ÇÖZÜMLER

Üslü İfadelerde İşlemler ve Sıralama

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge **CC BY-NC 4.0** lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabilir.

1. Bölüm Soru 1–5

1 Aşağıdaki işlemler, çözümünde kullanılacak **kurala göre** gruplandırılacaktır.

I. $3^4 \cdot 3^7$ **II.** $2^6 \cdot 5^6$ **III.** $7^9 / 7^4$ **IV.** $12^5 / 4^5$
V. $(5^2)^6$ **VI.** $4^3 \cdot 8^2$ **VII.** $2^{10} + 2^{10}$ **VIII.** $9^4 / 27^2$

a) İşlemleri "tabanlar aynı", "üsler aynı", "üssün üssü", "önce tabanları eşitle" ve "toplama" gruplarına ayırınız.
b) Her işlemin sonucunu tek bir üslü ifade olarak yazınız.
c) VII. işlemi neden diğerlerinden farklı bir yolla çözülür? Açıklayınız.

- **a)** Gruplandırma:

  Tabanlar aynı (üsler toplanır ya da çıkarılır): **I** ve **III**

  Üsler aynı (tabanlar çarpılır ya da bölünür): **II** ve **IV**

  Üssün üssü (üsler çarpılır): **V**

  Önce tabanları eşitle (hem taban hem üs farklı): **VI** ve **VIII**

  Toplama (ortak çarpan parantezine alma): **VII**

- **b)** Sonuçlar:

  I. $3^4 \cdot 3^7 \rightarrow$ üsler toplanır $\rightarrow \mathbf{3^{11}}$

  II. $2^6 \cdot 5^6 \rightarrow$ tabanlar çarpılır $\rightarrow (2 \cdot 5)^6 = \mathbf{10^6}$

  III. $7^9 / 7^4 \rightarrow$ üsler çıkarılır $\rightarrow \mathbf{7^5}$

  IV. $12^5 / 4^5 \rightarrow$ tabanlar bölünür $\rightarrow (12 : 4)^5 = \mathbf{3^5}$

  V. $(5^2)^6 \rightarrow$ üsler çarpılır $\rightarrow \mathbf{5^{12}}$

  VI. $4^3 \cdot 8^2 = (2^2)^3 \cdot (2^3)^2 = 2^6 \cdot 2^6 = \mathbf{2^{12}}$

  VII. $2^{10} + 2^{10} = 2 \cdot 2^{10} = 2^1 \cdot 2^{10} = \mathbf{2^{11}}$

  VIII. $9^4 / 27^2 = (3^2)^4 / (3^3)^2 = 3^8 / 3^6 = \mathbf{3^2}$

- **c)** Diğer yedi işlemin hepsi **çarpma, bölme ya da kuvvet alma**dır. Üslerle ilgili bütün kurallar (toplama, çıkarma, çarpma) yalnızca bu işlemler için tanımlanmıştır.

  VII. ise bir **toplamadır** ve toplamada üslerle **hiçbir işlem yapılmaz**. Bunun yerine kaç tane aynı ifadeden bulunduğu sayılır ve ortak çarpan parantezine alınır:

  $2^{10} + 2^{10} = \mathbf{2 \cdot 2^{10}}$

devamı →

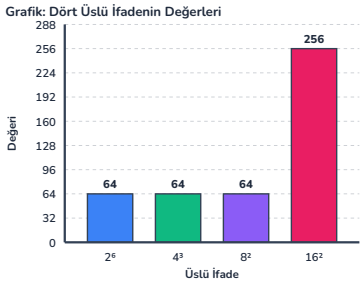
1 *(çözümün devamı)*

Buradaki 2 çarpanı, tabanla aynı olduğu için 2^1 yazılıp üsler toplanabildi → $\mathbf{2^{11}}$.

Dikkat: Eğer işlem $3^{10} + 3^{10}$ olsaydı sonuç $\mathbf{2 \cdot 3^{10}}$ olurdu ve daha fazla sadeleşmezdi; çünkü 2 sayısı 3 tabanının bir kuvveti değildir.

✓ Doğru Sonuç: a) Tabanlar aynı: I, III — Üsler aynı: II, IV — Üssün üssü: V — Tabanları eşitle: VI, VIII — Toplama: VII b) 3^{11}, 10^6, 7^5, 3^5, 5^{12}, 2^{12}, 2^{11}, 3^2 c) Toplamada üslerle işlem yapılmaz

2 Şekildeki sütun grafiğinde dört üslü ifadenin değerleri gösterilmiştir.



a) Dört ifadeyi de 2 tabanına çeviriniz.
b) Grafikte hangi ifadeler birbirine eşittir? Bunu 2 tabanlı yazılışlarıyla açıklayınız.
c) En büyük değer hangi ifadeye aittir?
d) Grafiğe 32^2 ifadesi eklenseydi sütunu nereye yerleşirdi? Değerini bulunuz.

- **a)** Her tabanı 2'nin kuvveti olarak yazıp üssün üssü kuralını uygulayalım:

  $\mathbf{2^6}$ → zaten 2 tabanlı → $\mathbf{2^6}$

  $\mathbf{4^3} = (2^2)^3 = 2^{2.3} = \mathbf{2^6}$

  $\mathbf{8^2} = (2^3)^2 = 2^{3.2} = \mathbf{2^6}$

  $\mathbf{16^2} = (2^4)^2 = 2^{4.2} = \mathbf{2^8}$

- **b) 2^6, 4^3 ve 8^2 ifadelerinin üçü de birbirine eşittir.**

  Üçü de 2 tabanına çevrildiğinde $\mathbf{2^6}$ olmaktadır ve $2^6 = \mathbf{64}$'tür. Grafikte de üç sütunun aynı yükseklikte olduğu görülüyor ✓

  Neden: Üssün üssü kuralında üsler çarpılır. Taban ile üssün çarpımı aynı sonucu verdiği sürece ifade değişmez:

  $2 \cdot 3 = 6 \cdot 3 \cdot 2 = 6 \cdot 6 \cdot 1 = 6$

  Bu, **farklı görünen üslü ifadelerin aynı sayıyı gösterebileceğini** anlatır. Karşılaştırma yapmadan önce mutlaka ortak tabana çevirmek gerekir.

- **c)** En büyük değer $\mathbf{16^2}$'ye aittir.

  $16^2 = 2^8 = \mathbf{256}$

  Diğerleri $2^6 = 64$'tür. Tabanlar eşit olduğuna göre üssü büyük olan büyüktür: $2^8 > 2^6$ ✓

devamı →

2 *(çözümün devamı)*

Not: 16^2 ifadesinin üssü (2), 2^6 ifadesinin üssünden (6) küçük olmasına rağmen değeri daha büyüktür. Yalnızca üslere bakmak yanıltır.

