ÇÖZÜMLER

Tam Kare Sayıların ve Tam Kare Olmayan Sayıların Karekökleri

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge **CC BY-NC 4.0** lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabilir.

1. Bölüm Soru 1–5

1 Aşağıdaki kareköklü ifadelerin değerlerini bulunuz.

a) √169
b) √625
c) √(4^6)
d) √900 − √400

a) √169
Hangi sayının karesi 169'dur? Tam kareler tablosundan:
13 · 13 = 169
√169 = 13

b) √625
25 · 25 = 625
√625 = 25

Asal çarpanlara ayırarak da bulabiliriz:
625 = 5 · 5 · 5 · 5 → (5 · 5) · (5 · 5) → 5 · 5 = **25** ✓

c) √(4^6)
Üs **6, yani çift** olduğu için üssü ikiye bölebiliriz:
√(4^6) = $4^{6:2}$ = **4^3**

Değerini hesaplayalım:
4^3 = 4 · 4 · 4 = **64**

Kontrol: 64 · 64 = 4096 ve 4^6 = 4096 ✓

d) √900 − √400
Her karekökü ayrı ayrı hesaplayalım:
√900 = **30** (30 · 30 = 900)
√400 = **20** (20 · 20 = 400)

Şimdi çıkaralım:
30 − 20 = **10**

Uyarı: Bu ifadeyi √(900 − 400) = √500 diye hesaplamak **yanlıştır**. Karekök, çıkarma üzerine dağılmaz. (√500 ≈ 22,4 çıkardı; 10 değil.)

a) 13 b) 25 c) 4^3 = 64 d) 10

2 Aşağıdaki sayılar veriliyor.

I. 144
II. 128
III. 196
IV. 250
V. 361
VI. 500

a) Bu sayıları tam kare olanlar ve tam kare olmayanlar diye ikiye ayırınız.
b) Tam kare olanların kareköklerini yazınız.
c) Tam kare olmayanlardan bazılarını hesap yapmadan nasıl elediğinizi açıklayınız.

a) Sınıflandırma

Tam kare olanlar: I, III, V
I → 144 = 12 · 12 ✓
III → 196 = 14 · 14 ✓
V → 361 = 19 · 19 ✓

Tam kare olmayanlar: II, IV, VI
II → 128 ($11^2 = 121$ ve $12^2 = 144$; 128 ikisinin arasında)
IV → 250 ($15^2 = 225$ ve $16^2 = 256$; 250 ikisinin arasında)
VI → 500 ($22^2 = 484$ ve $23^2 = 529$; 500 ikisinin arasında)

b) Kareköklər

$\sqrt{144} = 12$ · $\sqrt{196} = 14$ · $\sqrt{361} = 19$

c) Hesap yapmadan eleme

Son rakam kuralı: Tam kare sayıların son rakamı yalnızca **0, 1, 4, 5, 6 ya da 9** olabilir. Bunun sebebi, 0'dan 9'a kadar rakamların karelerinin son rakamlarının bu altı rakamdan biri olmasıdır:

$0^2 = 0$ · $1^2 = 1$ · $2^2 = 4$ · $3^2 = 9$ · $4^2 = 16$
$5^2 = 25$ · $6^2 = 36$ · $7^2 = 49$ · $8^2 = 64$ · $9^2 = 81$

Son rakamlar: 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1 → yalnızca **{0, 1, 4, 5, 6, 9}**

Bu kuralla eleyebileceğimiz sayı: II (128)
128'in son rakamı **8**'dir; bu rakam listede yoktur. Öyleyse 128 **kesinlikle tam kare değildir** — tek bir hesap yapmadan söyleyebiliriz.

Peki IV (250) ve VI (500)?
Son rakamları **0**'dır ve 0 listede vardır; bu yüzden son rakam kuralı onları elemez. Ama başka bir gözlem işe yarar: Sonu **tek sayıda sıfırla** biten sayılar tam kare olamaz. Tam karelerin sonundaki sıfır sayısı daima **çifttir** (100, 400, 900, 1600 ...). 250 ve 500 birer sıfırla bittiği için tam kare değildir.

Dikkat: Son rakam kuralı **tek yönlüdür**. Son rakamı 4 olan her sayı tam kare değildir (örneğin 24, 34, 54). Kural yalnızca **eleme** yapar, onaylama yapmaz.

devamı →

2 *(çözümün devamı)*

a) Tam kare: I, III, V — Değil: II, IV, VI b) 12, 14, 19 c) Son rakamı 2, 3, 7 veya 8 olan sayı tam kare olamaz

3 Ayşe, **√16 + √9** işlemini şöyle yapmıştır:

1. adım: İki kareköğü tek bir karekökte birleştireyim.
2. adım: √16 + √9 = √(16 + 9)
3. adım: = √25
4. adım: = 5

a) Ayşe hangi adımda hata yapmıştır?
b) İşlemin doğru sonucunu bulunuz.
c) √16 · √9 işleminde aynı yöntem çalışır mı? Gösteriniz.
d) Karekök hangi işlem üzerine dağılır, hangisi üzerine dağılmaz? Kuralı yazınız.

a) Hata 1. (ve 2.) adımdadır.

Ayşe iki kareköğü **tek bir karekökte birleştirmiştir**. Oysa karekök, **toplama üzerine dağılmaz**:
√a + √b ≠ √(a + b)

Bu, konunun en sık yapılan hatasıdır ve genellikle üslü ifadelerdeki kurallarla karıştırılmasından kaynaklanır.

b) Doğru çözüm

Her kareköğü **ayrı ayrı** hesaplayıp sonra toplarız:
√16 = **4** · √9 = **3**

√16 + √9 = 4 + 3 = **7**

Ayşe'nin bulduğu 5 ile doğru cevap 7 arasında **2 birimlik** fark vardır. Hata sonucu gerçekten değiştirmiştir.

c) Çarpmada aynı yöntem çalışır mı?

