1/32 = 1/2^5 = \mathbf{2^{-5}}$

Eşitlik: $2^x = 2^{-5}$

Tabanlar eşit olduğuna göre üsler de eşittir:

x = −5

2 b) İşarete dikkat ederek çöz

Sağ taraf **negatif** (−1/27). Taban (−3) parantez içinde olduğuna göre sonucun negatif olması için üs **tek** olmalıdır.

$27 = 3^3$ olduğundan:

$-1/27 = 1/(-27) = 1/(-3)^3 = \mathbf{(-3)^{-3}}$

Eşitlik: $(-3)^y = (-3)^{-3}$

y = −3

Kontrol: −3 tek bir sayı ✓ ve $(-3)^{-3} = 1/(-3)^3 = 1/(-27) = -1/27$ ✓

3 c) Kesirli tabanda negatif üs

Taban 1/5, sonuç 25. Kesirli tabanda negatif üs, payı ile paydayı yer değiştirir:
$(1/5)^{-n} = (5/1)^n = 5^n$

$25 = 5^2$ olduğuna göre $5^n = 5^2 \rightarrow n = 2$, yani üs **−2** olmalı:
$(1/5)^{-2} = (5/1)^2 = 5^2 = \mathbf{25}$ ✓

z = −2

Mantık kontrolü: 1/5 sayısı 1'den küçüktür; onun kuvveti 25 gibi büyük bir sayı olabilmesi için üssün **negatif** olması gerekir ✓

4 d) Toplam ve kontrol

x + y + z = (−5) + (−3) + (−2)
= (−8) + (−2) = **−10**

Her sonucu tek tek kontrol edelim:

- $2^{-5} = 1/2^5 = 1/32$ ✓
- $(-3)^{-3} = 1/(-3)^3 = 1/(-27) = -1/27$ ✓
- $(1/5)^{-2} = (5/1)^2 = 25$ ✓

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 4 **Bilinmeyen üs ve tabanı belirleme** (devam)

Üç eşitlik de sağlanıyor.

Genel yöntem: Bu tip sorularda sağ tarafı, sol taraftaki **tabanın bir kuvveti** olarak yazmaya çalış. Sonuç kesirliyse üs negatif, sonuç negatifse (ve taban parantezliyse) üs tektir.

Sonuç: a) x = −5 b) y = −3 c) z = −2 d) x + y + z = −10

Dikkat: Sağ tarafı hep aynı tabana çevir. 1/32 → 2^{-5} gibi; sonuç kesirliyse üs negatiftir.