- **d)** $32 = 2^5$ olduğuna göre:

  $32^2 = (2^5)^2 = \mathbf{2^{10}}$

  Değeri: $2^{10} = \mathbf{1024}$

  Sıralama: 2^6 (64) < 2^8 (256) < $\mathbf{2^{10}}$ **(1024)**

  32^2 sütunu grafikteki bütün sütunlardan **daha yüksek** olur; 16^2 sütununun dört katı yüksekliğinde olurdu ($1024 = 4 \cdot 256$).

✔ Doğru Sonuç: a) $2^6, 2^6, 2^6, 2^8$ b) $2^6 = 4^3 = 8^2 = 64$ c) $16^2 = 2^8 = 256$ d) $32^2 = 2^{10} = 1024$, en sağa ve en yükseğe

3 Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını **tek bir üslü ifade** biçiminde yazınız.
a) $(2^5 \cdot 4^4) / 8^3$
b) $9^3 \cdot 27^{-2}$
c) $(25^4 \cdot 5^{-3}) / 125^2$
d) $6^5 / (2^5 \cdot 3^4)$

Her adımda hangi kuralı kullandığınızı yazınız.

- **a)** Bütün tabanları 2'ye çevirelim:

  $4^4 = (2^2)^4 = \mathbf{2^8}$ · $8^3 = (2^3)^3 = \mathbf{2^9}$

  Pay: $2^5 \cdot 2^8$ → tabanlar aynı, üsler toplanır → $\mathbf{2^{13}}$

  Bölme: $2^{13} / 2^9$ → üsler çıkarılır → $2^{(13-9)} = \mathbf{2^4}$

  Sayısal değeri: 16

- **b)** Tabanları 3'e çevirelim:

  $9^3 = (3^2)^3 = \mathbf{3^6}$ · $27^{-2} = (3^3)^{-2} = 3^{3.(-2)} = \mathbf{3^{-6}}$

  Tabanlar aynı, çarpma → üsler toplanır:

  $3^6 \cdot 3^{-6} = 3^{(6+(-6))} = \mathbf{3^0 = 1}$

  İlginç sonuç: İki ifade birbirinin tersi olduğu için çarpımları 1 çıktı.

- **c)** Tabanları 5'e çevirelim:

  $25^4 = (5^2)^4 = \mathbf{5^8}$ · $125^2 = (5^3)^2 = \mathbf{5^6}$

devamı →

3 *(çözümün devamı)*

Pay: $5^8 \cdot 5^{-3}$ → üsler toplanır → $5^{(8+(-3))} = \mathbf{5^5}$

Bölme: $5^5 / 5^6$ → üsler çıkarılır → $5^{(5-6)} = \mathbf{5^{-1}}$

Sayısal değeri: 1/5

- **d)** Burada 6 tabanını asal çarpanlarına ayırmak gerekir:

  $6^5 = (2 \cdot 3)^5 = \mathbf{2^5 \cdot 3^5}$ (üsler aynı olan çarpma kuralı, tersten)

  Şimdi bölmeyi yazalım:

  $(2^5 \cdot 3^5) / (2^5 \cdot 3^4)$

  Aynı tabanları ayrı ayrı bölelim:

  $2^5 / 2^5 = 2^0 = \mathbf{1}$

  $3^5 / 3^4 = 3^{(5-4)} = \mathbf{3}$

  Sonuç: $1 \cdot 3 = \mathbf{3}$

  Kontrol: $6^5 = 7776$ ve $2^5 \cdot 3^4 = 32 \cdot 81 = 2592$ → $7776 : 2592 = 3$ ✓

✓ Doğru Sonuç: a) 2^4 b) $3^0 = 1$ c) 5^{-1} d) 3

4 a ve b sıfırdan farklı tam sayılar, x ve y birer tam sayı olmak üzere üç iddia ortaya atılmıştır:

I. Ela: "$a^x \cdot a^y = a^{x \cdot y}$'dir."
II. Mert: "$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$'tir."
III. Sude: "$a^x + a^x = a^{x+1}$'dir."

a) Ela'nın iddiası doğru mudur? Sayısal bir karşıt örnek veriniz ve doğrusunu yazınız.
b) Mert'in iddiası doğru mudur? Bir örnekle gösteriniz.
c) Sude'nin iddiası doğru mudur? Hangi tabanda doğru, hangi tabanda yanlış olduğunu inceleyiniz.

- **a) Ela haksızdır.**

  Tabanları aynı olan ifadeler çarpılırken üsler **toplanır**, çarpılmaz. Üslerin çarpılması **üssün üssü** kuralına aittir.

  Karşıt örnek: a = 2, x = 2, y = 3

  $2^2 \cdot 2^3 = 4 \cdot 8 = \mathbf{32}$

  Ela'nın kuralına göre: $2^{2 \cdot 3} = 2^6 = \mathbf{64}$ ×

devamı →

4 *(çözümün devamı)*

Doğrusu: $2^{2+3} = 2^5 = \mathbf{32}$ ✓

Doğru kural: $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

Ela muhtemelen $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$ kuralıyla karıştırmıştır. İki kuralı ayırt etmek için parantezin olup olmadığına bakmak yeterlidir.

- **b) Mert haklıdır.**

  Tabanları farklı, **üsleri aynı** olan ifadeler çarpılırken tabanlar çarpılır, ortak üs üsse yazılır.

  Örnek: $2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^3 = 10^3 = \mathbf{1000}$

  Kontrol: $8 \cdot 125 = 1000$ ✓

  Neden doğru: Açılım yazılırsa görülür:

  $2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5) = (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = 10^3$ ✓

  Çarpanlar yeniden gruplanarak eşleştirilebildiği için kural işler.

  Bir örnek daha: $3^4 \cdot 7^4 = 21^4$ ✓

- **c) Sude'nin iddiası GENEL OLARAK YANLIŞTIR.**

  Doğrusu şudur: $a^x + a^x = \mathbf{2 \cdot a^x}$

  Taban 2 ise doğrudur:

  $2^5 + 2^5 = 2 \cdot 2^5 = 2^1 \cdot 2^5 = \mathbf{2^6}$ ✓

  Burada çarpan olan 2, tabanla aynı olduğu için üsse eklenebildi.

  Taban 2'den farklıysa yanlıştır.

  Karşıt örnek: $a = 3$, $x = 2$

  $3^2 + 3^2 = 9 + 9 = \mathbf{18}$

  Sude'nin kuralına göre: $3^3 = \mathbf{27}$ ×

  Doğrusu: $2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = \mathbf{18}$ ✓ ve bu daha fazla sadeleşmez.