Evet, çalışır. İki yolla da deneyelim.

1. yol — ayrı ayrı hesapla:
√16 · √9 = 4 · 3 = **12**

2. yol — tek karekökte birleştir:
√16 · √9 = √(16 · 9) = √144 = **12** ✓

İki yol da **12** verdi. Demek ki karekök **çarpma üzerine dağılır**.

d) Kural

devamı →

3 *(çözümün devamı)*

Karekök ÇARPMA ve BÖLME üzerine dağılır:
√a · √b = √(a · b) ✓
√a : √b = √(a : b) ✓ (b ≠ 0)

Karekök TOPLAMA ve ÇIKARMA üzerine DAĞILMAZ:
√a + √b ≠ √(a + b) ×
√a − √b ≠ √(a − b) ×

Neden böyle? Karekök alma, bir çarpanı ikiye ayırma işlemidir; çarpmayla uyumlu çalışır. Toplama ise çarpanları değil **terimleri** birleştirir; bu yüzden karekök onun içine giremez.

Aklında tutmanın kolay yolu: Bir kez √9 + √16 = 3 + 4 = 7 ile √(9 + 16) = √25 = 5 karşılaştırmasını yap. 7 ≠ 5 olduğunu görünce kural bir daha unutulmaz.

a) 1. adım; karekök toplamaya dağılmaz b) 7 c) Evet; √16·√9 = √144 = 12 d) Çarpma ve bölmeye dağılır, toplama ve çıkarmaya dağılmaz

4 Aşağıdaki kareköklü ifadelerin değerlerini **asal çarpanlara ayırarak** bulunuz.

a) √784
b) √1089
c) √2025
d) Bulduğunuz üç değerin toplamını hesaplayınız.

a) √784

784 çift olduğu için 2'ye bölerek başlayalım:
784 : 2 = 392 · 392 : 2 = 196 · 196 : 2 = 98 · 98 : 2 = 49
49 : 7 = 7 · 7 : 7 = 1

784 = 2 · 2 · 2 · 2 · 7 · 7 = $\mathbf{2^4 \cdot 7^2}$

İkişerli gruplayalım: (2 · 2) · (2 · 2) · (7 · 7)
Her gruptan birer tane: 2 · 2 · 7 = **28**

Kısa yol: Üsleri ikiye bölelim → $2^2 \cdot 7^1 = 4 \cdot 7 = \mathbf{28}$ ✓
Kontrol: 28 · 28 = 784 ✓

b) √1089

1089 tek sayıdır; rakamları toplamı 1 + 0 + 8 + 9 = 18 olduğu için 3'e ve 9'a bölünür:
1089 : 3 = 363 · 363 : 3 = 121
121 : 11 = 11 · 11 : 11 = 1

1089 = 3 · 3 · 11 · 11 = $\mathbf{3^2 \cdot 11^2}$

Üsleri ikiye bölelim: $3^1 \cdot 11^1 = \mathbf{33}$
Kontrol: 33 · 33 = 1089 ✓

c) √2025

devamı →

4 *(çözümün devamı)*

2025 sayısının son rakamı 5 olduğu için 5'e bölünür:
2025 : 5 = 405 · 405 : 5 = 81
81 : 3 = 27 · 27 : 3 = 9 · 9 : 3 = 3 · 3 : 3 = 1
2025 = 5 · 5 · 3 · 3 · 3 · 3 = $\mathbf{3^4 \cdot 5^2}$
Üsleri ikiye bölelim: $3^2 \cdot 5^1 = 9 \cdot 5 =$ **45**
Kontrol: 45 · 45 = 2025 ✓

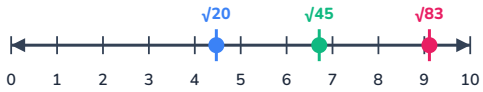
d) Üç değerin toplamı

28 + 33 + 45
= 61 + 45
= **106**

Yöntemin özeti: Sayıyı asal çarpanlarına ayır, her asal çarpanın **üssünü ikiye böl**, sonra çarp. Bütün üsler çift çıkıyorsa sayı tam karedir; biri bile tek kalıyorsa sayı tam kare değildir.

a) 28 b) 33 c) 45 d) 106

5 Aşağıdaki sayı doğrusunda üç kareköklü ifadenin yeri işaretlenmiştir.



a) Her birinin hangi ardışık iki tam sayı arasında olduğunu bulunuz.
b) Her birinin hangi tam sayıya daha yakın olduğunu hesapla gösteriniz.
c) Üçünü küçükten büyüğe sıralayınız.
d) Doğru üzerindeki noktaların yerleri (b) şıkkındaki sonuçlarla uyumlu mudur?

a) Hangi iki tam sayı arasında?

√20: Komşu tam kareler 16 ve 25
16 < 20 < 25 → √16 < √20 < √25 → **4 < √20 < 5**

√45: Komşu tam kareler 36 ve 49
36 < 45 < 49 → √36 < √45 < √49 → **6 < √45 < 7**

√83: Komşu tam kareler 81 ve 100
81 < 83 < 100 → √81 < √83 < √100 → **9 < √83 < 10**

b) Hangi tam sayıya daha yakın?

Uzaklıkları **karekökün içindeki sayı** üzerinden ölçeriz.

