KONU ANLATIMI · CEVAPLI

Tam Sayıların Tam Sayı Kuvvetleri

Kazanımlar: MAT.8.1.4. Tam sayıların tam sayı kuvvetlerini belirleyebilme; negatif üslü ifadeleri ve parantezin işarete etkisini açıklayabilme

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge **CC BY-NC 4.0** lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabilir.

Üslü İfade Nedir? — Taban ve Üs

Bir sayının **kendisiyle tekrarlı çarpımı** üslü ifade ile gösterilir:

a · a · a · … · a (n tane) = $\mathbf{a^n}$

Burada **a** sayısına **taban**, **n** sayısına **üs (kuvvet)** denir.

ÖRNEK

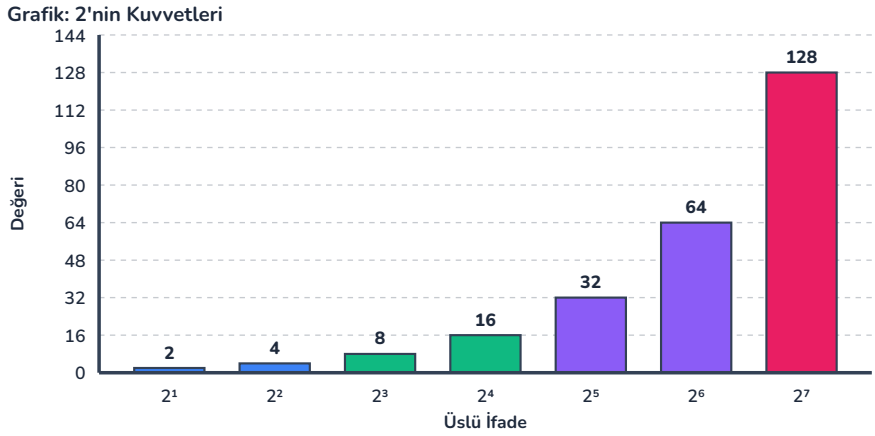
$\mathbf{2^1 = 2}$

$\mathbf{2^2 = 2 \cdot 2 = 4}$

$\mathbf{2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8}$

$\mathbf{2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16}$

Bir örnek daha: $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = \mathbf{5^7}$ · $(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = \mathbf{(-3)^3}$



2'nin 1'den 7'ye kadar olan kuvvetlerini gösteren sütun grafiği: 2, 4, 8, 16, 32, 64 ve 128. Her adımda değer bir öncekinin iki katına çıkar; bu yüzden sütunlar hızla yükselir.

Grafikte her sütun bir öncekinin **iki katıdır**. Üs yalnızca 1 artmasına rağmen değer katlanarak büyür — buna **üstel büyüme** denir.

Bu yüzden üslü ifadeler, büyük sayıları kısa yazmanın en güçlü yoludur: 2^{10} yazmak, 1024 yazmaktan da 2'yi on kez yan yana çarpmaktan da kısadır.

Her üslü ifadeyi hesaplamadan önce bilinmesi gereken **dört temel kural**:

1. Sıfır hariç her tam sayının **0. kuvveti 1**'dir. ($a \neq 0$ için $a^0 = 1$)
2. Her tam sayının **1. kuvveti kendisine** eşittir. ($a^1 = a$)
3. 1'in her tam sayı kuvveti **1**'dir.
4. Pozitif tam sayıların tek ve çift her kuvveti **pozitiftir**.

ÖRNEK

1. kural: $4^0 = \mathbf{1}$ · $(-2)^0 = \mathbf{1}$ · $136^0 = \mathbf{1}$
Ama dikkat: $\mathbf{-3^0 = -1}$'dir (üs yalnız 3'e aittir, eksi dışarıda kalır).

2. kural: $3^1 = \mathbf{3}$ · $16^1 = \mathbf{16}$ · $(-5)^1 = \mathbf{-5}$

3. kural: $1^6 = \mathbf{1}$ · $1^{27} = \mathbf{1}$ · $1^{123} = \mathbf{1}$

4. kural: $3^4 = \mathbf{81}$ · $5^3 = \mathbf{125}$ · $6^2 = \mathbf{36}$

Parantezin Belirleyiciliği: $(-a)^n$ ile $-a^n$

Negatif sayıların kuvveti alınırken **parantezin olup olmaması sonucu değiştirir**.