  Sonuç: Kural yalnızca **a = 2** iken geçerlidir. Sude, 2 tabanlı örneklerden yola çıkıp haksız bir genelleme yapmıştır.

✓ Doğru Sonuç: a) Yanlış; $2^2 \cdot 2^3 = 32$, 2^6 değil. Doğrusu a^(x+y) b) Doğru; $2^3 \cdot 5^3 = 10^3$ c) Yalnız taban 2 iken doğru; $3^2 + 3^2 = 18 \neq 27$

5 Bir öğrenci defterine şunu yazmıştır:

"$3^{12} / 3^4$ işleminde tabanlar aynı olduğu için üsler bölünür:
$3^{12} / 3^4 = 3^{(12:4)} = 3^3$"

a) Öğrencinin hatası nedir? Doğru kuralı yazınız.
b) İşlemin doğru sonucunu bulunuz.
c) Öğrencinin yöntemini küçük sayılarla sınayarak yanlış olduğunu gösteriniz.
d) Üsler hangi işlemlerde toplanır, çıkarılır ve çarpılır? Üsler bölünür mü?

- **a)** Öğrenci, bölme işleminde üsleri de **bölmüştür**. Oysa tabanları aynı olan üslü ifadelerde bölme yapılırken **payın üssünden paydanın üssü çıkarılır**.

  Doğru kural:

  $a^x / a^y = a^{x-y}$

  Üslerin bölünmesi diye bir kural **hiçbir işlemde yoktur**.

- **b)** Doğru çözüm:

  $3^{12} / 3^4 = 3^{(12-4)} = \mathbf{3^8}$

  Öğrencinin bulduğu $3^3 = 27$, doğru cevap $3^8 = 6561$'dir. Arada çok büyük bir fark var.

- **c)** Öğrencinin yöntemini, elle hesaplanabilecek küçük sayılarla deneyelim:

  $2^6 / 2^2 = ?$

  Öğrencinin yöntemi: $2^{(6:2)} = 2^3 = \mathbf{8}$

  Doğru kural: $2^{(6-2)} = 2^4 = \mathbf{16}$

  Gerçek hesap: $2^6 = 64$ ve $2^2 = 4 \rightarrow 64 : 4 = \mathbf{16}$ ✓

  Doğru kural gerçek sonucu verdi, öğrencinin yöntemi vermedi ×

  Bu, bir kuraldan emin olamadığında küçük sayılarla sınamanın ne kadar işe yaradığını gösteriyor.

- **d)** Üslerle yapılan üç işlem şunlardır:

  TOPLANIR → aynı tabanlı **çarpma**da: $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

  Örnek: $2^3 \cdot 2^5 = 2^8$

  ÇIKARILIR → aynı tabanlı **bölme**de: $a^x / a^y = a^{x-y}$

  Örnek: $2^8 / 2^5 = 2^3$

  ÇARPILIR → **üssün üssü** alınırken: $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

devamı →

5 *(çözümün devamı)*

Örnek: $(2^3)^5 = 2^{15}$

Üsler hiçbir işlemde BÖLÜNMEZ. Bu dördüncü bir kural değil, sık yapılan bir hatadır.

✓ Doğru Sonuç: a) Üsleri bölmüş; doğrusu çıkarmaktır b) 3^8 c) 2^6 / 2^2 için yöntemi 8 verir, gerçek 16 d) Çarpmada toplanır, bölmede çıkarılır, üssün üssünde çarpılır; bölünmez

2. Bölüm Soru 6–10

6 Aşağıdaki eşitliklerde x birer tam sayıdır.

a) $2^x \cdot 2^5 = 2^{13}$ **b)** $3^x / 3^{-2} = 3^7$ **c)** $(4^x)^2 = 4^6$ **d)** $8^x = 32^6$

Her şıkta x değerini bulunuz ve bulduğunuz değeri yerine koyarak kontrol ediniz. Son olarak dört x değerinin toplamını hesaplayınız.

- **a)** Tabanlar aynı, çarpma → üsler toplanır:

  $2^x \cdot 2^5 = 2^{x+5}$

  $2^{x+5} = 2^{13}$ → tabanlar eşit olduğuna göre üsler de eşittir:

  $x + 5 = 13$ → **x = 8**

  Kontrol: $2^8 \cdot 2^5 = 2^{13}$ ✓

- **b)** Tabanlar aynı, bölme → üsler çıkarılır:

  $3^x / 3^{-2} = 3^{x-(-2)} = 3^{x+2}$

  $3^{x+2} = 3^7 \rightarrow x + 2 = 7 \rightarrow$ **x = 5**

  Kontrol: $3^5 / 3^{-2} = 3^{5+2} = 3^7$ ✓

  Dikkat: Paydadaki üs negatif olduğu için çıkarma işlemi **toplamaya** dönüştü. İşaret hatası yapmamak için parantezi mutlaka yaz.

- **c)** Üssün üssü → üsler çarpılır:

  $(4^x)^2 = 4^{2x}$

  $4^{2x} = 4^6 \rightarrow 2x = 6 \rightarrow$ **x = 3**

  Kontrol: $(4^3)^2 = 4^6$ ✓

- **d)** Tabanlar farklı; ikisini de 2'ye çevirelim:

  $8^x = (2^3)^x =$ **2^{3x}**

devamı →

6 *(çözümün devamı)*

$32^6 = (2^5)^6 = \mathbf{2^{30}}$

$2^{3x} = 2^{30} \rightarrow 3x = 30 \rightarrow \mathbf{x = 10}$

Kontrol: $8^{10} = (2^3)^{10} = 2^{30}$ ✓ ve $32^6 = 2^{30}$ ✓

Toplam: 8 + 5 + 3 + 10 = **26**

✓ Doğru Sonuç: a) x = 8 b) x = 5 c) x = 3 d) x = 10 Toplam: 26

7 Aşağıdaki tabloda bazı işlemlerin 10'un kuvveti biçimindeki yazılışları ve basamak sayıları verilmiş, bir kısmı boş bırakılmıştır.

İşlem	10'un Kuvveti Biçimi	Basamak Sayısı
$2^8 \cdot 5^8$	10^8	9
$2^{10} \cdot 5^7$	?	?
$4^5 \cdot 25^5$	?	?
$2^6 \cdot 5^9$	?	?

a) Tablodaki boş bırakılan yerleri doldurunuz.
b) Hangi satırlarda sonuç tam olarak 10'un bir kuvveti çıkmıştır? Ortak özellikleri nedir?
c) $2^a \cdot 5^b$ ifadesinde a > b ise sonuç hangi biçimde olur?
d) $2^{15} \cdot 5^{12}$ işleminin sonucu kaç basamaklıdır?

- **a)** Her satırda 2 ile 5'in üsleri eşitlenir; artan kısım öne çarpan olur.

