KONU ANLATIMLI SORU ÇÖZÜMLERİ

Üslü İfadelerde İşlemler ve Sıralama

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge **CC BY-NC 4.0** lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabilir.

ÇÖZÜMLÜ SORU 1 — Üssün üssünde parantez ve işaret ayrımı

Aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulunuz.

a) $(2^3)^4$

b) $(-2^3)^2$ ve $(-2^2)^3$

c) $((-2)^2)^{-3}$

d) (b) şıkkındaki iki sonucun neden farklı olduğunu açıklayınız.

1 **a) Üsler çarpılır**

Üssün üssü kuralı: $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

$(2^3)^4 = 2^{3.4} = \mathbf{2^{12}}$

Sayısal değeri: $2^{12} = \mathbf{4096}$

Kontrol: $(2^3)^4 = 8^4 = 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 4096$ ✓ İki yol da aynı sonucu verdi.

2 **b) İçerideki ifadenin işaretine önce karar ver**

$(-2^3)^2$:

Parantez içi: -2^3 → parantez yok, üs yalnızca 2'ye ait → $2^3 = 8$ → **-8**

Dıştaki üs **2 (çift)** → sonuç pozitif:

$(-8)^2 = \mathbf{+64}$ (üslü biçimde **2^6**)

$(-2^2)^3$:

Parantez içi: $-2^2 = -(2^2) = \mathbf{-4}$

Dıştaki üs **3 (tek)** → sonuç negatif:

$(-4)^3 = \mathbf{-64}$ (üslü biçimde **-2^6**)

3 **c) Negatif dış üs**

$((-2)^2)^{-3}$:

Parantez içi: $(-2)^2$ → parantez var, üs çift → **+4**

Şimdi dıştaki negatif üs:

$4^{-3} = 1/4^3 = \mathbf{1/64}$

Üsleri doğrudan çarparak da yapılabilir:

$((-2)^2)^{-3} = (-2)^{2.(-3)} = (-2)^{-6} = 1/(-2)^6 = 1/64$ ✓

(Üs −6 çift olduğu için paydadaki kuvvet pozitif çıktı.)

4 **d) Fark neden ortaya çıktı?**

İki ifadenin **sayısal büyüklüğü aynı** (64), işaretleri **zıt**.

Nedeni iki katmanlı:

1. İçerideki ifadeler farklı: $-2^3 = -8$ ve $-2^2 = -4$

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 1 **Üssün üssünde parantez ve işaret ayrımı** (devam)

2. Dıştaki üsler farklı: biri **çift** (2), diğeri **tek** (3)

Negatif bir sayının **çift** kuvveti pozitif, **tek** kuvveti negatiftir. Bu yüzden:
$(-8)^2 = +64$ ama $(-4)^3 = -64$

Sonuç: $(-2^3)^2 \neq (-2^2)^3$

Bu örnek, üsleri çarpmadan önce **içerideki ifadenin işaretine** karar vermenin neden zorunlu olduğunu gösteriyor. Doğrudan "üsleri çarpayım" denip $2^6 = 64$ yazmak, ikinci ifadede işareti kaçırmaya yol açar.

Sonuç: a) $2^{12} = 4096$ b) $(-2^3)^2 = +64 = 2^6$ ve $(-2^2)^3 = -64 = -2^6$ c) 1/64 d) İçerideki ifadeler ve dıştaki üslerin tekliği farklı olduğu için

Dikkat: Üssün üssünde önce içerideki ifadeyi tek bir sayıya indir ve işaretini belirle; sonra dıştaki üssü uygula.

ÇÖZÜMLÜ SORU 2 **Çarpma ve bölme kurallarını birlikte kullanma**

Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını **tek bir üslü ifade** biçiminde yazınız.
a) $2^7 \cdot 4^3$
b) $9^2 \cdot 27^2 \cdot 81^3$
c) $16^{-8} : 32^{-3}$
d) $(10^4 \cdot 10^{-2}) : 10^5$

1 a) Tabanları eşitle, sonra üsleri topla

Tabanlar 2 ve 4; farklı. Ama $4 = 2^2$ olduğundan ortak tabana çevrilebilir:
$4^3 = (2^2)^3 = \mathbf{2^6}$

Şimdi tabanlar aynı → üsler toplanır:
$2^7 \cdot 2^6 = 2^{(7+6)} = \mathbf{2^{13}}$

2 b) Üç ifadeyi de 3 tabanına çevir

$9 = 3^2$, $27 = 3^3$ ve $81 = 3^4$'tür:
$9^2 = (3^2)^2 = \mathbf{3^4}$
$27^2 = (3^3)^2 = \mathbf{3^6}$
$81^3 = (3^4)^3 = \mathbf{3^{12}}$