Parantez YOKSA ($-a^n$ biçiminde): kuvvet **işaretten etkilenmez**, üs yalnızca sayıya aittir ve sonuç **her zaman negatif** olur.

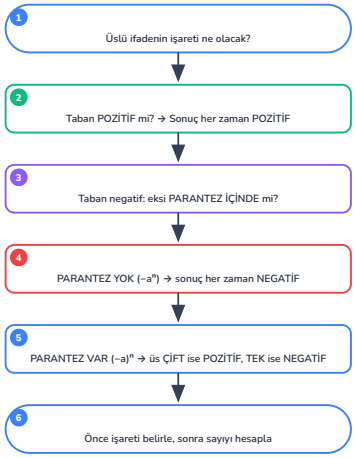
Parantez VARSA ($(-a)^n$ biçiminde): kuvvet işareti de kapsar. **Üs çiftse sonuç pozitif**, **üs tekse sonuç negatif** olur.

ÖRNEK

Parantez yokken:
$-5^2 = -(5 \cdot 5) = \mathbf{-25}$
$-5^3 = -(5 \cdot 5 \cdot 5) = \mathbf{-125}$
$-4^2 = -(4 \cdot 4) = \mathbf{-16}$

Parantez varken:
$(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = \mathbf{+25}$
$(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = \mathbf{-125}$
$(-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = \mathbf{+16}$

Görüldüğü gibi **üs tekken** iki yazılış aynı sonucu verir (−125); **üs çiftken** sonuçlar **zıt işaretli** olur (−25 ile +25).



Üslü bir ifadenin işaretine karar verme akış şeması. Önce tabanın parantez içinde olup olmadığına bakılır. Parantez yoksa sonuç her zaman negatiftir. Parantez varsa üssün tek mi çift mi olduğuna bakılır: çift üste sonuç pozitif, tek üste negatiftir. Taban pozitifse üs ne olursa olsun sonuç pozitiftir.

İfade	Parantez	Üs	İşaret	Değer
-2^4	Yok	Çift	Negatif	**−16**
$(-2)^4$	Var	Çift	Pozitif	**+16**
-2^3	Yok	Tek	Negatif	**−8**
$(-2)^3$	Var	Tek	Negatif	**−8**
$-(-2)^4$	Var + dış eksi	Çift	Negatif	**−16**
$-(-3)^3$	Var + dış eksi	Tek	Pozitif	**+27**
$-(-1)^{103}$	Var + dış eksi	Tek	Pozitif	**+1**

NOT **Sık yapılan hata:** -4^2 ile $(-4)^2$ ifadelerini aynı sanmak.
$-4^2 = \mathbf{-16}$ ama $(-4)^2 = \mathbf{+16}$

Kural şu: **parantez yoksa üs yalnızca sayıya aittir**, eksi işareti kuvvet alındıktan **sonra** önüne yazılır. Parantez varsa eksi de tabanın parçasıdır ve kuvvete girer.

Son satırlardaki $\mathbf{-(-2)^4}$ gibi ifadelerde iki adım vardır: önce parantezli kuvvet hesaplanır ($(-2)^4 = 16$), sonra **dıştaki eksi** uygulanır (−16).

Negatif Tam Sayı Kuvvetleri

Bir tam sayının **negatif üssü** alınırken sayının **payı ile paydası yer değiştirir** ve üs **pozitife döner**.

a sıfırdan farklı bir tam sayı ve n bir doğal sayı olmak üzere:

$\mathbf{a^{-n} = 1 / a^n}$ ve $\mathbf{1 / a^{-n} = a^n}$

ÖRNEK
$\mathbf{2^{-2} = 1/2^2 = 1/4}$
$\mathbf{5^{-1} = 1/5}$
$\mathbf{10^{-4} = 1/10^4 = 1/10\,000}$
$\mathbf{1/3^3 = 3^{-3}}$
$\mathbf{1/5^{-2} = 5^2 = 25}$
$\mathbf{1/7^3 = 7^{-3}}$

Dikkat: Negatif üs, sayıyı **negatif yapmaz**; onu **kesre çevirir**. 2^{-2} sayısı −4 değil **1/4**'tür.