$2^{10} \cdot 5^7$: Küçük üs 7 → $2^{10} = 2^3 \cdot 2^7$

$2^3 \cdot (2^7 \cdot 5^7) = 2^3 \cdot 10^7 = \mathbf{8 \cdot 10^7}$

8'in yanında 7 sıfır → **8 basamak**

$4^5 \cdot 25^5$: Önce tabanları çevirelim:

$4^5 = (2^2)^5 = 2^{10}$ · $25^5 = (5^2)^5 = 5^{10}$

$2^{10} \cdot 5^{10} = \mathbf{10^{10}}$ → 1'in yanında 10 sıfır → **11 basamak**

$2^6 \cdot 5^9$: Küçük üs 6 → $5^9 = 5^6 \cdot 5^3$

devamı →

7 *(çözümün devamı)*

$(2^6 \cdot 5^6) \cdot 5^3 = 10^6 \cdot 125 =$ **$125 \cdot 10^6$**

125 üç basamaklı, yanında 6 sıfır → 3 + 6 = **9 basamak**

- **b)** Sonucun tam olarak 10'un kuvveti çıktığı satırlar: **1. satır ($2^8 \cdot 5^8$)** ve **3. satır ($4^5 \cdot 25^5$)**

  Ortak özellikleri: Her ikisinde de 2 ile 5'in üsleri **tam olarak eşittir** (8 ile 8; 10 ile 10). Bu durumda hiçbir çarpan artmaz ve sonuç 1'in yanında sıfırlardan oluşan bir sayı olur.

  Diğer iki satırda üsler eşit olmadığı için artan çarpanlar (8 ve 125) sayının başında kalmıştır.

- **c)** a > b ise **2'nin üssü fazladır**. Fazlalık ayrılır:

  $2^a \cdot 5^b = 2^{a-b} \cdot (2^b \cdot 5^b) =$ **$2^{a-b} \cdot 10^b$**

  Yani sonuç, **2'nin bir kuvvetinin** yanında b tane sıfır bulunan bir sayıdır. Baştaki çarpan her zaman 2'nin kuvveti olduğu için 2, 4, 8, 16, 32... gibi bir sayıyla başlar.

  Tersine b > a olsaydı baştaki çarpan **5'in bir kuvveti** olurdu (5, 25, 125...). Tablodaki son satır bunun örneğidir.

- **d)** $2^{15} \cdot 5^{12}$

  Küçük üs 12 → $2^{15} = 2^3 \cdot 2^{12}$

  $2^3 \cdot (2^{12} \cdot 5^{12}) = 2^3 \cdot 10^{12} =$ **$8 \cdot 10^{12}$**

  8 tek basamaklı, yanında 12 sıfır var:

  Basamak sayısı = 1 + 12 = **13 basamak**

  Sayı: 8 000 000 000 000 ✓

✔ Doğru Sonuç: a) $8 \cdot 10^7$ (8 basamak), 10^{10} (11 basamak), $125 \cdot 10^6$ (9 basamak) b) 1. ve 3. satır; 2 ile 5'in üsleri eşit c) 2^(a−b) · 10^b d) 13 basamak

8 **Soru:** $5^7 + 5^7 + 5^7 + 5^7 + 5^7$ işleminin sonucunu bulunuz.

Bir öğrenci şöyle çözmüştür:
"Beş tane 5^7 var ve tabanları aynı. O hâlde üsler toplanır:
$5^{(7+7+7+7+7)} = 5^{35}$"

a) Öğrencinin hatası nedir?
b) İşlemin doğru sonucunu bulunuz.
c) Öğrencinin yöntemini küçük sayılarla sınayarak yanlış olduğunu gösteriniz.
d) Aynı işlem $7^7 + 7^7 + 7^7 + 7^7 + 7^7$ olsaydı sonuç ne olurdu? Neden farklı?

- **a)** Öğrenci, **çarpmaya** ait olan "aynı tabanlı ifadelerde üsler toplanır" kuralını **toplama** işlemine uygulamıştır.

  Üsler yalnızca $\mathbf{a^x \cdot a^y}$ biçimindeki **çarpımlarda** toplanır. Toplamada üslerle hiçbir işlem yapılmaz.

  Doğru yöntem: kaç tane aynı ifadeden bulunduğu sayılır ve **ortak çarpan parantezine** alınır.

- **b)** Beş tane 5^7 var:

  $5^7 + 5^7 + 5^7 + 5^7 + 5^7 = \mathbf{5 \cdot 5^7}$

  $5 = 5^1$ olduğuna göre tabanlar aynı; şimdi **çarpma** olduğu için üsler toplanabilir:

  $5^1 \cdot 5^7 = \mathbf{5^8}$

  Öğrencinin bulduğu 5^{35} ile doğru cevap 5^8 arasındaki fark muazzamdır.

- **c)** Küçük sayılarla sınayalım:

  $2^3 + 2^3 = ?$

  Öğrencinin yöntemi: $2^{(3+3)} = 2^6 = \mathbf{64}$

  Doğru yöntem: $2 \cdot 2^3 = 2^4 = \mathbf{16}$

  Gerçek hesap: $2^3 = 8 \rightarrow 8 + 8 = \mathbf{16}$ ✓

  Doğru yöntem gerçek sonucu verdi, öğrencinin yöntemi vermedi ×

  Mantık kontrolü de hatayı yakalar: iki sayıyı toplamak sonucu **iki katına** çıkarır, 8 katına değil.

- **d)** Beş tane 7^7 var:

  $7^7 + 7^7 + 7^7 + 7^7 + 7^7 = \mathbf{5 \cdot 7^7}$

  Burada **daha fazla sadeleşmez**. Cevap $\mathbf{5 \cdot 7^7}$ olarak bırakılır.

devamı →

8 *(çözümün devamı)*

Neden farklı: İlk soruda tekrar sayısı (5), tabanla **aynıydı**; bu yüzden 5^1 yazılıp üsler toplanabildi. Burada tekrar sayısı 5, taban ise 7'dir; 5 sayısı 7'nin bir kuvveti **değildir**.

Genel kural: Tekrar sayısını tabanın bir kuvveti olarak yazabiliyorsan sonuç tek bir üslü ifadeye iner; yazamıyorsan çarpan olarak kalır.