√20:
20 − 16 = **4** · 25 − 20 = **5**
4 < 5 → 16'ya yakın → **√20 sayısı 4'e daha yakındır**

devamı →

5 *(çözümün devamı)*

√45:
45 − 36 = **9** · 49 − 45 = **4**
4 < 9 → 49'a yakın → **√45 sayısı 7'ye daha yakındır**

√83:
83 − 81 = **2** · 100 − 83 = **17**
2 < 17 → 81'e yakın → **√83 sayısı 9'a daha yakındır**

c) Sıralama

Karekök alma işlemi sıralamayı **bozmaz**: İçerideki sayı büyüdükçe karekök de büyür.

20 < 45 < 83 olduğundan:
√20 < √45 < √83

Bulduğumuz aralıklar da bunu doğruluyor: √20 dört ile beş, √45 altı ile yedi, √83 dokuz ile on arasındadır.

d) Doğruyla karşılaştırma

Evet, tamamen uyumludur. Doğru üzerindeki noktalara tek tek bakalım:

√20 noktası, 4 ile 5 arasının **sol tarafında** — 4'e yakın duruyor ✓
√45 noktası, 6 ile 7 arasının **sağ tarafında** — 7'ye yakın duruyor ✓
√83 noktası, 9 ile 10 arasının **en solunda**, neredeyse 9'un üzerinde ✓

Özellikle √83 dikkat çekici: 83 sayısı 81'e yalnızca **2 birim** uzaktayken 100'e **17 birim** uzaktır. Bu büyük fark, noktanın 9'a ne kadar yapışık durduğunu açıklıyor.

Gerçek değerlerle kontrol: √20 ≈ 4,47 · √45 ≈ 6,71 · √83 ≈ 9,11 ✓ Hepsi tahminlerimizle uyumlu.

a) 4–5, 6–7, 9–10 b) √20 → 4'e, √45 → 7'ye, √83 → 9'a yakın c) √20 < √45 < √83 d) Evet, uyumlu

2. Bölüm Soru 6–10

6 Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

a) √225 + √64 − √121
b) √49 · (√144 − √100)
c) √(5^6) : √(5^2)
d) √(2^{12}) + √(3^4)

a) √225 + √64 − √121

Her kareköğü ayrı hesaplayalım:
√225 = **15** · √64 = **8** · √121 = **11**

devamı →

6 *(çözümün devamı)*

Soldan sağa işlem yapalım:
15 + 8 − 11
= 23 − 11
= **12**

b) √49 · (√144 − √100)

İşlem sırasına göre önce **parantez içi**:
√144 = **12** · √100 = **10**
Parantez içi = 12 − 10 = **2**

Parantez dışı:
√49 = **7**

Çarpalım:
7 · 2 = **14**

c) √(5^6) : √(5^2)

Her kareköğü ayrı alalım (üsler çift olduğu için ikiye bölünür):
√(5^6) = $5^{6:2}$ = 5^3 = **125**
√(5^2) = $5^{2:2}$ = 5^1 = **5**

Bölelim:
125 : 5 = **25**

İkinci yol — karekök bölme üzerine dağılır:
√(5^6) : √(5^2) = √(5^6 : 5^2) = √(5^4) = 5^2 = **25** ✓
Aynı sonuç.

d) √(2^{12}) + √(3^4)

Burada **toplama** var; kareköklер **birleştirilemez**. Her birini ayrı hesaplamalıyız.

√(2^{12}) = $2^{12:2}$ = 2^6 = **64**
√(3^4) = $3^{4:2}$ = 3^2 = **9**

Toplayalım:
64 + 9 = **73**

Uyarı: Bu ifadeyi √(2^{12} + 3^4) = √(4096 + 81) = √4177 diye hesaplamak **yanlıştır**. 4177 zaten tam kare bile değildir; sonuç 73 çıkmaz. (c) şıkkında bölme olduğu için birleştirme çalıştı, burada toplama olduğu için çalışmaz.

a) 12 b) 14 c) 25 d) 73

7 Aşağıdaki kareköklü ifadeler veriliyor.

I. √30
II. √60
III. √90
IV. √120
V. √150
VI. √200

a) Her birinin hangi ardışık iki tam sayı arasında olduğunu yazınız.
b) Bu ifadeleri küçük komşusuna yakın olanlar ve büyük komşusuna yakın olanlar diye ikiye ayırınız.
c) Hangi ifade komşusuna en yakındır? Gerekçelendiriniz.

a) Aralıkları belirleyelim

I. √30: 25 < 30 < 36 → **5 < √30 < 6**
II. √60: 49 < 60 < 64 → **7 < √60 < 8**
III. √90: 81 < 90 < 100 → **9 < √90 < 10**
IV. √120: 100 < 120 < 121 → **10 < √120 < 11**
V. √150: 144 < 150 < 169 → **12 < √150 < 13**
VI. √200: 196 < 200 < 225 → **14 < √200 < 15**

b) Uzaklıkları hesaplayıp sınıflandıralım

I. √30: 30 − 25 = **5** · 36 − 30 = 6 → **küçük komşuya (5'e) yakın**
II. √60: 60 − 49 = 11 · 64 − 60 = **4** → **büyük komşuya (8'e) yakın**
III. √90: 90 − 81 = **9** · 100 − 90 = 10 → **küçük komşuya (9'a) yakın**
IV. √120: 120 − 100 = 20 · 121 − 120 = **1** → **büyük komşuya (11'e) yakın**
V. √150: 150 − 144 = **6** · 169 − 150 = 19 → **küçük komşuya (12'ye) yakın**
VI. √200: 200 − 196 = **4** · 225 − 200 = 25 → **küçük komşuya (14'e) yakın**

Sınıflandırma
Küçük komşusuna yakın olanlar: I, III, V, VI
Büyük komşusuna yakın olanlar: II, IV

c) Komşusuna en yakın olan

Cevap: IV (√120)

Gerekçe: 120 sayısı büyük komşusu olan 121'e yalnızca **1 birim** uzaktadır. Bu, listedeki bütün uzaklıkların en küçüğüdür.