Aynı kural **kesirli tabanlarda** da işler; negatif üste kesrin **payı ile paydası yer değiştirir**:

$\mathbf{(a/b)^{-n} = (b/a)^n}$

ÖRNEK $(2/3)^{-2} = (3/2)^2 = 3^2/2^2 = 9/4$
$(1/2)^{-3} = (2/1)^3 = 2^3 = 8$
$(3/4)^{-3} = (4/3)^3 = 64/27$
$(5/3)^{-2} = (3/5)^2 = 9/25$

Negatif tabanlı kesirlerde işaret de birlikte taşınır:
$(-1/3)^{-3} = (-3/1)^3 = (-3)^3 = -27$
$(-1/2)^{-6} = (-2/1)^6 = (-2)^6 = +64$

NOT **İki özel durum:**

1. 1'in negatif kuvvetleri de 1'dir.
$1^{-4} = 1/1^4 = 1/1 = \mathbf{1}$ · $1^{-5} = \mathbf{1}$

2. Sıfırın negatif tam sayı kuvvetleri tanımsızdır.
$0^{-1} = 1/0^1 = 1/0$ → payda sıfır olamaz → **tanımsız**

Bu yüzden negatif üs kuralında "a sıfırdan farklı" koşulu vardır. Buna karşılık $0^2 = 0$, $0^5 = 0$ gibi **pozitif** kuvvetler tanımlıdır.

İfade	Parantez / İşaret	Adım	Değer
2^{-3}	Taban pozitif	$1/2^3$	**1/8**
$(-2)^{-2}$	Parantez var, üs çift	$1/(-2)^2 = 1/4$	**1/4**
$(-2)^{-3}$	Parantez var, üs tek	$1/(-2)^3 = 1/(-8)$	**−1/8**
-2^{-2}	Parantez yok	$-(1/2^2)$	**−1/4**
$(-4)^{-3}$	Parantez var, üs tek	$1/(-4)^3 = 1/(-64)$	**−1/64**
-6^{-3}	Parantez yok	$-(1/6^3)$	**−1/216**
$(-1)^{-14}$	Parantez var, üs çift	$1/(-1)^{14} = 1/1$	**1**

NOT **Sık yapılan hata:** Negatif üssü, sonucu negatif yapmak sanmak.
3^{-2} = **1/9**'dur, −9 değil.

İşareti belirleyen **taban**dır, üs değil. Üssün negatif olması yalnızca sayıyı **ters çevirir** (kesre döndürür). Bu iki bilgiyi ayrı ayrı uygula: önce **işarete** karar ver (taban ve parantez), sonra **kesre** çevir (üssün işareti).

Üslü İfadelerle Karışık İşlemler

Üslü ifadelerin toplanıp çıkarılması gerektiğinde **üsler üzerinde işlem yapılmaz**. Her ifade **tek tek değerine çevrilir**, sonra sıradan kesir işlemi yapılır.

Sıra şöyledir:
1. Her üslü ifadenin değerini bul (işaretine ve negatif üssüne dikkat ederek).
2. Kesirlerin paydalarını eşitle.
3. Topla ya da çıkar, sonucu sadeleştir.

ÖRNEK

$2^{-1} + 1^{-8} = ?$
$2^{-1} = 1/2$ · $1^{-8} = 1$
$1/2 + 1 = 1/2 + 2/2 =$ **3/2**

$2^{-2} + 3^{-1} = ?$
$1/4 + 1/3 \rightarrow$ ortak payda 12 → $3/12 + 4/12 =$ **7/12**

$5^{-1} + (-2)^{-1} = ?$
$1/5 + 1/(-2) = 1/5 - 1/2 \rightarrow$ ortak payda 10 → $2/10 - 5/10 =$ **−3/10**

$(-3)^{-1} + (6/5)^{-1} = ?$
$-1/3 + 5/6 \rightarrow$ ortak payda 6 → $-2/6 + 5/6 = 3/6 =$ **1/2**

Bilinmeyen üs ya da taban bulma. Eşitliğin iki tarafı **aynı tabana** getirilir; tabanlar eşitse üsler de eşit olmak zorundadır.