Örnek: $3^5 + 3^5 + 3^5 = 3 \cdot 3^5 = 3^6$ ✓ ama $3^5 + 3^5 = 2 \cdot 3^5$ (sadeleşmez)

✓ Doğru Sonuç: a) Çarpma kuralını toplamaya uygulamış b) $5 \cdot 5^7 = 5^8$ c) $2^3 + 2^3$ için yöntemi 64 verir, gerçek 16 d) $5 \cdot 7^7$; 5 sayısı 7'nin kuvveti olmadığı için sadeleşmez

9 Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını **tek bir üslü ifade** biçiminde yazınız.
a) $(4^7 + 4^7 + 4^7 + 4^7) / 16^3$
b) $81^5 / (3^8 + 3^8 + 3^8)$
c) $(2^{10} + 2^{10} + 2^{10} + 2^{10}) / 2^5$
d) $7^5 + 7^5$ işleminin sonucunu yazınız ve neden (a) şıkkındaki gibi sadeleşmediğini açıklayınız.

Her adımda payı ve paydayı ayrı ayrı sadeleştiriniz.

- **a) Pay:** Dört tane 4^7 → $4 \cdot 4^7 = 4^1 \cdot 4^7 = \mathbf{4^8}$

  Şimdi 2 tabanına çevirelim: $4^8 = (2^2)^8 = \mathbf{2^{16}}$

  Payda: $16^3 = (2^4)^3 = \mathbf{2^{12}}$

  Bölme: $2^{16} / 2^{12} = 2^{(16-12)} = \mathbf{2^4}$

  Sayısal değeri: 16
- **b) Pay:** $81^5 = (3^4)^5 = \mathbf{3^{20}}$

  Payda: Üç tane 3^8 → $3 \cdot 3^8 = 3^1 \cdot 3^8 = \mathbf{3^9}$

  Bölme: $3^{20} / 3^9 = 3^{(20-9)} = \mathbf{3^{11}}$

  Buradaki püf nokta paydadaki tekrar sayısının (3) tabanla aynı olmasıydı; bu yüzden tek bir üslü ifadeye indi.
- **c) Pay:** Dört tane 2^{10} → $4 \cdot 2^{10}$

  $4 = 2^2$ olduğuna göre: $2^2 \cdot 2^{10} = \mathbf{2^{12}}$

  Payda: $\mathbf{2^5}$

  Bölme: $2^{12} / 2^5 = 2^{(12-5)} = \mathbf{2^7}$

devamı →

9 *(çözümün devamı)*

Dikkat: Tekrar sayısı 4, tabanla (2) aynı değildi ama 2'nin bir **kuvveti** olduğu için yine sadeleşti. Kural budur: tekrar sayısını tabanın kuvveti olarak yazabilmek yeterlidir.

- **d)** İki tane 7^5 var:

  $7^5 + 7^5 = \mathbf{2 \cdot 7^5}$

  Bu ifade **daha fazla sadeleşmez**; cevap $2 \cdot 7^5$ olarak bırakılır.

  Neden sadeleşmedi: Tekrar sayısı **2**, taban ise **7**'dir. 2 sayısı 7'nin hiçbir kuvveti değildir ($7^1 = 7$, $7^0 = 1$); ikisi farklı asal sayılardır.

  Karşılaştırma:

  - (a) şıkkında tekrar sayısı 4 = 4^1 → tabanla aynı → sadeleşti ✓
  - (c) şıkkında tekrar sayısı 4 = 2^2 → tabanın kuvveti → sadeleşti ✓
  - (d) şıkkında tekrar sayısı 2, taban 7 → ortak asal yok → sadeleşmedi ×

  Sonucu isterseniz sayı olarak da yazabilirsiniz: $2 \cdot 7^5 = 2 \cdot 16\,807 =$ **33 614**

✓ Doğru Sonuç: a) 2^4 b) 3^{11} c) 2^7 d) $2 \cdot 7^5$; tekrar sayısı 2, taban 7'nin kuvveti olmadığı için sadeleşmez

10 Aşağıdaki sekiz üslü ifade, **değerlerine göre** gruplandırılacaktır.

I. 2^{12} **II.** 4^6 **III.** 8^4 **IV.** 16^3
V. 2^6 **VI.** 4^3 **VII.** 64^1 **VIII.** 2^{10}

a) Her ifadeyi 2 tabanına çevirerek yazınız.
b) Değeri birbirine eşit olanları gruplandırınız. Her grubun sayısal değerini yazınız.
c) Hiçbir gruba girmeyen ifade hangisidir? Değeri kaçtır?
d) Bu soru, üslü ifadeler karşılaştırılırken nelere dikkat edilmesi gerektiğini gösteriyor? Açıklayınız.

- **a)** Bütün tabanları 2'nin kuvveti olarak yazıp üssün üssü kuralını uygulayalım:

  I. $2^{12} \rightarrow \mathbf{2^{12}}$

  II. $4^6 = (2^2)^6 = \mathbf{2^{12}}$

  III. $8^4 = (2^3)^4 = \mathbf{2^{12}}$

  IV. $16^3 = (2^4)^3 = \mathbf{2^{12}}$

  V. $2^6 \rightarrow \mathbf{2^6}$

devamı →

10 *(çözümün devamı)*

VI. $4^3 = (2^2)^3 = \mathbf{2^6}$

VII. $64^1 = (2^6)^1 = \mathbf{2^6}$

VIII. $2^{10} \rightarrow \mathbf{2^{10}}$

- **b)** Gruplar:

  1. grup — değeri $2^{12} = 4096$:

  I (2^{12}), II (4^6), III (8^4), IV (16^3) → **4 ifade**

  2. grup — değeri $2^6 = 64$:

  V (2^6), VI (4^3), VII (64^1) → **3 ifade**

  Dikkat: Dört farklı görünüşlü ifade (2^{12}, 4^6, 8^4, 16^3) aynı sayıyı gösteriyor. Hepsinde **taban × üs** sonucu 12 çıkıyor: 1·12 = 2·6 = 3·4 = 4·3 = 12 (2'nin üsleri cinsinden).

- **c)** Hiçbir gruba girmeyen ifade **VIII. (2^{10})**'dur.

  Değeri: $2^{10} = \mathbf{1024}$

  Büyüklük sırası: 2^6 (64) < 2^{10} (1024) < 2^{12} (4096)

  Yani 2^{10}, iki grubun tam ortasında kalır.

- **d)** Bu soru üç şeyi gösteriyor:

  1. Üslü ifadeler **görünüşe göre** karşılaştırılamaz. 16^3 ile 2^{12} tamamen farklı görünür ama aynı sayıdır.

  2. Yalnızca **üslere bakmak** yanıltır. 8^4 ifadesinin üssü 4, 2^6 ifadesinin üssü 6'dır; buna rağmen 8^4 çok daha büyüktür (4096 > 64).

  3. Yalnızca **tabanlara bakmak** da yanıltır. 64^1 ifadesinin tabanı en büyüktür ama değeri en küçük gruptadır.

  Doğru yöntem: Karşılaştırmadan önce bütün ifadeleri **ortak bir asal tabana** çevirmek. Ondan sonra yalnızca üsleri karşılaştırmak yeterlidir.