Uzaklıkları sıralayalım: **1** (IV) < 4 (II ve VI) < 5 (I) < 6 (V) < 9 (III)

121 = 11² olduğuna göre √120, 11'in hemen altındadır. Gerçek değeri **√120 ≈ 10,95**'tir — 11'e neredeyse yapışıktır ✓

Dikkat çeken bir gözlem: III (√90) komşularına neredeyse **eşit** uzaklıktadır (9 ve 10 birim). Bu yüzden √90 için "9'a yakın" demek doğru olsa da tahmin **zayıftır**; gerçek değer √90 ≈ 9,49 olup 9,5'e çok yakındır. Uzaklıklar birbirine yaklaştıkça bu yöntemin ayırt etme gücü azalır.

devamı →

7 *(çözümün devamı)*

b) Küçük komşuya yakın: I, III, V, VI — Büyük komşuya yakın: II, IV c) √120; 121'e yalnızca 1 birim uzakta

8 Bir öğrenci iki soruyu aşağıdaki gibi çözmüştür:

Soru	Öğrencinin Çözümü
Alanı 196 m² olan kare bahçenin çevresi kaç metredir?	√196 = 14 → Çevre 14 m'dir.
Çevresi √1600 cm olan karenin bir kenarı kaç cm'dir?	√1600 = 40 → Bir kenar 40 cm'dir.

a) Birinci çözümdeki hatayı bulup doğru sonucu yazınız.
b) İkinci çözümdeki hatayı bulup doğru sonucu yazınız.
c) İki hatanın ortak sebebi nedir?
d) Bu tür sorularda hata yapmamak için bir kontrol sorusu öneriniz.

a) Birinci çözümdeki hata

√196 = 14 hesabı **doğrudur**; ama bu sayı **çevre değil, bir kenar** uzunluğudur.

Karenin alanı = Kenar · Kenar olduğundan alanın karekökü bize **kenarı** verir:
Kenar = √196 = **14 m**

Çevre ise dört kenarın toplamıdır:
Çevre = 4 · 14 = **56 m**

Öğrenci 56 yerine 14 demiş; sonucu **dörtte bir** kadar küçük bulmuştur.

b) İkinci çözümdeki hata

√1600 = 40 hesabı yine **doğrudur**; ama soruda verilen **alan değil, çevredir**.

Çevre = √1600 = **40 cm**

Bir kenarı bulmak için çevreyi **4'e bölmeliyiz**:
Bir kenar = 40 : 4 = **10 cm**

Öğrenci 10 yerine 40 demiş; bu kez sonucu **dört kat** büyük bulmuştur.

c) İki hatanın ortak sebebi

Öğrenci her iki soruda da **karekök almayı bitiş noktası sanmıştır**. Karekök aldıktan sonra durmuş, elde ettiği sayının **hangi büyüklük** olduğunu ve **neyin sorulduğunu** kontrol etmemiştir.

devamı →

8 *(çözümün devamı)*

Asıl karışıklık şudur: **√ sembolü her zaman kenar vermez.** Ne verdiği, karekökün içindeki büyüklüğün ne olduğuna bağlıdır:
• İçerideki **alansa** → karekök **kenarı** verir
• İçerideki **çevreyse** → karekök yine **çevreyi** verir (sadece sayı sadeleşmiş olur)

İkinci soruda √1600 ifadesi bir alan değil, **çevrenin kendisidir**; karekök almak yalnızca onu daha sade yazar.

d) Kontrol sorusu önerisi

Her karekök aldıktan sonra şu **iki soruyu** sormak yeterlidir:

1. "Bulduğum bu sayı nedir — kenar mı, çevre mi, alan mı?"
2. "Soru benden ne istiyor?"

İki cevap aynıysa işlem biter. Farklıysa bir adım daha gerekir:
Kenar → Çevre için **4 ile çarp**
Çevre → Kenar için **4'e böl**
Kenar → Alan için **karesini al**

Ek kontrol — mantık testi: Çevre her zaman kenardan **büyük** olmalıdır. Birinci soruda öğrenci "çevre 14 m" derken kenarın da 14 m olduğunu bulmuştu; çevre ile kenarın eşit çıkması imkânsızdır. Bu tek gözlem bile hatayı yakalardı.

a) 14 kenardır; çevre 4·14 = 56 m b) 40 çevredir; kenar 40:4 = 10 cm c) Karekök alıp durmak, ne bulduğunu kontrol etmemek d) "Bu sayı nedir?" ve "Soru ne istiyor?"

9 Bir parkta kare biçiminde üç bölge vardır. Alanları sırasıyla **400 m²**, **225 m²** ve **100 m²**'dir. Bu üç bölge, birer kenarları aynı doğru üzerinde olacak şekilde **yan yana** dizilmiştir.

a) Her bölgenin bir kenar uzunluğunu bulunuz.
b) Üç bölgenin doğrusal kenarları boyunca oluşan toplam uzunluğu bulunuz.
c) Üç bölgenin toplam alanını hesaplayınız.
d) Bu toplam alana eşit alanlı tek bir kare olsaydı bir kenarı yaklaşık kaç metre olurdu?

a) Kenar uzunlukları

Karenin kenarı, alanının karekökü alınarak bulunur.