Kesirli bir sonuç görüyorsan üs büyük olasılıkla **negatiftir**; $1/a^n$ biçimine çevirip a^{-n} olarak oku.

ÖRNEK

$5^{\square} = 1/25$
$1/25 = 1/5^2 = 5^{-2} \rightarrow \square =$ **−2**

$10^{\square} = 1/1000$
$1/1000 = 1/10^3 = 10^{-3} \rightarrow \square =$ **−3**

$\square^{-2} = 1/49$
$1/49 = 1/7^2 \rightarrow$ taban **7** olmalı → $\square =$ **7**

$\square^{-3} = 1/27$
$1/27 = 1/3^3 \rightarrow \square =$ **3**

$(-2)^{\square} = -1/8$
$-1/8 = 1/(-8) = 1/(-2)^3 = (-2)^{-3} \rightarrow \square =$ **−3**

NOT

Sık yapılan hata: Toplarken üsleri toplamak. **$2^{-2} + 3^{-1} \neq 5^{-3}$**'tür!
Üsler yalnızca **aynı tabanlı çarpma** işleminde toplanır; toplama işleminde böyle bir kural **yoktur**.
Doğrusu her terimi ayrı ayrı hesaplayıp kesir olarak toplamaktır: 1/4 + 1/3 = 7/12.

Etkinlikler

ETKİNLİK 1 **Aşağıdaki ifadelerden doğru olanların yanına "D", yanlış olanların yanına "Y" yazınız.**

a) D Sıfır hariç her tam sayının 0. kuvveti 1'dir.

b) Y -3^0 ifadesinin değeri 1'dir.

c) D 1'in her tam sayı kuvveti 1'dir (negatif üsler dâhil).

d) Y -4^2 ile $(-4)^2$ aynı değeri verir.

e) D -2^3 ile $(-2)^3$ aynı değeri verir.

f) Y Negatif üslü bir ifadenin değeri her zaman negatiftir.

g) D $2^{-3} = 1/8$'dir.

h) D Sıfırın negatif tam sayı kuvvetleri tanımsızdır.

ı) D $(2/3)^{-2} = (3/2)^2$'dir.

i) Y $2^{-2} + 3^{-1}$ işleminin sonucu 5^{-3}'tür.

j) D Tabanı pozitif olan bir üslü ifadenin değeri, üs ne olursa olsun pozitiftir.

k) D $(-2)^{-3}$ ifadesinin değeri $-1/8$'dir.

ETKİNLİK 2 **Aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri doldurunuz.**

İfade	Parantez Var mı?	Üs Tek / Çift	Sonucun İşareti	Değeri
-3^2	Yok	Çift	Negatif	−9
$(-3)^2$	Var	Çift	Pozitif	9
$(-3)^3$	Var	Tek	Negatif	−27
$-(-3)^3$	Var + dış eksi	Tek	Pozitif	27
$(-1)^{20}$	Var	Çift	Pozitif	1
-1^{37}	Yok	Tek	Negatif	−1
$(-5)^{-2}$	Var	Çift	Pozitif	1/25