✓ Doğru Sonuç: a) $2^{12}, 2^{12}, 2^{12}, 2^{12}, 2^6, 2^6, 2^6, 2^{10}$ b) 1. grup (4096): I, II, III, IV — 2. grup (64): V, VI, VII c) VIII ($2^{10} = 1024$) d) Karşılaştırmadan önce ortak asal tabana çevir

3. Bölüm Soru 11–15

11 a ve b sıfırdan farklı tam sayılar, x ve y birer tam sayı olmak üzere üç iddia ortaya atılmıştır:

I. "$(a^x)^y = (a^y)^x$'tir."
II. "$a^x / a^x = 1$'dir ve bu, $a^0 = 1$ kuralıyla tutarlıdır."
III. "$a^x = b^x$ ise a = b'dir."

a) I. iddia doğru mudur? Bir örnekle gösterip gerekçelendiriniz.
b) II. iddia doğru mudur? Bölme kuralını kullanarak gösteriniz.
c) III. iddia doğru mudur? Doğru değilse iki farklı karşıt örnek verip iddiayı düzeltiniz.

- **a) I. iddia DOĞRUDUR.**

  Üssün üssü kuralına göre her iki taraf da $a^{x\cdot y}$'ye eşittir:

  $(a^x)^y = a^{x\cdot y}$ ve $(a^y)^x = a^{y\cdot x}$

  Çarpma işleminde **değişme özelliği** olduğu için $x \cdot y = y \cdot x$'tir; dolayısıyla iki taraf eşittir ✓

  Örnek: a = 2, x = 3, y = 4

  $(2^3)^4 = 2^{12} =$ **4096**

  $(2^4)^3 = 2^{12} =$ **4096** ✓

  Kontrol: $8^4 = 4096$ ve $16^3 = 4096$ ✓ İki farklı yoldan aynı sayı.

- **b) II. iddia DOĞRUDUR.**

  Bölme kuralını uygulayalım:

  $a^x / a^x = a^{x-x} =$ **a^0**

  Öte yandan bir sayının kendisine bölümü **1**'dir ($a^x \neq 0$ olduğuna göre).

  İki sonucu birleştirirsek: **$a^0 = 1$** ✓

  Bu, $a^0 = 1$ kuralının **neden böyle tanımlandığını** açıklar: bölme kuralının her durumda tutarlı çalışması için sıfırıncı kuvvetin 1 olması gerekir.

  Örnek: $5^3 / 5^3 = 125 : 125 = 1$ ✓ ve kuralla $5^0 = 1$ ✓

  Not: a = 0 olsaydı $0^3 / 0^3 = 0 : 0$ olurdu ve bu tanımsızdır. "a sıfırdan farklı" koşulu bu yüzden vardır.

- **c) III. iddia YANLIŞTIR.** İki durumda bozulur:

  1. karşıt örnek — üs çift olduğunda:

  a = −2, b = 2, x = 2

devamı →

11 *(çözümün devamı)*

$(-2)^2 = \mathbf{4}$ ve $2^2 = \mathbf{4}$ → eşit ✓

Ama $-2 \neq 2$ ×

2. karşıt örnek — üs sıfır olduğunda:

$a = 3, b = 7, x = 0$

$3^0 = \mathbf{1}$ ve $7^0 = \mathbf{1}$ → eşit ✓

Ama $3 \neq 7$ ×

(Bu durumda a ve b **herhangi** iki sayı olabilir.)

Düzeltilmiş iddia:

"$a^x = b^x$ ve **x tek bir tam sayı** ise a = b'dir. x **çift** ise a = b ya da a = −b olabilir; x = 0 ise hiçbir şey söylenemez."

Örnek: $(-2)^3 = -8$ ve $2^3 = 8$ → eşit değil; üs tek olduğunda karışıklık ortadan kalkar ✓

✓ Doğru Sonuç: a) I doğru (x·y = y·x) b) II doğru; $a^x/a^x = a^0 = 1$, kuralın gerekçesi budur c) III yanlış; $(-2)^2 = 2^2$ ve $3^0 = 7^0$. Üs tek olmalı

12 Aşağıdaki üslü ifadeleri **küçükten büyüğe** sıralayınız.
a) 8^6, 4^9, 2^{19}
b) 3^{15}, 5^{10}, 2^{20}
c) 2^{-6}, 4^{-3}, 8^{-2}
d) Hangi durumda **tabanları**, hangi durumda **üsleri** eşitlemek gerekir? Açıklayınız.

Her şıkta kullandığınız eşitleme yöntemini yazınız.

- **a)** Üç tabanın da 2'nin kuvveti olduğuna dikkat edelim; **tabanları eşitleyelim**:

  $8^6 = (2^3)^6 = \mathbf{2^{18}}$

  $4^9 = (2^2)^9 = \mathbf{2^{18}}$

  $2^{19} = \mathbf{2^{19}}$

  Tabanlar eşit → üssü küçük olan küçüktür:

  $2^{18} = 2^{18} < 2^{19}$

  $\mathbf{8^6 = 4^9 < 2^{19}}$

  Dikkat: İlk iki ifade **birbirine eşit** çıktı. Sıralarken bunu belirtmek gerekir.

- **b)** Tabanlar 3, 5 ve 2; üçü de farklı asal sayı olduğu için **tabanlar eşitlenemez**. O hâlde **üsleri eşitleyelim**.

devamı →

12 *(çözümün devamı)*

Üsler 15, 10 ve 20'dir; en büyük ortak bölenleri **5**:

$3^{15} = (3^3)^5 = \mathbf{27^5}$

$5^{10} = (5^2)^5 = \mathbf{25^5}$

$2^{20} = (2^4)^5 = \mathbf{16^5}$

Üsler eşit → tabanı küçük olan küçüktür:

$16^5 < 25^5 < 27^5$

$\mathbf{2^{20} < 5^{10} < 3^{15}}$

Not: Üssü en büyük olan 2^{20} aslında **en küçük** sayıdır. Eşitleme yapmadan tahmin etmek yanıltırdı.

- **c)** Yine tabanlar 2'nin kuvveti; **tabanları eşitleyelim**:

  $2^{-6} = \mathbf{2^{-6}}$

  $4^{-3} = (2^2)^{-3} = 2^{2.(-3)} = \mathbf{2^{-6}}$

  $8^{-2} = (2^3)^{-2} = 2^{3.(-2)} = \mathbf{2^{-6}}$

  Üçü de birbirine eşittir!

  Ortak değerleri: $2^{-6} = 1/2^6 = \mathbf{1/64}$

  Üç ifadede de taban ile üssün çarpımı −6 çıkıyor: $1\cdot(-6) = 2\cdot(-3) = 3\cdot(-2) = -6$ ✓

  Bu, negatif üslerde de aynı kuralın işlediğini gösteriyor.