Tabanlar aynı → üsler toplanır:
$3^4 \cdot 3^6 \cdot 3^{12} = 3^{(4+6+12)} = \mathbf{3^{22}}$

3 c) Negatif üslerle bölme

$16 = 2^4$ ve $32 = 2^5$'tir:
$16^{-8} = (2^4)^{-8} = 2^{4.(-8)} = \mathbf{2^{-32}}$
$32^{-3} = (2^5)^{-3} = 2^{5.(-3)} = \mathbf{2^{-15}}$

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 2 **Çarpma ve bölme kurallarını birlikte kullanma** (devam)

Tabanlar aynı → bölmede üsler çıkarılır:
$2^{-32} : 2^{-15} = 2^{(-32)-(-15)}$
$= 2^{(-32)+15} = \mathbf{2^{-17}}$

Dikkat: (−32) − (−15) = (−32) + 15 = −17. Çıkarma yapılırken ikinci üssün işaretine dikkat edilmeli.

4 **d) Önce parantez içi**

Parantez içinde çarpma var, tabanlar aynı → üsler toplanır:
$10^4 \cdot 10^{-2} = 10^{(4+(-2))} = \mathbf{10^2}$

Şimdi bölme, tabanlar aynı → üsler çıkarılır:
$10^2 : 10^5 = 10^{(2-5)} = \mathbf{10^{-3}}$

Sayısal değeri: $10^{-3} = 1/10^3 = \mathbf{1/1000} = 0{,}001$

Kontrol: $10^4 = 10\,000$; $10^{-2} = 0{,}01$ → $10\,000 \cdot 0{,}01 = 100 = 10^2$ ✓ ve $100 : 100\,000 = 0{,}001$ ✓

Sonuç: a) 2^{13} b) 3^{22} c) 2^{-17} d) 10^{-3}

Dikkat: İlk adım her zaman aynı: bütün tabanları ortak bir ASAL sayıya çevir. Ondan sonra yalnızca üslerle uğraşırsın.

ÇÖZÜMLÜ SORU 3 **Toplamada ortak çarpan parantezine alma**

Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını **tek bir üslü ifade** biçiminde yazınız.
a) $3^7 + 3^7 + 3^7$
b) $(2^5 + 2^5) / 4^2$
c) $125^6 / (5^5 + 5^5 + 5^5 + 5^5 + 5^5)$
d) $2^{12} + 2^{12} + 2^{12} + 2^{12}$

1 **a) Kaç tane olduğunu say**

Üç tane $\mathbf{3^7}$ toplanıyor. Ortak çarpan parantezine alalım:
$3^7 + 3^7 + 3^7 = \mathbf{3 \cdot 3^7}$

$3 = 3^1$ olduğundan tabanlar aynı → üsler toplanır:
$3^1 \cdot 3^7 = \mathbf{3^8}$

Kontrol: $3^7 = 2187$; $3 \cdot 2187 = 6561 = 3^8$ ✓

2 **b) Önce payı, sonra paydayı bitir**

Pay: İki tane 2^5 → $2 \cdot 2^5 = 2^1 \cdot 2^5 = \mathbf{2^6}$

Payda: $4^2 = (2^2)^2 = \mathbf{2^4}$

Tabanlar aynı → bölmede üsler çıkarılır:
$2^6 / 2^4 = 2^{(6-4)} = \mathbf{2^2}$

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 3 **Toplamada ortak çarpan parantezine alma** (devam)

Kontrol: Pay = 32 + 32 = 64; Payda = 16 → 64 : 16 = 4 = 2^2 ✓

3 **c) Pay ve paydayı ayrı ayrı sadeleştir**

Pay: $125^6 = (5^3)^6 = \mathbf{5^{18}}$

Payda: Beş tane 5^5 → $5 \cdot 5^5 = 5^1 \cdot 5^5 = \mathbf{5^6}$

Bölme:

$5^{18} / 5^6 = 5^{(18-6)} = \mathbf{5^{12}}$

Buradaki püf nokta paydadaki tekrar sayısının (5) tabanla **aynı** olmasıydı; bu yüzden tek bir üslü ifadeye sadeleşti.

4 **d) Tekrar sayısı tabanın kuvveti olduğunda**

Dört tane $\mathbf{2^{12}}$ → $4 \cdot 2^{12}$

$4 = 2^2$ olduğuna göre:

$2^2 \cdot 2^{12} = 2^{(2+12)} = \mathbf{2^{14}}$

Dikkat: Tekrar sayısı doğrudan üsse eklenmez. Önce **tabanın kuvveti** olarak yazılır ($4 = 2^2$), sonra üsler toplanır.