ETKİNLİK 3 **Aşağıdaki üslü ifadelerin değerlerini bulunuz.**

a) 4^3 **$4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$**

b) $(-2)^6$ **Üs çift → pozitif → 64**

c) -2^6 **Parantez yok → $-(2^6) = -64$**

d) $(-10)^3$ **Üs tek → negatif → −1000**

e) $-(-4)^2$ **Önce $(-4)^2 = 16$, sonra dış eksi → −16**

f) $(-1)^{101}$ **Üs tek → −1**

g) 125^0 **Sıfırdan farklı sayının 0. kuvveti → 1**

h) -7^0 **Parantez yok → $-(7^0) = -1$**

ı) 0^5 **$0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$ (pozitif kuvvet tanımlıdır)**

i) $(-6)^2$ **Üs çift → pozitif → 36**

ETKİNLİK 4 **Aşağıdaki negatif üslü ifadelerin değerlerini bulunuz. Her adımı yazınız.**

a) 3^{-2} **$= 1/3^2 = 1/9$**

b) 10^{-3} **$= 1/10^3 = 1/1000$**

c) $(-4)^{-2}$ **$= 1/(-4)^2 = 1/16$**

d) -4^{-2} **Parantez yok → $-(1/4^2) = -1/16$**

e) $(-3)^{-3}$ **$= 1/(-3)^3 = 1/(-27) = -1/27$**

f) $(2/5)^{-2}$ **$= (5/2)^2 = 25/4$**

g) $(1/3)^{-4}$ **$= (3/1)^4 = 3^4 = 81$**

h) $(-1/2)^{-3}$ **$= (-2/1)^3 = (-2)^3 = -8$**

ı) $1/2^{-5}$ **$= 2^5 = 32$ (paydadaki negatif üs paya geçerken pozitife döner)**

i) 1^{-100} **$= 1/1^{100} = 1/1 = 1$**

ETKİNLİK 5 **Aşağıdaki soruları çözünüz ve kullandığınız kuralı yazınız.**

a) $3^{-1} + 2^{-1}$ işleminin sonucu kaçtır? **1/3 + 1/2 → ortak payda 6 → 2/6 + 3/6 = 5/6**

b) $2^{-2} - 4^{-1}$ işleminin sonucu kaçtır? **1/4 − 1/4 = 0**

c) $(-2)^0 + (-2)^1 + (-2)^2$ işleminin sonucu kaçtır? **1 + (−2) + 4 = 3**

d) 2^x = 1/64 ise x kaçtır? **$64 = 2^6 \rightarrow 1/64 = 2^{-6} \rightarrow x = -6$**

e) $\square^{-2} = 1/81$ ise $\square$ kaçtır? (pozitif tam sayı) **$1/81 = 1/9^2 \rightarrow \square = 9$**

f) (1/4)^y = 16 ise y kaçtır? **$(1/4)^{-2} = (4/1)^2 = 16 \rightarrow y = -2$**

g) Değeri 1 olan, tabanı negatif ve üssü negatif olan bir üslü ifade yazınız. **Örneğin $(-1)^{-4} = 1/(-1)^4 = 1/1 = 1$ ✓ (üs çift olmalı; $(-1)^{-3} = -1$ olurdu)**

h) Değeri −1/8 olan bir üslü ifade yazınız. **$(-2)^{-3} = 1/(-2)^3 = 1/(-8) = -1/8$ ✓ (ya da $-2^{-3} = -(1/8) = -1/8$)**

Konu Özeti

ÖZET

a^n ifadesinde a **taban**, n **üstür**. Sıfır hariç her sayının **0. kuvveti 1**, her sayının **1. kuvveti kendisidir** ve **1'in** her kuvveti 1'dir. İşareti belirleyen iki şey vardır: **parantez** ve **üssün tekliği**. Parantez yoksa $(-a^n)$ sonuç **her zaman negatiftir**; parantez varsa $((-a)^n)$ üs **çiftse pozitif**, **tekse negatiftir**. Bu ayrım yalnızca üs çift olduğunda fark yaratır. **Negatif üs** sayıyı negatif yapmaz, **kesre çevirir**: $a^{-n} = 1/a^n$ ve $(a/b)^{-n} = (b/a)^n$. **Sıfırın negatif kuvvetleri tanımsızdır** (payda sıfır olur). Üslü ifadeler toplanırken **üslerle işlem yapılmaz**; her terim tek tek değerine çevrilir, sonra kesirler toplanır. Bilinmeyen üs sorularında sağ taraf, soldaki **tabanın bir kuvveti** olarak yazılır.