- **d)** Karar ölçütü şudur:

  Tabanları eşitle → bütün tabanlar **aynı asal sayının kuvvetiyse**.

  Örnek: 2, 4, 8, 16, 32 hepsi 2'nin kuvvetidir → 2 tabanında birleştir. (a) ve (c) şıkları böyleydi.

  Bu yol daha kolaydır; çünkü sonra yalnızca üsleri karşılaştırmak yeterlidir.

  Üsleri eşitle → tabanlar **farklı asal sayılar** içeriyorsa, yani ortak bir tabana çevrilemiyorsa.

  Örnek: 2, 3, 5 tabanları → eşitlenemez. (b) şıkkı böyleydi.

  Bu durumda üsler **EBOB'da** eşitlenir; böylece tabanlar olabildiğince küçük kalır ve karşılaştırma kolaylaşır.

devamı →

12 *(çözümün devamı)*

Özet: Önce "tabanlar ortak bir asala indirgenebiliyor mu?" diye sor. Cevap evetse tabanları, hayırsa üsleri eşitle.

✔ Doğru Sonuç: a) $8^6 = 4^9 < 2^{19}$ b) $2^{20} < 5^{10} < 3^{15}$ c) Üçü de eşit: $2^{-6} = 1/64$ d) Tabanlar ortak asala indirgenebiliyorsa tabanları, indirgenemiyorsa üsleri eşitle

13 Bir veri merkezindeki bir diskin kapasitesi **2^{40} bayt**'tır. Bu diske yüklenecek her dosyanın boyutu **2^{25} bayt**'tır.

(Bilgi: 1 KB = 2^{10} bayt, 1 MB = 2^{20} bayt, 1 GB = 2^{30} bayt'tır.)

a) Diske kaç dosya sığar? Sonucu hem üslü ifade hem sayı olarak yazınız.
b) Diskin kapasitesi 4 katına çıkarılırsa kaç dosya sığar?
c) Dosya boyutu yarıya indirilirse (kapasite 2^{40} bayt iken) kaç dosya sığar?
d) Diskin kapasitesi kaç GB'tır?

- **a)** Sığacak dosya sayısı = kapasite ÷ dosya boyutu

  $2^{40} / 2^{25}$ → tabanlar aynı, üsler çıkarılır:

  $= 2^{(40-25)} = \mathbf{2^{15}}$

  Sayısal değeri: $2^{10} = 1024$ ve $2^5 = 32$ olduğuna göre

  $2^{15} = 2^{10} \cdot 2^5 = 1024 \cdot 32 = \mathbf{32\,768}$ **dosya**

- **b)** Kapasite 4 katına çıkarsa:

  $4 \cdot 2^{40} = 2^2 \cdot 2^{40} = \mathbf{2^{42}}$ bayt

  Yeni dosya sayısı:

  $2^{42} / 2^{25} = 2^{(42-25)} = \mathbf{2^{17}}$

  Sayısal değeri: $2^{17} = 2^{15} \cdot 2^2 = 32\,768 \cdot 4 =$ **131 072 dosya**

  Kapasite 4 katına çıkınca dosya sayısı da **4 katına** çıktı ✓ ($2^{15} \to 2^{17}$)

- **c)** Dosya boyutu yarıya inerse:

  $2^{25} / 2 = 2^{25} / 2^1 = \mathbf{2^{24}}$ bayt

  Dosya sayısı:

  $2^{40} / 2^{24} = 2^{(40-24)} = \mathbf{2^{16}}$

  Sayısal değeri: $2^{16} =$ **65 536 dosya**

devamı →

13 *(çözümün devamı)*

Dosya boyutu yarıya inince dosya sayısı **iki katına** çıktı ($2^{15} \to 2^{16}$) ✓

Karşılaştırma: (b) şıkkında kapasiteyi 4 katına çıkarmak, (c) şıkkında dosyayı yarıya indirmekten **daha etkili** oldu.

- **d)** 1 GB = 2^{30} bayt olduğuna göre:

  Kapasite = $2^{40} / 2^{30} = 2^{(40-30)} =$ **2^{10} GB**

  Sayısal değeri: $2^{10} =$ **1024 GB**

  Not: 1024 GB aynı zamanda **1 TB**'tır (1 TB = 2^{40} bayt). Yani diskin kapasitesi tam olarak 1 terabayttır ✓

  Bu soru, bilgisayarda bütün birimlerin neden 2'nin kuvvetleriyle tanımlandığını gösteriyor: bölme işlemleri üslerin çıkarılmasına indirgeniyor ve hesap çok kolaylaşıyor.

✓ Doğru Sonuç: a) $2^{15} = 32\,768$ dosya b) $2^{17} = 131\,072$ dosya c) $2^{16} = 65\,536$ dosya d) $2^{10} = 1024$ GB (yani 1 TB)

14 a pozitif bir tam sayı, x ve y birer tam sayı olmak üzere üç iddia ortaya atılmıştır:

I. "$(-2)^6 = 2^6$'dır."
II. "$(-2^3)^2 = (-2^2)^3$'tür."
III. "$((-a)^x)^y$ ifadesinin işaretini, **x · y** çarpımının tek mi çift mi olduğu belirler."

a) I. iddia doğru mudur? Gerekçelendiriniz.
b) II. iddia doğru mudur? İki tarafı da hesaplayarak gösteriniz.
c) III. iddia doğru mudur? İki örnekle sınayıp gerekçelendiriniz.

- **a) I. iddia DOĞRUDUR.**

  $(-2)^6$ ifadesinde parantez var, yani eksi tabanın parçasıdır. Üs **6 (çift)** olduğundan altı negatif çarpan ikişer ikişer eşleşir ve sonuç pozitif çıkar:

  $(-2)^6 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2)(-2) =$ **+64**

  $2^6 =$ **64** ✓ Eşit.

  Genel kural: x çift ise $(-a)^x = a^x$'tir.

  Dikkat: Üs tek olsaydı eşitlik bozulurdu: $(-2)^5 = -32$ ama $2^5 = +32$ ×

- **b) II. iddia YANLIŞTIR.** İki tarafı ayrı ayrı hesaplayalım:

  Sol taraf: $(-2^3)^2$

devamı →

14 *(çözümün devamı)*

Parantez içi: -2^3 → parantez yok, üs yalnız 2'ye ait → $2^3 = 8$ → **−8**

Dıştaki üs 2 (çift) → $(-8)^2$ = **+64**

Sağ taraf: $(-2^2)^3$

Parantez içi: $-2^2 = -(2^2)$ = **−4**

Dıştaki üs 3 (tek) → $(-4)^3$ = **−64**

+64 ≠ −64 × İddia bozuldu.