1. bölge: Kenar = √400 = **20 m** (20 · 20 = 400)
2. bölge: Kenar = √225 = **15 m** (15 · 15 = 225)
3. bölge: Kenar = √100 = **10 m** (10 · 10 = 100)

b) Toplam uzunluk

Üç kare yan yana dizildiği ve kenarları aynı doğru üzerinde olduğu için bu kenarlar **uç uca** eklenir.

Toplam uzunluk = 20 + 15 + 10 = **45 m**

devamı →

9 *(çözümün devamı)*

c) Toplam alan

Toplam alan = 400 + 225 + 100
= 625 + 100
= **725 m²**

d) Eşit alanlı tek karenin kenarı

Aradığımız kenar = √725'tir. 725 bir tam kare değildir, bu yüzden **yaklaşık değerini** bulacağız.

1. adım — komşu tam kareleri bul.
$26^2 = 676$ · $27^2 = 729$
$676 < 725 < 729$

2. adım — karekökünü al.
$\sqrt{676} < \sqrt{725} < \sqrt{729}$
$26 < \sqrt{725} < 27$

3. adım — hangisine daha yakın?
725 − 676 = **49 birim**
729 − 725 = **4 birim**
4 < 49 olduğundan 725, **729'a çok daha yakındır**.

Sonuç: Kenar uzunluğu 26 m ile 27 m arasındadır ve **27 m'ye çok yakındır**; yani yaklaşık **27 m**'dir.

(Gerçek değeri √725 ≈ 26,93 m'dir ✓)

Sonucun anlamı üzerine: Üç karenin kenarları toplamı **45 m** idi, ama aynı alana sahip tek bir karenin kenarı yalnızca **27 m** çıktı. Alanlar toplanırken kenarlar toplanmaz — çünkü alan, kenarın **karesiyle** büyür. Bu, karekökün neden gerekli olduğunun güzel bir örneğidir.

a) 20 m, 15 m, 10 m b) 45 m c) 725 m² d) Yaklaşık 27 m (26 < √725 < 27)

10 Bir öğrenci şöyle diyor:

"Bir sayının karekökü her zaman o sayıdan küçüktür; çünkü karekök almak sayıyı küçültür."

a) Bu iddia doğru mudur? Bir karşıt örnek veriniz.
b) İddia hangi sayılar için doğrudur?
c) 0 ile 1 arasındaki sayılarda durum nasıldır? Bir örnekle gösteriniz.
d) Bulduklarınızı bir kural hâlinde özetleyiniz.

a) İddia YANLIŞTIR.

Karşıt örnek: 1 sayısı
√1 = **1**

devamı →

10 *(çözümün devamı)*

Karekök, sayıyı küçültmedi; sayı **aynı kaldı**. "Her zaman küçüktür" ifadesi bu tek örnekle çürütülür.

İkinci karşıt örnek: 0 sayısı
√0 = **0** → yine eşit.

b) İddia hangi sayılar için doğrudur?

İddia, **1'den büyük** sayılar için doğrudur.

Örnekler:
√4 = 2 · 2 < 4 ✓
√9 = 3 · 3 < 9 ✓
√100 = 10 · 10 < 100 ✓
√2 ≈ 1,41 · 1,41 < 2 ✓

Neden? a > 1 ise √a > 1'dir. İki tarafı √a ile çarparsak:
√a · √a > 1 · √a
a > √a ✓

Üstelik sayı büyüdükçe aradaki fark **açılır**: 100 ile 10 arasında 90 birim fark varken 10 000 ile 100 arasında 9900 birim fark vardır.

c) 0 ile 1 arasındaki sayılar

Burada durum **tersine döner**: Karekök sayıyı **büyütür**.

Örnek: 1/4 sayısını alalım.
√(1/4) = 1/2

Karşılaştıralım: 1/2 = 0,5 ve 1/4 = 0,25
0,5 > 0,25 → karekök **daha büyük** ✓

İkinci örnek: 0,01 sayısı
√0,01 = 0,1
0,1 > 0,01 ✓

Neden böyle oluyor? 0 ile 1 arasındaki bir sayıyı kendisiyle çarpmak onu **küçültür** (0,5 · 0,5 = 0,25). Karekök almak bunun ters işlemi olduğundan doğal olarak sayıyı **büyütür**.

d) Kural

devamı →

10 *(çözümün devamı)*

Sayı	Karekökü ile İlişkisi	Örnek
a = 0	√a = a	√0 = 0
0 < a < 1	√a > a (büyütür)	√(1/4) = 1/2
a = 1	√a = a	√1 = 1
a > 1	√a < a (küçültür)	√9 = 3

Özet: Karekök almak sayıyı **her zaman 1'e doğru yaklaştırır**. 1'den büyükse küçültür, 1'den küçükse büyütür, tam 1 ise değiştirmez. Öğrencinin iddiası yalnızca birinci durum için geçerlidir.

a) Yanlış; √1 = 1 b) 1'den büyük sayılarda c) Tersine döner: √(1/4) = 1/2 > 1/4 d) Karekök sayıyı her zaman 1'e yaklaştırır

3. Bölüm Soru 11–15

11 Aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulunuz.

a) √(√81)
b) √144 · √25 : √400
c) √(3^2 + 4^2)
d) √(3^2) + √(4^2) değerini bulup (c) ile karşılaştırınız.

a) İç içe karekök

√(√81) ifadesinde **içeriden dışarıya** doğru çalışırız.