Karşı örnek: $3^8 + 3^8 = 2 \cdot 3^8$ olur ve burada **daha fazla sadeleşmez**; çünkü 2, 3 tabanının bir kuvveti değildir. Cevap $2 \cdot 3^8$ olarak bırakılır.

Kural: Tekrar sayısı tabanla aynı asal çarpanı taşıyorsa sadeleşir, taşımıyorsa çarpan olarak kalır.

Sonuç: a) 3^8 b) 2^2 c) 5^{12} d) 2^{14}

Dikkat: Toplamada önce "kaç tane var?" diye say; bu sayıyı tabanın bir kuvveti olarak yazabiliyorsan sonuç tek bir üslü ifadeye iner.

ÇÖZÜMLÜ SORU 4 **Basamak sayısı bulma ve üslü ifadeleri sıralama**

a) $2^{18} \cdot 5^{15}$ işleminin sonucu kaç basamaklıdır?
b) $4^6 \cdot 25^8$ işleminin sonucu kaç basamaklıdır?
c) 9^4, 27^3 ve 3^{10} sayılarını küçükten büyüğe sıralayınız.
d) 2^{30}, 3^{20} ve 6^{10} sayılarını küçükten büyüğe sıralayınız.

1 **a) 2 ve 5'in kuvvetlerini eşitle**

10'un kuvvetini elde etmek için 2 ile 5'in üsleri **eşit** olmalı. Küçük olan üs 15'tir; 2^{18}'i ayıralım:

$2^{18} = 2^3 \cdot 2^{15}$

$2^3 \cdot 2^{15} \cdot 5^{15} = 2^3 \cdot (2 \cdot 5)^{15} = 2^3 \cdot 10^{15} = \mathbf{8 \cdot 10^{15}}$

$8 \cdot 10^{15}$ sayısı, **8'in yanında 15 sıfır** demektir:

Basamak sayısı = 1 + 15 = **16 basamak**

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 4 **Basamak sayısı bulma ve üslü ifadeleri sıralama** (devam)

2 b) Önce tabanları 2 ve 5'e çevir

$4^6 = (2^2)^6 = \mathbf{2^{12}}$

$25^8 = (5^2)^8 = \mathbf{5^{16}}$

Çarpım: $2^{12} \cdot 5^{16}$

Küçük üs 12'dir; 5^{16}'yı ayıralım:

$5^{16} = 5^{12} \cdot 5^4$

$2^{12} \cdot 5^{12} \cdot 5^4 = 10^{12} \cdot 5^4 = 10^{12} \cdot \mathbf{625} = \mathbf{625 \cdot 10^{12}}$

625 üç basamaklı, yanında 12 sıfır var:

Basamak sayısı = 3 + 12 = **15 basamak**

3 c) Tabanları eşitle

Üç sayı da 3 tabanına çevrilebilir:

$9^4 = (3^2)^4 = \mathbf{3^8}$

$27^3 = (3^3)^3 = \mathbf{3^9}$

$3^{10} = \mathbf{3^{10}}$

Tabanlar eşit → üssü küçük olan küçüktür:

$3^8 < 3^9 < 3^{10}$

$\mathbf{9^4 < 27^3 < 3^{10}}$

Kontrol: $3^8 = 6561$, $3^9 = 19\,683$, $3^{10} = 59\,049$ ✓

4 d) Tabanlar eşitlenemiyorsa üsleri eşitle

Tabanlar 2, 3 ve 6; farklı asallar içerdiği için ortak bir tabana çevrilemez. O hâlde **üsleri** eşitleyelim.

Üsler 30, 20 ve 10'dur; en büyük ortak bölen **10**:

$2^{30} = (2^3)^{10} = \mathbf{8^{10}}$

$3^{20} = (3^2)^{10} = \mathbf{9^{10}}$

$6^{10} = \mathbf{6^{10}}$

Üsler eşit → tabanı küçük olan küçüktür:

$6^{10} < 8^{10} < 9^{10}$

$\mathbf{6^{10} < 2^{30} < 3^{20}}$

Dikkat: Yalnızca üslere bakılsaydı "2^{30} en büyük" denirdi; oysa en büyük olan 3^{20}'dir. Eşitleme yapmadan karşılaştırma yanıltır.

Sonuç: a) 16 basamak b) 15 basamak c) $9^4 < 27^3 < 3^{10}$ d) $6^{10} < 2^{30} < 3^{20}$

Dikkat: Basamak sorularında hedef 10'un kuvvetini yakalamaktır: 2 ile 5'in üslerini eşitle, artanı öne çarpan olarak al.