İki ifadenin sayısal büyüklüğü aynı (64) ama işaretleri zıttır. Fark, içerideki ifadelerin ve dıştaki üslerin tekliğinden kaynaklanır.

- **c) III. iddia DOĞRUDUR.**

  Üssün üssü kuralına göre:

  $((-a)^x)^y = (-a)^{x \cdot y}$

  Negatif tabanlı bir kuvvetin işaretini **üssün tekliği** belirler. Buradaki üs x · y çarpımı olduğuna göre, işareti belirleyen de bu çarpımdır.

  1. örnek: a = 2, x = 3, y = 2

  x · y = 6 → **çift** → sonuç **pozitif** olmalı

  $((-2)^3)^2 = (-8)^2$ = **+64** ✓

  Doğrudan: $(-2)^6$ = +64 ✓

  2. örnek: a = 2, x = 3, y = 3

  x · y = 9 → **tek** → sonuç **negatif** olmalı

  $((-2)^3)^3 = (-8)^3$ = **−512** ✓

  Doğrudan: $(-2)^9$ = −512 ✓

  Önemli not: Bu kural (b) şıkkındaki ifadelere **uygulanamaz**; çünkü orada eksi parantezin **dışındaydı** (-2^3 biçimindeydi). Kural yalnızca eksi **tabanın içinde** olduğunda, yani $(-a)^x$ biçiminde geçerlidir.

✓ Doğru Sonuç: a) I doğru; üs çift olduğu için $(-2)^6 = 2^6$ b) II yanlış; +64 ile −64 c) III doğru; $((-a)^x)^y = (-a)^{(x \cdot y)}$, işareti x·y'nin tekliği belirler

15 Bir "sayı atölyesi" etkinliğinde öğrencilerden, verilen koşulları sağlayan **üslü ifadeler üretmeleri** isteniyor. **Dikkat:** Bir maddede koşulu sağlayan ifade **bulunmayabilir**; öyleyse bunu gerekçesiyle yazınız.

a) Değeri 2^{12} olan, tabanı 2'den farklı üç üslü ifade.
b) Çarpımı 10^6 olan, tabanları birbirinden farklı iki üslü ifade.
c) Bölümü 3^5 olan, ikisinin de tabanı 3'ten farklı iki üslü ifade.
d) Sonucu 15 basamaklı olan, 2 ve 5'in kuvvetlerinden oluşan bir çarpma işlemi.
e) $2^x = 3^y$ eşitliğini sağlayan, sıfırdan farklı x ve y tam sayıları.

- **a)** 2^{12} ifadesinde taban ile üssün "çarpımı" 12 olacak biçimde parçalara ayırırız. 12 = 2 · 6 = 3 · 4 = 4 · 3 = 6 · 2:

  4^6 = $(2^2)^6$ = 2^{12} ✓

  8^4 = $(2^3)^4$ = 2^{12} ✓

  16^3 = $(2^4)^3$ = 2^{12} ✓

  Başka cevaplar: 64^2 = $(2^6)^2$ = 2^{12} ✓ · 4096^1 = 2^{12} ✓

  Hepsinin sayısal değeri **4096**'dır.

- **b)** 10 = 2 · 5 olduğuna göre "üsleri aynı olan çarpma" kuralını **tersten** kullanalım:

  10^6 = $(2 \cdot 5)^6$ = **$2^6 \cdot 5^6$**

  Cevap: 2^6 ve 5^6

  Kontrol: 64 · 15 625 = 1 000 000 = 10^6 ✓

  Başka cevap: 10^6 = 100^3 = $(4 \cdot 25)^3$ = **$4^3 \cdot 25^3$** ✓

  Kontrol: 64 · 15 625 = 1 000 000 ✓ (aynı sayılar)

- **c)** Bölümün 3^5 olması için pay ile paydanın oranı 3^5 olmalı. "Üsleri aynı olan bölme" kuralını kullanalım:

  (a / b)^5 = 3^5 → a : b = 3 olacak biçimde iki taban seçilir.

  Cevap: 27^5 / 9^5

  Kontrol: $(27 : 9)^5$ = 3^5 ✓ İki tabanın da 3'ten farklı olduğuna dikkat ✓

  Başka cevaplar: 15^5 / 5^5 = 3^5 ✓ · 6^5 / 2^5 = 3^5 ✓ · 12^5 / 4^5 = 3^5 ✓

- **d)** 15 basamaklı bir sayı için **10^{14}** gerekir (1'in yanında 14 sıfır → 15 basamak).

  10^{14} = $(2 \cdot 5)^{14}$ = **$2^{14} \cdot 5^{14}$**

  Cevap: $2^{14} \cdot 5^{14}$

  Kontrol: $2^{14} \cdot 5^{14}$ = 10^{14} → 1'in yanında 14 sıfır → 15 basamak ✓

devamı →

15 *(çözümün devamı)*

Başka cevaplar: Baştaki çarpanın basamak sayısını da hesaba katarak

$2^{16} \cdot 5^{13} = 2^3 \cdot 10^{13} = 8 \cdot 10^{13}$ → 1 + 13 = 14 basamak ×

$2^{17} \cdot 5^{13} = 2^4 \cdot 10^{13} = 16 \cdot 10^{13}$ → 2 + 13 = **15 basamak** ✓ Bu da olur.

- **e) Böyle x ve y YOKTUR.**

  Gerekçe: 2^x ifadesi, x'in değeri ne olursa olsun yalnızca **2'nin asal çarpanını** içerir (2, 4, 8, 16, … ya da 1/2, 1/4, …). Aynı biçimde 3^y yalnızca **3'ün asal çarpanını** içerir.

  Bir sayının asal çarpanlara ayrılışı **tektir**. Bir sayı hem yalnız 2'lerden hem yalnız 3'lerden oluşamaz.

  Tek istisna **1** sayısıdır (hiç asal çarpanı yoktur):

  $2^0 = 1$ ve $3^0 = 1$ → eşit ✓

  Ama soru x ve y'nin **sıfırdan farklı** olmasını istiyor; bu yüzden çözüm yoktur.

  Deneyelim: $2^1 = 2$, $3^1 = 3$ × · $2^2 = 4$, $3^2 = 9$ × · $2^3 = 8$, $3^2 = 9$ × — hiçbir zaman eşitlenemezler.

✓ Doğru Sonuç: a) 4^6, 8^4, 16^3 b) $2^6 \cdot 5^6$ c) $27^5 / 9^5$ d) $2^{14} \cdot 5^{14} = 10^{14}$ e) YOK — 2^x yalnız 2'lerden, 3^y yalnız 3'lerden oluşur (x = y = 0 hariç)