1. adım — iç karekök:
√81 = **9**

2. adım — dış karekök:
√9 = **3**

√(√81) = 3

Kontrol: 3'ün karesi 9, 9'un karesi 81 ✓ İki kez kare alınca başladığımız sayıya döndük.

b) Çarpma ve bölme

Her kareköğü ayrı hesaplayalım:
√144 = **12** · √25 = **5** · √400 = **20**

devamı →

11 *(çözümün devamı)*

Çarpma ve bölme aynı önceliktedir; **soldan sağa** yaparız:
$12 \cdot 5 = 60$
$60 : 20 = \mathbf{3}$

İkinci yol — karekök çarpma ve bölmeye dağılır:
$\sqrt{144} \cdot \sqrt{25} : \sqrt{400} = \sqrt{(144 \cdot 25 : 400)}$
Parantez içi: $144 \cdot 25 = 3600 \rightarrow 3600 : 400 = 9$
$= \sqrt{9} = \mathbf{3}$ ✓

c) Parantez içindeki üslü ifadeler

İşlem sırasına göre önce **karekökün içi** hesaplanır:
$3^2 = 9 \cdot 4^2 = 16$
$9 + 16 = \mathbf{25}$

Şimdi karekökünü alalım:
$\sqrt{25} = \mathbf{5}$

d) Karekökler ayrı ayrı

$\sqrt{(3^2)} = 3^{2:2} = \mathbf{3}$
$\sqrt{(4^2)} = 4^{2:2} = \mathbf{4}$

Toplayalım:
$3 + 4 = \mathbf{7}$

Karşılaştırma

(c) sonucu **5**, (d) sonucu **7**'dir. **İkisi eşit değildir.**

Bu, karekökün **toplama üzerine dağılmadığının** en net kanıtıdır:
$\sqrt{(3^2 + 4^2)} = \sqrt{25} = \mathbf{5}$
$\sqrt{(3^2)} + \sqrt{(4^2)} = 3 + 4 = \mathbf{7}$
$\mathbf{5 \neq 7}$

Not: (c) şıkkındaki 3, 4, 5 üçlüsü geometride sık karşılaşılan bir üçlüdür; dik kenarları 3 ve 4 olan bir dik üçgenin hipotenüsü 5'tir. Bu, karekökün geometrideki en önemli kullanım alanlarından birine işaret eder.

a) 3 b) 3 c) 5 d) 7; (c) ile eşit değil — karekök toplamaya dağılmaz

12 Bir öğrenci şöyle diyor:

"Bir sayının tam kare olması için asal çarpanlarının üslerinin hepsinin çift olması gerekir."

a) Bu iddia doğru mudur? Gerekçelendiriniz.
b) 360 sayısı tam kare midir? Asal çarpanlarına ayırarak gösteriniz.
c) 360 sayısının tam kare olması için çarpılması gereken en küçük pozitif tam sayıyı bulunuz.
d) Bulduğunuz çarpımın kareköklünü hesaplayınız.

a) İddia DOĞRUDUR.

Gerekçe: Bir sayının tam kare olması demek, o sayının bir tam sayının karesi olarak yazılabilmesi demektir.

Diyelim ki $n = k^2$ olsun. k sayısını asal çarpanlarına ayırdığımızda her asal çarpan bir üsle görünür. k'nin **karesini** aldığımızda her üs **ikiyle çarpılır**; iki ile çarpılan her sayı ise **çifttir**.

Somut örnek:
$k = 2^3 \cdot 5^1 = 40$
$k^2 = 2^6 \cdot 5^2 = 1600$
Üsler: 6 ve 2 → ikisi de **çift** ✓

Ters yönden de doğrudur: Bütün üsler çiftse, her üssü ikiye bölerek kareköğü doğrudan yazabiliriz. Yani "üsler çift" ile "tam kare" birbirinin **tam karşılığıdır**.

Bu, aslında "çarpanları ikişerli gruplama" yönteminin başka bir anlatımıdır: Bir üs çiftse çarpanlar tam olarak ikişerli gruplanabilir; tekse bir tanesi **eşsiz kalır**.

b) 360 tam kare midir?

360'ı asal çarpanlarına ayıralım:
360 : 2 = 180 · 180 : 2 = 90 · 90 : 2 = 45
45 : 3 = 15 · 15 : 3 = 5 · 5 : 5 = 1

$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$

Üsleri inceleyelim:
2'nin üssü: **3** → tek ×
3'ün üssü: **2** → çift ✓
5'in üssü: **1** → tek ×

İki üs tek olduğundan **360 tam kare DEĞİLDİR**.

Kontrol: $18^2 = 324$ ve $19^2 = 361$. 360 bu ikisinin arasındadır; gerçekten tam kare değil ✓ (Üstelik 361'e yalnızca 1 birim uzakta!)

c) En küçük çarpan

Amacımız **tek olan üsleri çift yapmaktır**. Bunun için her tek üslü asal çarpandan **birer tane daha** eklemeliyiz.

2'nin üssü 3 → bir tane 2 daha eklersek **4** olur ✓ (çift)
3'ün üssü 2 → zaten çift, dokunmuyoruz
5'in üssü 1 → bir tane 5 daha eklersek **2** olur ✓ (çift)

devamı →

12 *(çözümün devamı)*

Öyleyse çarpmamız gereken sayı:
2 · 5 = 10

Kontrol edelim:
360 · 10 = **3600**
3600 = $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ → üsler 4, 2, 2 → **hepsi çift** ✓

Neden en küçük? Daha küçük bir sayıyla çarpsaydık (örneğin 2 ile) 5'in üssü tek kalırdı: 720 = $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^1$ → tam kare değil. Her tek üslü çarpandan **birer tane** almak zorunludur ve bu da en küçük seçenektir.

d) √3600

3600 = $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$
Üsleri ikiye bölelim:
√3600 = $2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$ = 4 · 3 · 5 = **60**

Kontrol: 60 · 60 = 3600 ✓

a) Doğru; kare alınca her üs ikiyle çarpılır b) 360 = $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$; üsler tek, tam kare değil c) 10 d) √3600 = 60

13 Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) √40 ile √90 arasında kaç tane tam sayı vardır?
b) √150 ile √500 arasında kaç tane tam sayı vardır?
c) √x = 13 ise x kaçtır?
d) 7 < √x < 8 koşulunu sağlayan kaç tane tam sayı x vardır?

a) √40 ile √90 arası

Yöntem: 40 ile 90 arasındaki **tam kare** sayıları bulup kareköklerini alırız.

40 ile 90 arasındaki tam kareler:
49 (7^2) · **64** (8^2) · **81** (9^2)

Kareköklerı: **7, 8, 9**

Cevap: **3 tane** tam sayı vardır.

Kontrol: √40 ≈ 6,32 ve √90 ≈ 9,49 → aradaki tam sayılar 7, 8, 9 ✓

b) √150 ile √500 arası

150 ile 500 arasındaki tam kareler:
169 (13^2), 196 (14^2), 225 (15^2), 256 (16^2), 289 (17^2), 324 (18^2), 361 (19^2), 400 (20^2), 441 (21^2), 484 (22^2)

Kareköklerı: **13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22**

Kaç tane olduğunu sayalım. Ardışık tam sayıları saymak için:
Son − İlk + 1 = 22 − 13 + 1 = **10 tane**

devamı →

13 *(çözümün devamı)*

Kontrol: √150 ≈ 12,25 ve √500 ≈ 22,36 → aradaki tam sayılar 13'ten 22'ye kadar ✓

c) √x = 13 ise x kaçtır?

Karekök alma işleminin **ters işlemi** kare almaktır. İki tarafın karesini alalım:
$(\sqrt{x})^2 = 13^2$
x = 169

Kontrol: √169 = 13 ✓

d) 7 < √x < 8 koşulu

Eşitsizliğin her tarafının **karesini** alalım. Bütün terimler pozitif olduğu için eşitsizlik yönü **değişmez**:
$7^2 < (\sqrt{x})^2 < 8^2$
49 < x < 64

Yani x, 49'dan büyük ve 64'ten küçük bir tam sayı olmalıdır.

Bu aralıktaki tam sayılar: **50, 51, 52, ..., 62, 63**

Kaç tane?
Son − İlk + 1 = 63 − 50 + 1 = **14 tane**

İkinci yöntem: 49 ile 64 arasındaki tam sayı sayısı = 64 − 49 − 1 = **14** ✓
(Uçları dâhil olmadığı için 1 çıkarılır.)

Neden 49 ve 64 dâhil değil? Eşitsizlik **kesindir** (≤ değil, <). x = 49 olsaydı √x = 7 çıkardı ki bu "7'den büyük" koşulunu sağlamaz. Aynı şekilde x = 64 için √x = 8 olur ve "8'den küçük" koşulu bozulur.

a) 3 tane (7, 8, 9) b) 10 tane (13–22) c) x = 169 d) 14 tane (50–63)

14 Bir öğrenci kareköklerin yaklaşık değerini şöyle tahmin ediyor:

> *"Sayı hangi tam kareye daha yakınsa, karekökü de o tam karenin karekökü kadardır. Örneğin √50 için 50, 49'a çok yakın olduğundan √50 ≈ 7'dir."*

a) Bu yöntem √50 için işe yarıyor mu? Kontrol ediniz.
b) Yöntemi √60 için uygulayıp sonucu değerlendiriniz.
c) Yöntemi √56 için uygulayınız. Sonuç güvenilir mi?
d) Bu yöntemin sınırı nedir? Ne zaman güvenilir, ne zaman zayıftır?

a) √50 için kontrol

Komşu tam kareler: 49 < 50 < 64
7 < √50 < 8

Uzaklıklar: 50 − 49 = **1** · 64 − 50 = **14**
1 < 14 olduğundan 49'a çok yakın → √50 ≈ **7**

Gerçek değer: √50 ≈ **7,07**

devamı →

14 *(çözümün devamı)*

Tahmin **çok başarılı**. 7,07 sayısı 7'ye yuvarlanır; öğrencinin yöntemi burada mükemmel çalıştı ✓

b) √60 için uygulama

Komşu tam kareler: 49 < 60 < 64
7 < √60 < 8

Uzaklıklar: 60 − 49 = **11** · 64 − 60 = **4**
4 < 11 olduğundan 64'e yakın → √60 ≈ **8**

Gerçek değer: √60 ≈ **7,75**

7,75 sayısı 8'e yuvarlanır; tahmin yine **doğru** çıktı ✓ Ancak 7,75 ile 8 arasında 0,25 birimlik bir sapma var — (a) şıkkındaki 0,07'lik sapmadan çok daha büyük.

c) √56 için uygulama

Komşu tam kareler: 49 < 56 < 64
7 < √56 < 8

Uzaklıklar: 56 − 49 = **7** · 64 − 56 = **8**
7 < 8 olduğundan 49'a yakın → √56 ≈ **7**

Gerçek değer: √56 ≈ **7,48**

Sonuç güvenilir mi? Kısmen. Yöntem "7'ye yakın" dedi ve gerçekten 7,48 < 7,5 olduğu için 7'ye yuvarlanır — yani **karar doğru**. Ama 7,48 sayısı 7'den çok **7,5'e** yakındır; "√56 ≈ 7" demek burada oldukça kaba bir tahmindir.

Uzaklıklar (7 ve 8) birbirine çok yakın olduğu için yöntem **zar zor** karar verebildi.

d) Yöntemin sınırı

Yöntem ne zaman güvenilirdir? İki uzaklık arasındaki fark **büyük** olduğunda. (a) şıkkında uzaklıklar 1 ve 14 idi; aradaki fark çok büyüktü ve tahmin neredeyse kusursuz çıktı.

Yöntem ne zaman zayıftır? İki uzaklık birbirine **yakın** olduğunda. (c) şıkkında uzaklıklar 7 ve 8 idi; sayı aralığın tam ortasına yakındı ve tahmin kabalaştı.

Önemli bir ayrıntı: Öğrencinin yöntemi uzaklıkları **karekökün içindeki sayı** üzerinden ölçüyor. Oysa asıl merak ettiğimiz, karekökün 7,5'ten büyük mü küçük mü olduğudur.

7,5'in karesi **56,25**'tir. Yani:
x < 56,25 ise √x < 7,5 → 7'ye yuvarlanır
x > 56,25 ise √x > 7,5 → 8'e yuvarlanır

Öğrencinin yöntemi ise 49 ile 64'ün ortası olan **56,5**'i sınır kabul ediyor. İki sınır (56,25 ve 56,5) birbirine çok yakın olduğu için yöntem **tam sayılarda neredeyse her zaman doğru sonuç verir** — burada 56 ve 57 arasında hiç tam sayı bulunmadığı için sorun çıkmaz.

Genel değerlendirme: Yöntem **hangi tam sayıya yakın** sorusuna güvenilir cevap verir. Ama "√56 = 7" gibi **kesin bir eşitlik** yazmak her zaman yanlıştır; doğru ifade "√56 sayısı 7 ile 8 arasındadır ve 7'ye daha yakındır" biçimindedir.

a) Evet; √50 ≈ 7,07 b) 8 der, gerçek 7,75 — doğru c) 7 der, gerçek 7,48 — doğru ama kaba d) Uzaklıklar birbirine yakınsa tahmin zayıflar

15 Aşağıdaki koşulları sağlayan sayıları bulunuz.

a) Karekökü 2 ile 3 arasında olan tam sayıları yazınız. Kaç tanedir?
b) Karekökü 12 ile 13 arasında olan en küçük ve en büyük tam sayıyı bulunuz.
c) 100 ile 200 arasında bulunan ve karekökü tam sayı olan sayıları yazınız.
d) Bir kenarı tam sayı olan ve alanı 200 cm²'den küçük olan en büyük karenin alanını ve kenarını bulunuz.

a) Karekökü 2 ile 3 arasında olan tam sayılar

Koşulu eşitsizlik olarak yazalım:
$2 < \sqrt{x} < 3$

Her tarafın karesini alalım (terimler pozitif olduğu için yön değişmez):
$2^2 < x < 3^2$
$4 < x < 9$

Bu aralıktaki tam sayılar: **5, 6, 7, 8**

Cevap: **4 tane** tam sayı vardır.

Kontrol: $\sqrt{5} \approx 2{,}24$ · $\sqrt{8} \approx 2{,}83$ → ikisi de 2 ile 3 arasında ✓
$\sqrt{4} = 2$ ve $\sqrt{9} = 3$ olduğu için uçlar **dâhil değildir**.

b) Karekökü 12 ile 13 arasında olan sayılar

$12 < \sqrt{x} < 13$
Karelerini alalım:
$144 < x < 169$

En küçük tam sayı: 144'ten büyük ilk tam sayı → **145**
En büyük tam sayı: 169'dan küçük son tam sayı → **168**

Kontrol: $\sqrt{145} \approx 12{,}04$ ✓ · $\sqrt{168} \approx 12{,}96$ ✓ İkisi de 12 ile 13 arasında.

Kaç tane var? 168 − 145 + 1 = **24 tane**

c) 100 ile 200 arasındaki tam kareler

Karekökü tam sayı olan sayılar, **tam kare** sayılardır. 100 ile 200 arasındaki tam kareleri arayalım.

$10^2 = 100$ → sınırda, "100 ile 200 arasında" dendiği için dâhil etmiyoruz
$11^2 =$ **121** ✓
$12^2 =$ **144** ✓
$13^2 =$ **169** ✓
$14^2 =$ **196** ✓
$15^2 = 225$ → 200'den büyük ×

Cevap: **121, 144, 169, 196** → **4 tane**

Kareköklerı sırasıyla: 11, 12, 13, 14

d) Alanı 200 cm²'den küçük en büyük kare

Karenin kenarı **tam sayı** olacaksa alanı da bir **tam kare** sayı olmalıdır (Alan = Kenar²).

devamı →

15 *(çözümün devamı)*

200'den küçük en büyük tam kare sayıyı arıyoruz. (c) şıkkında bulduğumuz listeye bakalım: 121, 144, 169, **196** … ve bir sonraki 225 > 200 ×

Alan = 196 cm²
Kenar = √196 = 14 cm

Kontrol:
14 · 14 = 196 < 200 ✓
15 · 15 = 225 > 200 × (kenar 15 olamaz)

Sonucun anlamı: Kenarı 14 cm olan kare, alanı 200 cm²'yi aşmadan kurulabilecek **en büyük** karedir ve 200 cm²'lik bir kâğıttan yalnızca 4 cm²'lik bir artık kalır.

a) 5, 6, 7, 8 → 4 tane b) En küçük 145, en büyük 168 c) 121, 144, 169, 196 d) Alan 196 cm², kenar 14 cm